



Universidad Autónoma  
del Estado de México



# Aritmética y lenguaje matemático

---

**Libro de texto basado en competencias**

---

Alejandro Alvarado Catzoli · Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova  
Domingo Hernández García · Edgar Jesús Rubelo Velásquez  
Alfonso Samuel Soteno Tahuilán · Ricardo Valdes Camarena  
José Luis Gerardo Valencia Aguilar · María Magdalena Villegas Carstensen

**1<sup>er</sup>**  
**Semestre**

# **Aritmética y Lenguaje Matemático**

Libro de texto basado en competencias

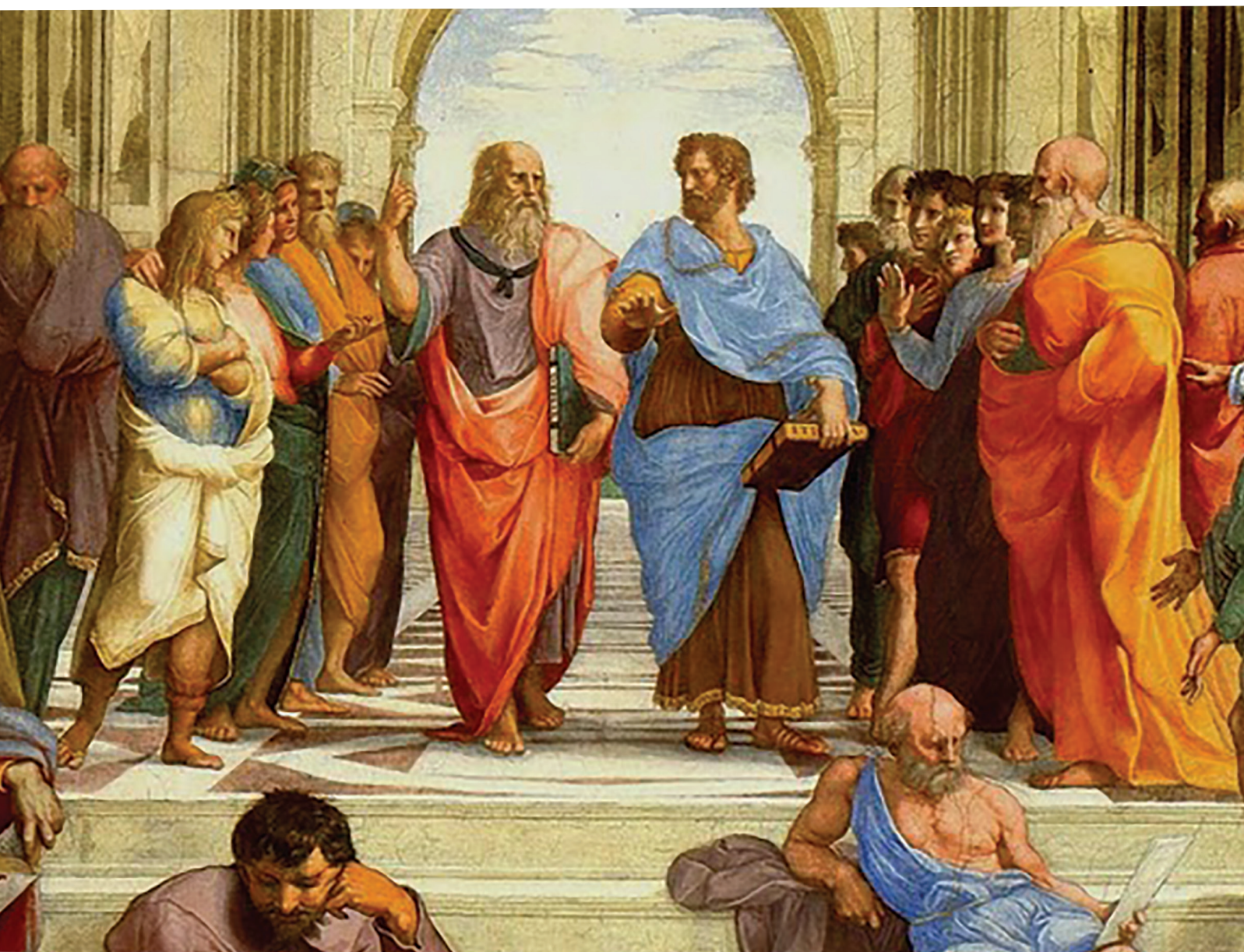
DIRECCIÓN DE PUBLICACIONES UNIVERSITARIAS  
*Editorial de la Universidad Autónoma del Estado de México*

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales  
**Carlos Eduardo Barrera Díaz**  
*Rector*

Doctora en Humanidades  
**María de las Mercedes Portilla Luja**  
*Secretaria de Difusión Cultural*

Doctor en Administración  
**Jorge Eduardo Robles Alvarez**  
*Director de Publicaciones Universitarias*

Doctora en Investigación Educativa  
**Eva Lilia García Escobar**  
*Directora de Estudios de Nivel Medio Superior*



# ARITMÉTICA Y LENGUAJE MATEMÁTICO

Libro de texto basado en competencias

Alejandro Alvarado Catzoli  
Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova  
Domingo Hernández García  
Edgar Jesús Rubelo Velásquez  
Alfonso Samuel Soteno Tahuilán  
Ricardo Valdes Camarena  
José Luis Gerardo Valencia Aguilar  
María Magdalena Villegas Carstensen

1ª Edición, julio 2021

2ª Edición, julio 2023

## ARITMÉTICA Y LENGUAJE MATEMÁTICO

Libro de texto basado en competencias

### Autores

Alejandro Alvarado Catzoli

**Plantel “Isidro Fabela Alfaro”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM**

Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova

**Plantel “Ignacio Ramírez Calzada”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM**

Domingo Hernández García

**Plantel “Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM**

Edgar Jesús Rubelo Velásquez

**Plantel “Dr. Pablo González Casanova”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM**

Alfonso Samuel Soteno Tahuilán

**Plantel “Nezahualcóyotl”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM**

Ricardo Valdes Camarena

**Plantel “Lic. Adolfo López Mateos”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM**

José Luis Gerardo Valencia Aguilar

**Plantel “Cuauhtémoc”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM**

María Magdalena Villegas Carstensen

**Plantel “Cuauhtémoc”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM**

Universidad Autónoma del Estado de México

Av. Instituto Literario 100 Ote.

Toluca, Estado de México

C. P. 50000

Tel: (52) 722 277 38 35 y 36

<http://www.uaemex.mx>

El contenido de este material es responsabilidad de los autores, así como el tratamiento basado en competencias realizado a los libros de texto. Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra sin el consentimiento previo y por escrito del editor. La Universidad Autónoma del Estado de México se deslinda de cualquier acción legal derivada de este material.

© Derechos reservados, 2016

ISBN: 978-607-633-642-7

Hecho en México

Responsable del Programa de Diseño y Producción Editorial: L.D.G. Miguel Angel Conzuelo Endeje

Corrección de estilo: Eugenio González Tolentino y Guillermo Roz

Portada e interiores: Ana Carolina Ramírez Góngora, Cristina Buenrostro Sánchez y José María Alatríste Galván



# Mensaje

A través de su historia, la Universidad Autónoma del Estado de México ha tenido como uno de sus objetivos fundamentales lograr que el estudiantado reciba una educación basada en el libre pensamiento, apelando a un sentido científico. La Escuela Preparatoria de la UAEM continuará mostrándose como un punto de inflexión para la comunidad estudiantil por la calidad de la educación que se ofrece al tiempo que se enseña a adquirir conocimientos, valores, habilidades y destrezas que favorezcan el entendimiento de nuestro entorno social y ambiental.

La responsabilidad de la Universidad Autónoma del Estado de México es asegurar que la educación que se imparte en la Escuela Preparatoria contribuya a ampliar el horizonte personal y profesional de los estudiantes. El enfoque para la apropiación del conocimiento parte de aprovechar la experiencia de vida y desde la autonomía de pensamiento y la reflexión lograr una comprensión más amplia de la realidad.

El material educativo que tienes en tus manos ha sido elaborado colegiadamente entre especialistas de cada una de las áreas del conocimiento. La creatividad, el pensamiento crítico y reflexivo, así como el espíritu científico del claustro de docencia e investigación se reúne en esta antología con el fin de que te acerques al conocimiento con una mirada crítica. Este ejemplar ha sido elaborado con el fin de establecer un aprendizaje dialógico que estimule tu curiosidad, que te sirva como guía, y que invariablemente te provoque pasión por el conocimiento.

El objetivo es lograr que recibas una educación integral e incluyente que incida de manera positiva en tu trayectoria escolar. Por ello es importante que asumas un compromiso personal, empeño y dedicación que te permita apropiarte del conocimiento.

**Patria, Ciencia y Trabajo**

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales  
Carlos Eduardo Barrera Díaz  
Rector

# Índice

## Módulo 1. Conjuntos numéricos

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Símbolos matemáticos .....                                           | 12 |
| 2. Conjunto .....                                                       | 13 |
| 2.1 Definición .....                                                    | 13 |
| 2.2 Denotación: Extensión y Comprensión .....                           | 13 |
| 2.3 Subconjunto .....                                                   | 15 |
| 2.4 Diagrama de Venn Euler .....                                        | 15 |
| 2.5 Conjunto universal .....                                            | 16 |
| 3. Operaciones con conjuntos .....                                      | 16 |
| 3.1 Unión .....                                                         | 16 |
| 3.2 Intersección .....                                                  | 20 |
| 3.3 Complemento .....                                                   | 23 |
| 4. Concepto de número .....                                             | 25 |
| 5. Conjuntos numéricos .....                                            | 25 |
| 5.1 Números Naturales .....                                             | 25 |
| 5.2 Números Enteros .....                                               | 26 |
| 5.3 Números Racionales .....                                            | 26 |
| 5.4 Números Irracionales .....                                          | 27 |
| 5.5 Números Reales .....                                                | 28 |
| 5.6 Otras clasificaciones de números .....                              | 28 |
| 6. Representación de los conjuntos numéricos en la recta numérica ..... | 29 |
| 7. Relaciones de orden en los números reales .....                      | 31 |
| 7.1 Mayor que o mayor o igual que .....                                 | 31 |
| 7.2 Menor que o menor o igual que .....                                 | 31 |
| 8. Intervalos .....                                                     | 33 |
| 8.1 Intervalo Abierto .....                                             | 33 |
| 8.2 Intervalo Cerrado .....                                             | 33 |
| 8.3 Intervalo Mixto semiabierto o semicerrado .....                     | 34 |
| 8.4 Operaciones con intervalos .....                                    | 35 |
| 9. Problemas de aplicación .....                                        | 37 |

## Módulo 2. Operaciones con números

|                                     |    |
|-------------------------------------|----|
| 1. Números naturales .....          | 44 |
| 1.1 Propiedades y operaciones ..... | 44 |
| Adición .....                       | 44 |
| Multiplicación .....                | 45 |
| Potenciación .....                  | 46 |

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| 2. Números enteros .....                                 | 47 |
| 2.1 Propiedades y operaciones .....                      | 47 |
| Adición .....                                            | 47 |
| Sustracción de números enteros.....                      | 48 |
| Propiedades de la sustracción de números enteros.....    | 49 |
| Multiplicación .....                                     | 49 |
| 3. Leyes de los signos .....                             | 50 |
| Potenciación .....                                       | 51 |
| 4. Signos de agrupación y jerarquía de operaciones ..... | 52 |
| 5. Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor .....    | 56 |
| Múltiplo .....                                           | 56 |
| Múltiplo común .....                                     | 57 |
| Mínimo común múltiplo .....                              | 57 |
| Divisor .....                                            | 57 |
| Máximo común divisor .....                               | 57 |
| 5.1 Números Primos .....                                 | 58 |
| 5.2 Criterios de divisibilidad .....                     | 58 |
| 6. Número racional .....                                 | 59 |
| 6.1 Fracción .....                                       | 59 |
| 6.2 Conversión de fracción a decimal .....               | 60 |
| 6.3 Números mixto .....                                  | 60 |
| 7. Fracciones equivalentes .....                         | 61 |
| 8. Leyes de exponentes .....                             | 62 |
| 8.1 Exponentes enteros .....                             | 62 |
| 8.2 Exponentes racionales .....                          | 63 |
| 8.3 Aplicaciones de las leyes de exponentes .....        | 64 |
| Notación científica .....                                | 64 |
| 9. Operaciones con números racionales .....              | 66 |
| 9.1 Propiedades .....                                    | 66 |
| 9.2 Operaciones .....                                    | 67 |
| Adición .....                                            | 67 |
| Sustracción .....                                        | 68 |
| Multiplicación .....                                     | 69 |
| División .....                                           | 70 |
| Potenciación .....                                       | 73 |
| Radicación (valores exactos) .....                       | 74 |
| 10. Potencia enésima de números reales .....             | 76 |
| 10.1 Propiedades .....                                   | 76 |
| Adición .....                                            | 77 |
| Multiplicación .....                                     | 77 |
| 10.2 Operaciones .....                                   | 79 |
| 11. Problemas de aplicación .....                        | 84 |

**Módulo 3. Razones, proporciones y porcentajes**

- 1. Conceptos .....92
  - 1.1 Razones .....92
  - 1.2 Proporciones .....94
  - 1.3 Porcentajes .....95
- 2. Variaciones .....96
  - 2.1 Variaciones Directas .....96
  - 2.2 Variaciones Indirectas o inversas .....100
  - 2.3 Variación Compuesta .....104
- 3. Problemas de aplicación .....106

**Módulo 4. Modelos matemáticos y lenguaje algebraico**

- 1. Lenguaje común y lenguaje algebraico .....122
- 2. Expresión algebraica .....124
  - 2.1 Término algebraico .....125
  - 2.2 Variables y constantes .....126
  - 2.3 Clasificación de expresiones algebraicas .....127
  - 2.4 Modelos matemáticos .....128
- 3. Valor numérico .....131
  - 3.1 Expresiones algebraicas .....131
  - 3.2 Fórmulas .....132
- 4. Problemas de aplicación .....133
  
- Bibliografía .....142
- Mesografía .....142
- Índice de imágenes .....142

# Presentación

El objetivo de este texto es desarrollar habilidades, destrezas y actitudes para conocer y emplear los elementos fundamentales de la Aritmética y del lenguaje matemático para la resolución de problemas cuyo modelo sean los conjuntos y los subconjuntos de números, las operaciones con números enteros, racionales y reales, la resolución de problemas que involucren razones, proporciones y porcentajes, con una actitud constructiva y congruente en el trabajo individual y en equipos de trabajo. Y por último, la modelación de expresiones algebraicas y transformación de lenguaje común al algebraico a través del planteamiento de problemas.

El Libro está integrado por 4 módulos, mismos que se desprenden del Programa de Estudios de la Asignatura de Aritmética y Lenguaje Matemático del CBU 2015, estos son:

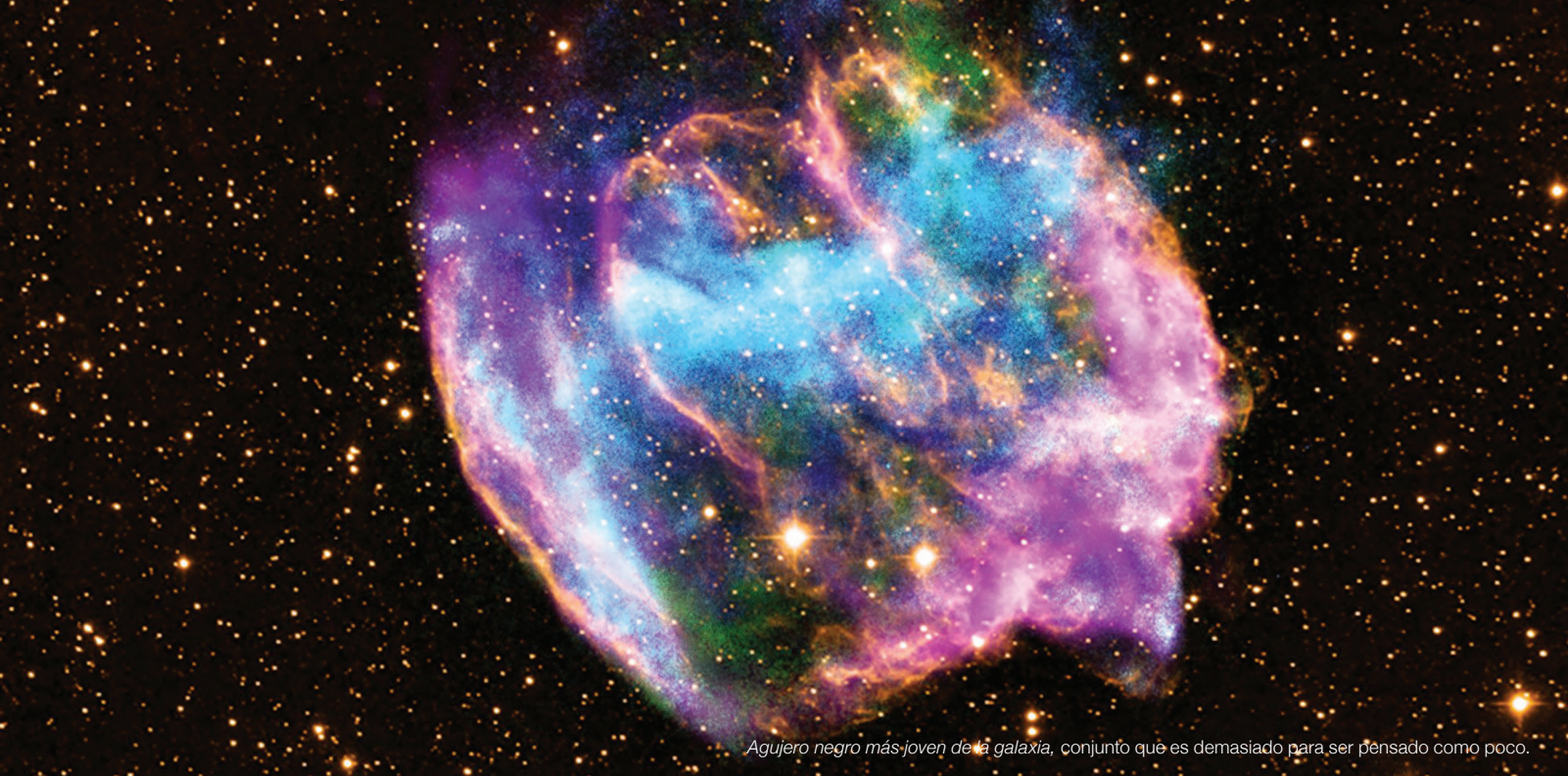
**Módulo uno.** Conjuntos numéricos

**Módulo dos.** Operaciones de números

**Módulo tres.** Razones, proporciones y porcentajes

**Módulo cuatro.** Modelos matemáticos

Fue elaborado con la intención de que el estudiante sea protagonista en el desarrollo de las competencias que se enfocan en él para que, de esta forma, logre comprender los significados que se desprenden del estudio de los números y sus propiedades. Esperamos que el presente libro estimule el desarrollo de habilidades como la creatividad, el razonamiento lógico y el pensamiento crítico, actitudes que con frecuencia se aplican en otras áreas del conocimiento.



*Agujero negro más joven de la galaxia, conjunto que es demasiado para ser pensado como poco.*

# Módulo 1

## Conjuntos numéricos



### Competencias genéricas y atributos<sup>1</sup>

- 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
  - 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
  - 4.5. Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
- 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
  - 5.2. Ordena información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
- 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
  - 8.1. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

<sup>1</sup>Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).



## Competencias disciplinares básicas y extendidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

### I. Símbolos matemáticos

| Símbolo       | Nombre                           | Símbolo           | Nombre                    |
|---------------|----------------------------------|-------------------|---------------------------|
| $\in$         | pertenece a                      | $>$               | mayor que                 |
| $\notin$      | no pertenece                     | $<$               | menor que                 |
| $\emptyset$   | conjunto vacío                   | $\geq$            | mayor o igual que         |
| $U$           | conjunto universal               | $\leq$            | menor o igual que         |
| $\subset$     | subconjunto                      | $\forall$         | para todo                 |
| $\subseteq$   | subconjunto propio               | $\therefore$      | por lo tanto              |
| $\not\subset$ | no subconjunto                   | $\neq$            | diferente                 |
| $\cup$        | unión                            | $\equiv$          | idéntico                  |
| $\cap$        | intersección                     | $\Sigma$          | suma                      |
| $\exists$     | existe                           | $\infty$          | infinito                  |
| $\nexists$    | no existe                        | $\wedge$          | y (conjunción)            |
| $N$           | conjunto de números naturales    | $\vee$            | ó (disyunción)            |
| $Z, E$        | conjunto de números enteros      | $\Leftrightarrow$ | si y sólo si              |
| $Q$           | conjunto de números racionales   | $\Rightarrow$     | entonces                  |
| $Q', I$       | conjunto de números irracionales | $ $               | tal que                   |
| $R$           | conjunto de números reales       | $\approx$         | aproximadamente igual que |
| $+$           | símbolo de suma                  | $^{\circ}$        | grados                    |
| $-$           | símbolo de resta                 | $\propto$         | proporcional              |
| $\times$      | símbolo de multiplicación        | $\cong$           | congruencia               |
| $\div /$      | símbolo de división              | $=$               | igual                     |



## 2. Conjunto

¿Qué son los conjuntos?

La teoría de los conjuntos fue desarrollada inicialmente por el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), a fines del siglo XIX.

### 2.1 Definición

Se le llama **conjunto** a una colección bien definida de objetos de cualquier naturaleza: personas, números, letras, figuras, etc., denominados elementos o miembros del conjunto.

Por ejemplo, todos los libros de una biblioteca, las letras del abecedario, los números divisores de 12, la totalidad de árboles de un parque, la lista de familias que viven en un pueblo, los estados de la República Mexicana, todos los números mayores que 3 y menores que 10, la colección de butacas de un auditorio; todos ellos son conjuntos.

Un conjunto se nombra con una letra mayúscula y los elementos del conjunto se escriben dentro de un par de llaves separados por comas.

### 2.2 Denotación

Un conjunto se puede expresar de dos maneras:

- Por **extensión**: cuando se nombran todos sus elementos explícitamente.

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{\text{pulgar, índice, medio, anular, meñique}\}$$

$$C = \{\text{norte, sur, este, oeste}\}$$

$$D = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$$

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Expresa por **extensión**:  $M = \{\text{meses del año}\}$  y  $G = \{\text{Números pares del 2 al 20}\}$ .

- Por **comprensión**: cuando se especifica una propiedad o regla que describe perfectamente como determinar los elementos del conjunto.

$$A = \{\text{vocales del abecedario}\}$$

$$B = \{\text{dedos de la mano}\}$$

$$C = \{\text{puntos cardinales}\}$$

$$D = \{\text{días de la semana}\}$$

$$E = \{\text{números naturales menores o iguales que 8}\}$$

$$F = \{\text{ángulos cuya medida está entre } 0^\circ \text{ y } 90^\circ\}$$

Expresa por **comprensión** los conjuntos:  $P = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$  y  $G = \{\text{cinco frutas dulces}\}$ .



$$G = \{redes\ sociales\}$$

$$H = \{municipios\ del\ Estado\ de\ México\}$$

Otra notación para denotar por comprensión estos ejemplos es:

$$A = \{x \mid x\ es\ una\ vocal\ del\ abecedario\}$$

$$B = \{x \mid x\ es\ un\ dedo\ de\ la\ mano\}$$

$$C = \{x \mid x\ es\ un\ punto\ cardinal\}$$

$$D = \{x \mid x\ es\ un\ día\ de\ la\ semana\}$$

$$E = \{x \mid x\ es\ un\ número\ natural\ \wedge\ x \leq 8\}$$

$$F = \{\alpha \mid \alpha\ es\ un\ ángulo\ \wedge\ 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$$

$$G = \{x \mid x\ es\ una\ red\ social\}$$

$$H = \{x \mid x\ es\ un\ municipio\ del\ Estado\ de\ México\}$$

En estas expresiones el símbolo “|” significa tal que (como se indica en la tabla de símbolos), por lo que el conjunto  $E$  se lee como “el conjunto de los elementos  $x$  tal que  $x$  es un número natural menor o igual que 8” y el conjunto  $F$  se lee como “conjunto de los ángulos tal que  $\alpha$  es un ángulo entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  (aquí la palabra “entre” significa que no se incluyen ni a  $0^\circ$  ni a  $90^\circ$ )”. Los símbolos “<”, “>”, “≤” y “≥” significan, respectivamente, “es menor que”, “es mayor que”, “es menor o igual que” y “es mayor o igual que”.

Si  $x$  es un elemento de un conjunto  $A$ , entonces se dice que  $x$  pertenece a  $A$  y simboliza como  $x \in A$  (el símbolo  $\in$  se lee: “es un miembro de”, “es un elemento de” o “pertenece a”). Si  $x$  no es elemento del conjunto  $A$  entonces se dice que  $x$  no pertenece a  $A$  y se simboliza como  $x \notin A$ .

Si los elementos de un conjunto se enlistan del primero al último, decimos que el conjunto es finito; de lo contrario, el conjunto es infinito.

Si un conjunto no contiene elementos es llamado un conjunto vacío o nulo y se denota con el símbolo  $\emptyset$ , o simplemente  $\{\}$ .



**Ejercicio**  
Módulo 1

$$E = \{x \mid x\ es\ un\ número\ natural\ entre\ 5 \wedge 6\}$$

Es un conjunto vacío porque no hay un número natural que este entre cinco y seis.

Cuando se trata de conjuntos con muchos elementos, no es necesario escribirlos todos, siempre y cuando exista un patrón para determinar el orden. Se pueden usar puntos suspensivos para evitar la escritura de dichos elementos.

**Ejercicio.** Expresar el conjunto de los números enteros entre 3 y 4:



**Ejercicio**  
Módulo 1

$$A = \{primeros\ cien\ números\ naturales = 1, 2, 3, 4, \dots, 97, 98, 99, 100\}$$

$$B = \{primeros\ cincuenta\ números\ naturales\ pares = 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 94, 96, 98, 100\}$$

**Ejercicio.** Expresa por extensión los números enteros del -50 al +50

## 2.3 Subconjunto

Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **iguales** ( $A = B$ ) si tienen exactamente los mismos elementos, de lo contrario los conjuntos son diferentes y se denota  $A \neq B$ .

Un **subconjunto**  $A$  de un conjunto  $B$  es un conjunto que contiene algunos (o todos) los elementos de  $B$ ; o bien, cada elemento de  $A$  es a su vez un elemento de  $B$ . Se denota como  $A \subset B$  y se dice que “ $A$  está contenido en  $B$ ”.

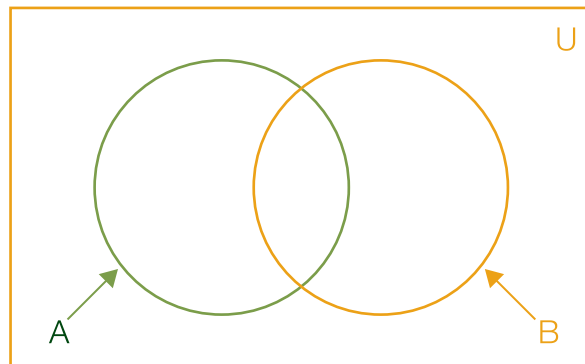
Si  $A \subset B \wedge A \neq B$ , entonces  $A$  es un subconjunto propio de  $B$ .

Por ejemplo, el “conjunto de todos los estudiantes de los planteles de la escuela preparatoria de la UAEM” es un subconjunto propio del “conjunto de todos los estudiantes de la UAEM”.

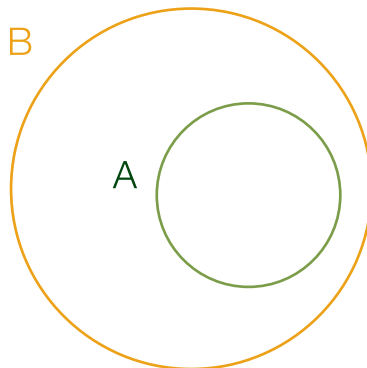
Todo conjunto tiene al menos dos subconjuntos: el conjunto vacío y el mismo conjunto. Y el total de subconjuntos de un conjunto con  $n$  elementos es  $2^n$ .

## 2.4 Diagrama de Venn-Euler

Los conjuntos se pueden representar gráficamente con los llamados **diagramas de Venn**, que son dibujos o diagramas (usualmente círculos, elipses o rectángulos) sumamente útiles para visualizar las relaciones entre conjuntos.



Por ejemplo,  $A \subset B$  se puede representar de la siguiente manera:



## 2.5 Conjunto universal

El **conjunto universal** que normalmente se denota con la letra  $U$  y se representa con un rectángulo en el diagrama de Venn, es un conjunto cuyo objeto de estudio son los subconjuntos del mismo. Por ejemplo, si estamos tratando conjuntos cuyos elementos son letras, el conjunto universal es el conjunto formado por todas las letras del abecedario.

Gráficamente  $A \subset U$  se representaría como:



## 3. Operaciones con conjuntos

Existen operaciones básicas que permiten manipular a los conjuntos y a sus elementos. En este libro se abordará la unión, la intersección de conjuntos y complemento.

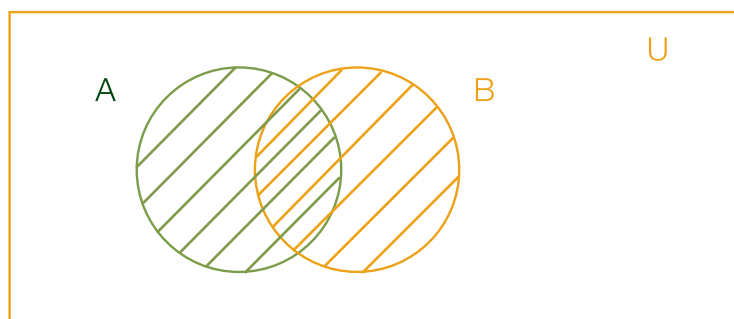
### 3.1 Unión

La **unión** de dos conjuntos  $A$  y  $B$  (denotada por  $A \cup B$ ) es un conjunto formado por la suma de todos los elementos de dichos conjuntos. La unión puede ser entre dos o más conjuntos.

Si se repiten los elementos, solamente sólo se escribe una vez. Además de que se acostumbra ordenarlos.

Notación:  $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Se lee “ $A$  unión  $B$  es el conjunto de las  $x$ , tal que  $x$  pertenece al conjunto  $A$  ó  $x$  pertenece al conjunto  $B$ ”. Con un diagrama de Venn se representaría como:



Si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

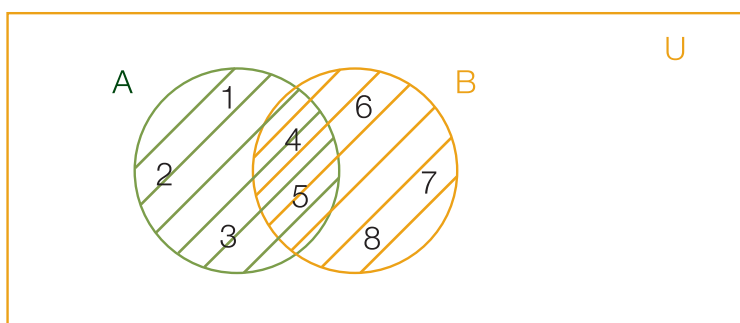
$$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

Determinar  $A \cup B$ :

**Solución**

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

En diagrama de Venn:



Dados los conjuntos:  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$  y  $B = \{4, 6, 7, 8\}$  obtener  $A \cup B$  y su representación con diagrama de Venn.





**Ejemplo**

Si

$$A = \{a, b, c, d\}$$

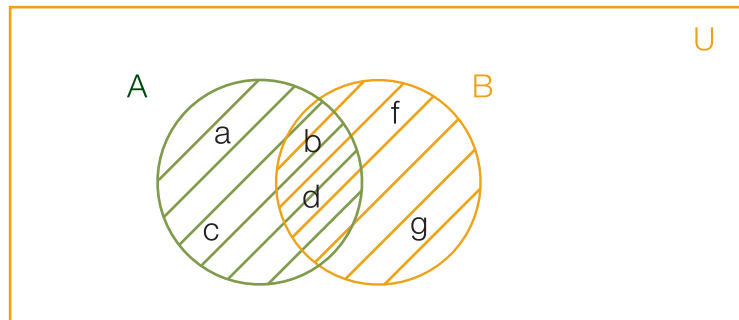
$$B = \{f, b, d, g\}$$

Determinar  $A \cup B$ :

**Solución**

$$A \cup B = \{a, b, c, d, f, g\}$$

En diagrama de Venn:



**Ejercicio**  
Módulo 1

Dados los conjuntos:  $A = \{o, p, q, r\}$  y  $B = \{s, t, q, p\}$  obtener  $A \cup B$  y su representación con diagrama de Venn.



Si:

$$A = \{x \mid x \text{ es un planeta del sistema solar}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ es un planeta que esta más próximo al sol que la tierra}\}$$

Determinar  $A \cup B$ :

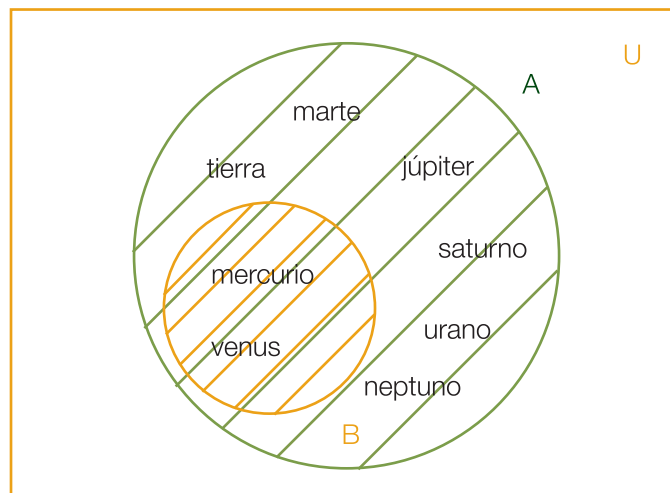
### Solución

$$A = \{\text{mercurio, venus, tierra, marte, júpiter, saturno, urano, neptuno}\}$$

$$B = \{\text{mercurio, venus}\}$$

$$A \cup B = \{\text{mercurio, venus, tierra, marte, júpiter, saturno, urano, neptuno}\}$$

En diagrama de Venn:



Si

$$A = \{x \mid x \text{ es un mes del año}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ es un mes con 30 días}\}$$

Determinar  $A \cup B$ :



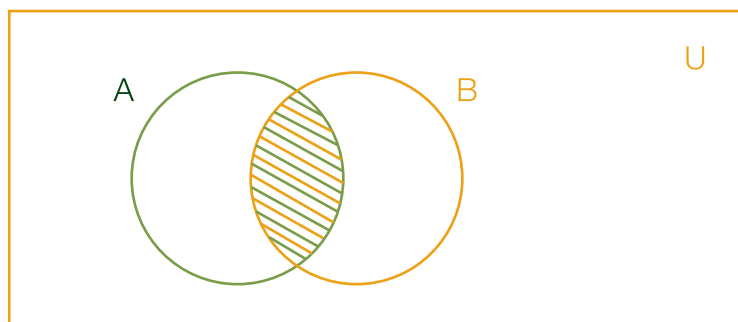
**Ejercicio**  
Módulo 1

## 3.2 Intersección

La **intersección** de dos conjuntos  $A$  y  $B$  (denotada por  $A \cap B$ ) es un conjunto formado por los elementos de  $A$  que también pertenecen al conjunto  $B$ , es decir los elementos comunes a  $A$  y  $B$ . La intersección puede ser entre dos o más conjuntos.

Notación:  $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Se lee “ $A$  intersección  $B$  es el conjunto de las  $x$  tal que  $x$  pertenece al conjunto  $A$  y  $x$  pertenece al conjunto  $B$ ”. La parte sombreada del siguiente diagrama de Venn representaría la intersección de  $A$  y  $B$ :



Si:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

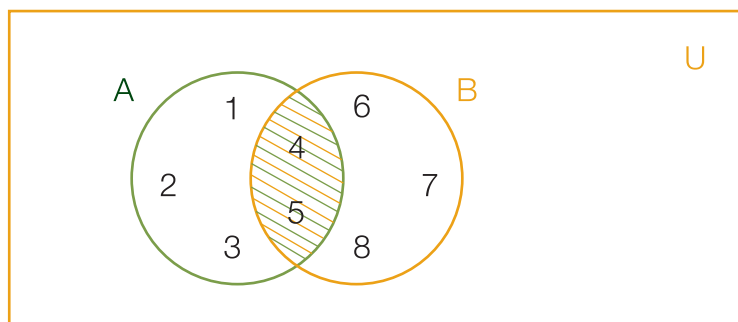
Determinar  $A \cap B$ :

**Solución**

Los elementos comunes a ambos conjuntos son 4 y 5, por tanto:

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

En diagrama de Venn:



Dados los conjuntos:  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$  y  $B = \{4, 6, 7, 8\}$  Obtener  $A \cap B$  y su representación en un diagrama de Venn.



Dados:

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{0, 1, 3, 4, 9\}$$

$$C = \{4, 5, 6, 7\}$$

Obtener:

$$1. - A \cup B$$

$$2. - A \cup C$$

$$3. - A \cup (B \cap C)$$

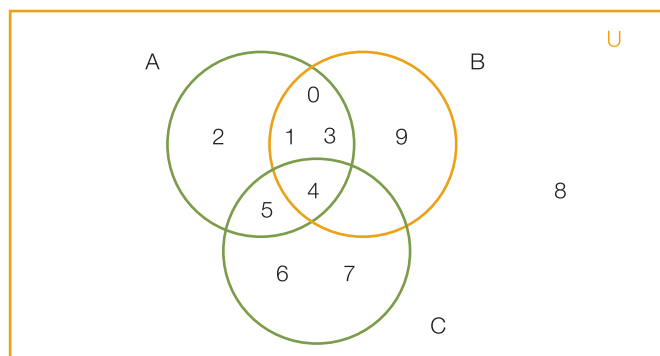
$$4. - A \cap (B \cup C)$$

$$5. - A \cap (B \cap C)$$



### Solución

Haciendo un análisis de los elementos de los cuatro conjuntos podríamos representarlos con el siguiente diagrama de Venn:



Entonces de acuerdo con las definiciones de unión e intersección los resultados serían:

1.  $- A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9\}$
2.  $- A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
3.  $- A \cup (B \cap C) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
4.  $- A \cap (B \cup C) = \{0, 1, 3, 4, 5\}$
5.  $- A \cap (B \cap C) = \{4\}$



Dados:  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Obtener:

- a)  $A \cup B$
- b)  $A \cup C$
- c)  $A \cup (B \cap C)$
- d)  $A \cap (B \cup C)$

Y representar cada inciso con su diagrama de Venn.



Si

$$A = \{x \mid x \text{ es un mes del año}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ es un mes con 30 días}\}$$

Determinar  $A \cap B$ :



### 3.3 Complemento

Dado el conjunto universal  $U$  y otro conjunto  $A$ , que sea subconjunto de  $U$ , entonces se define el **complemento** de  $A$ , denotado por  $A^c$ , como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a  $U$  pero que no pertenecen a  $A$ .

Notación:  $A^c = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$  (parte sombreada del diagrama siguiente).



Dados

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

$$A = \{a, b, c, d, x, y, z\}$$

Obtener  $A^c$

**Solución**

$$A^c = \{e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w\}$$

Los elementos  $e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w$  están en  $U$  pero no en  $A$





**Ejercicio**  
Módulo 1

Dados

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

$$A = \{a, b, c, d, x, y, z\}$$

Obtener  $A^c$



**Ejemplo**

Dados

$$U = \{a, b, c, d, e\}$$

$$A = \{a, b, d\}$$

$$B = \{b, d, e\}$$

Obtener

- a)  $B^c$
- b)  $A^c \cap B$
- c)  $A \cup B^c$

**Solución**

- a) El complemento de  $B$  consta de las letras que están en  $U$  pero no en  $B$ ; entonces  $B^c = \{a, c\}$
- b)  $A^c = \{c, e\}$  y  $B = \{b, d, e\}$ ; entonces  $A^c \cap B = \{e\}$
- c)  $A = \{a, b, d\}$  y  $B^c = \{a, c\}$ ; entonces  $A \cup B^c = \{a, b, c, d\}$



**Ejercicio**  
Módulo 1

Con los datos del ejemplo anterior, obtener:

- a)  $(A \cap B)^c$
- b)  $(A \cup B)^c$
- c)  $A^c \cap B^c$

Practicar con el paquete Thatquiz, con esta liga y probar entrando a Conjuntos.

<https://www.thatquiz.org/es/>

Entrar en el menú, 3ª columna, 6º renglón. Conjuntos.

## 4. Concepto de número

Cuando el Hombre tuvo la necesidad de ordenar y enlazar conjuntos se crearon los números, que son la representación de la cantidad de determinado conjunto.



Ejemplo

La palabra **número** proviene etimológicamente del latín “*numerus*”, y expresa cantidad, referida comparativamente a la unidad, que es la base de todo sistema numérico.

Un número puede acompañarse de una unidad, por ejemplo cuando decimos: cinco pesos, se expresa \$5, tres metros, se expresa 3 m, quince kilómetros se expresa 15 Km, dos litros se expresa 2 lt., siete se expresa 7, dos quintos se expresa  $\frac{2}{5}$ , la raíz cuadrada de cinco se expresa  $\sqrt{5}$ .

## 5. Conjuntos numéricos

Según tus conocimientos previos, completa la siguiente tabla:

| Números      | ¿Para qué sirven? | Escribe tres ejemplos | ¿Qué sé de los números? |
|--------------|-------------------|-----------------------|-------------------------|
| Naturales    |                   |                       |                         |
| Enteros      |                   |                       |                         |
| Racionales   |                   |                       |                         |
| Irracionales |                   |                       |                         |
| Reales       |                   |                       |                         |

### 5.1 Números naturales

Para poder negociar y ordenar elementos, el Hombre tuvo la necesidad de representar las cantidades de lo que poseía para saber de qué disponía exactamente. Por ello surgió la idea de crear símbolos que representaran cantidades y se llegó a lo que hoy conocemos como números naturales. Y son los primeros que surgen en las distintas civilizaciones debido a que contar y ordenar elementos son las tareas más elementales en el tratamiento de las cantidades.

En consecuencia, los números naturales son aquellos que nos sirven para contar y ordenar cantidades, con ellos sólo es posible realizar dos operaciones: la suma y la multiplicación.

Si sumamos dos números naturales, el resultado siempre será otro número natural. Lo mismo ocurre cuando multiplicamos. Sin embargo, no siempre podemos restar dos números naturales y obtener como resultado otro número natural; lo mismo ocurre con la división.

Por ejemplo, al intentar restar  $3 - 8$ , el resultado es un número que no sirve para contar u ordenar elementos. El resultado será  $-5$ . Lo mismo pasa con la división si, por ejemplo, se dividiera 7 entre 5; el resultado será un número que tampoco sirve para contar u ordenar elementos, pues el resultado correcto dará 1.4.

Por lo tanto, el conjunto numérico más simple es el conjunto de los números naturales, que se denota por " $\mathbb{N}$ " y está definido de la siguiente manera:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

## 5.2 Números enteros

Ante la necesidad de realizar la operación sustracción, se define el conjunto de números enteros, denotado por  $\mathbb{Z}$ , de la siguiente manera:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

Para el conjunto de los números enteros, están definidas las operaciones de la adición, sustracción y multiplicación.

Cabe hacer notar que el conjunto de los números naturales está contenido en el conjunto de los números enteros  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

## 5.3 Números racionales

Ante la necesidad de realizar las operaciones de división, se define el conjunto de números racionales, denotado por  $\mathbb{Q}$ , que se representan como el cociente de dos enteros y tiene como denominador un número distinto a cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

Los números racionales se caracterizan por tener parte decimal finita o infinita periódica.

Para el conjunto de los números racionales, están definidas las cuatro operaciones fundamentales: adición, sustracción, multiplicación y división.

El conjunto de los números enteros está contenido en el conjunto de los números racionales  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .



## 5.4 Números irracionales

Un número irracional es aquel que no puede expresarse como el cociente de dos enteros. Su parte decimal es infinita y no periódica.

Ejemplos de números irracionales

$$\sqrt{2} = 1.4142.....$$

$$\sqrt{3} = 1.7320.....$$

$$\sqrt{5} = 2.2360...$$

$$\pi = 3.1415.....$$

$$e = 2.7182.....$$



**Ejercicio**  
Módulo 1

Todas las raíces inexactas son números irracionales. El conjunto de los números irracionales se denota por " $\mathbb{I}$ ".

**Ejercicio:** Escribir tres números irracionales diferentes a los ejemplos.

Como los números irracionales no pueden ser representados como cocientes de números enteros (ya que no son racionales) no es posible escribir explícitamente su forma decimal, pero sí tienen la importante propiedad de poder ser aproximados con el grado de precisión que se necesite.

La resta y el producto de números irracionales puede no ser un número irracional. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

$$\frac{\pi}{\pi} = 1$$

El conjunto de números irracionales no es cerrado ni con respecto a la suma o adición ni con respecto a la multiplicación; es decir, la suma y la multiplicación de dos números irracionales puede que no sea otro número irracional, razón por la cual no tiene sentido el afirmar que cumple con determinadas propiedades.



**Ejemplo**

Escribir con **V** las proposiciones verdaderas y con **F** las proposiciones falsas.

$$\frac{8}{15} \in \mathbb{I} \dots\dots\dots \underline{\text{F}}$$

$$\sqrt{7} \in \mathbb{I} \dots\dots\dots \underline{\text{V}}$$

$$(1/3) \notin \mathbb{I} \dots\dots\dots \underline{\text{V}}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{I} \dots\dots\dots \underline{\text{F}}$$

$$\frac{1021}{990} \in \mathbb{I} \dots\dots\dots \underline{\text{F}}$$

$$\mathbb{R} \cup \mathbb{I} = \mathbb{Q} \dots\dots\dots \underline{\text{F}}$$



**Ejercicio**  
Módulo 1

Coloca **V** en las proposiciones verdaderas y **F** en las proposiciones falsas.

$$10 \in \mathbb{I} \dots\dots\dots$$

$$-\frac{3}{4} \in \mathbb{I} \dots\dots\dots$$

$$\pi \in \mathbb{I} \dots\dots\dots$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R} \dots\dots\dots$$

$$\frac{39}{14} \in \mathbb{I} \dots\dots\dots$$

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \dots\dots\dots$$

## 5.5 Números reales

El conjunto de los números reales es denotado por " $\mathbb{R}$ " y está conformado por la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

## 5.6 Otras clasificaciones de números

La teoría de los números reconoce otras clasificaciones, como por ejemplo:

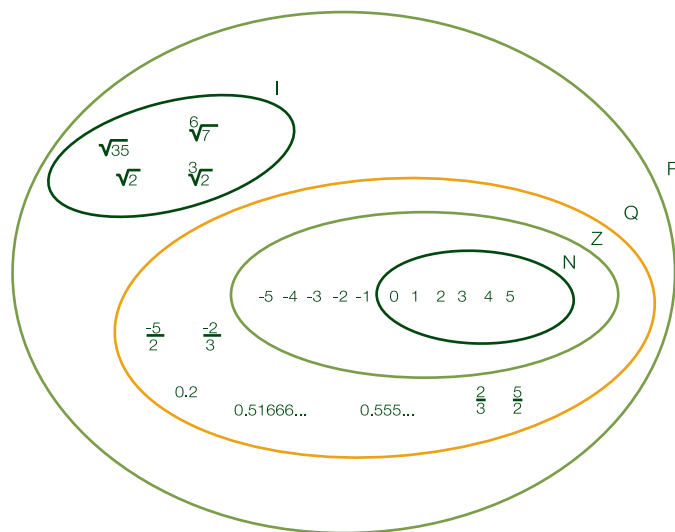
Los números primos son aquellos números naturales que sólo tienen dos divisores: él mismo y 1.

Los números ordinales que son los que se emplean para establecer un conjunto bien ordenado, esto es primero ( $1^\circ$ ), segundo ( $2^\circ$ ), tercero ( $3^\circ$ ), etc.

Los números cardinales, los que se usan básicamente para contar, son el 1, el 2, el 3, etc.



## 6. Representación gráfica de los conjuntos numéricos



Una de las propiedades más importantes de los números reales es la de poderlos representar por puntos de una línea recta; es decir, que cada punto de una recta represente un número real único y que cada número real este representado por un punto único. Esta recta se llama **recta numérica**. Recordemos que una **recta** es una **línea de una sola dimensión** que está compuesta por una sucesión infinita de puntos.

Así entonces es posible establecer una correspondencia entre los conjuntos numéricos y los puntos de la recta numérica de la siguiente manera:

Dada una recta, se selecciona un punto arbitrario de ésta para representar el cero (0) y otro punto a la derecha del cero para representar el uno (1), a este segmento se le denomina segmento **unidad**. Luego dividimos toda la recta en segmentos que tengan la misma longitud que el segmento unidad, para así representar los números 1, 2, 3, 4,... (en este orden) que se encontrarán a la derecha del cero. En una recta numérica el punto que representa el cero recibe el nombre de **origen**.

Lo habitual es que se divida la recta numérica en dos partes: hacia la izquierda del origen, los números negativos. Hacia la derecha del origen, se escriben los números positivos.

Es importante que entre cada punto se mantenga la distancia igual ya que entre cada número entero existe una unidad de diferencia. Una recta numérica puede extenderse indefinidamente en ambas direcciones.



De esta manera, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta. Esto es, a cada número real le corresponde sólo un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde sólo un número real.

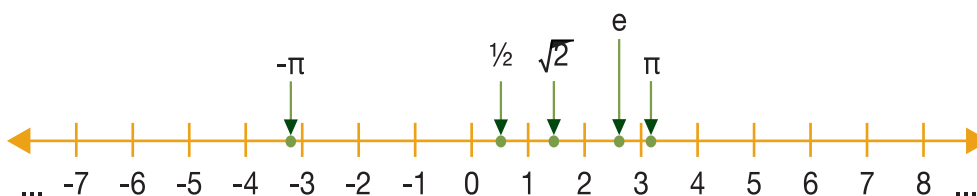


### Ejemplo

Localizar en la recta numérica los siguientes números reales, aproximando a un decimal cuando se requiera:

$$-\pi, \pi, \sqrt{2}, 1/2, e = 2.718...$$

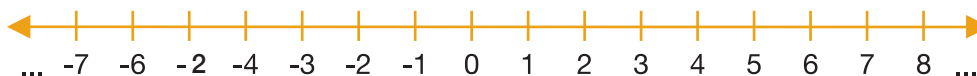
### Solución



### Ejercicio Módulo 1

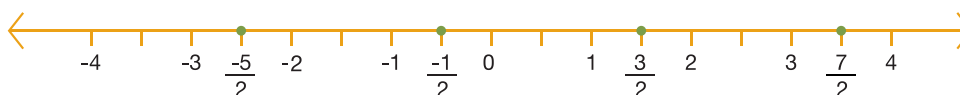
Localizar en la recta numérica los siguientes números reales, aproximando a un decimal cuando se requiera:

$$= 7, 0.8, \sqrt{5}, 4/3, 6$$



Para los números racionales conviene representarlos preferentemente por medio de fracciones en las cuales el denominador es un número entero positivo.

Por ejemplo, si se divide en dos partes iguales cada segmento unidad en la recta numérica, podemos representar los números racionales cuya representación fraccionaria tiene como denominador 2, como se muestra a continuación.



De igual manera, si se divide en tres partes iguales cada segmento unidad en la recta, podemos representar los números racionales cuya representación fraccionaria tiene como denominador 3, como se observa en la siguiente recta:



## 7. Relaciones de orden en los números reales

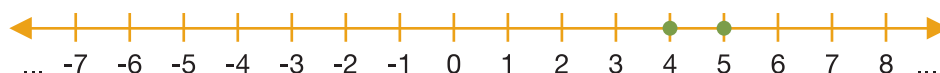
Para contar siempre llevamos un orden; 1 siempre va antes del 2, el 3 viene después, luego el 4, etc. La correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números reales y los puntos de la recta numérica permite representar geométricamente la relación de orden de los números reales. La manera de determinar si un número es mayor o menor que otro, depende del lugar que ocupe en la recta numérica, como se explica a continuación.

### 7.1 Mayor que ( $>$ ) o mayor o igual que ( $\geq$ )

Respecto a la recta numérica, se tiene que un número  $a$  es mayor que otro número  $b$  si el número  $a$  se ubica a la derecha de  $b$  y está más alejado del origen.

¿Cómo simbolizamos si un número es mayor que otro?

Utilizamos el símbolo  $>$  para indicar que un número es mayor que otro. Por ejemplo, el número 5 es mayor que el número 4 y lo representamos de la siguiente forma:  $5 > 4$ .



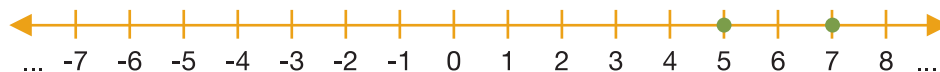
Al observar la recta anterior, se aprecia que el número 5 está ubicado a la derecha del número 4 y, además, está más alejado del cero. Por lo tanto, se establece que el número 5 es mayor que el número 4.

### 7.2 Menor que ( $<$ ) o menor o igual que ( $\leq$ )

Un número  $a$  es menor que otro número  $b$  si  $a$  se localiza a la izquierda de  $b$  en la recta numérica, es decir está más cerca del origen.

¿Cómo se simboliza que un número es menor que otro?

Se utiliza el símbolo  $<$  para indicar que un número es menor que otro. Por ejemplo, el número 5 es menor que el número 7, y lo representamos de la siguiente forma:  $5 < 7$ .



Al observar la recta anterior, se aprecia que el número 5 está ubicado a la izquierda del número 7 y, por lo tanto, más cerca del cero. Por esta razón, se dice que el número 5 es menor que el número 7.

Por lo anterior, se establece que sólo una de las expresiones siguientes es verdadera:

$$a > b, \quad a < b \quad \text{o bien} \quad a = b$$

En conjunto estas tres relaciones reciben el nombre de Ley de la Tricotomía.

En los números racionales, se puede establecer el orden de la siguiente manera: dados dos números racionales  $a$  y  $b$  siempre se cumplirá sólo uno de los siguientes tres casos:

I. Los números  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  son iguales si se cumple que  $ad = bc$

II. El número  $\frac{a}{b}$  es mayor que  $\frac{c}{d}$  si se cumple que  $ad > bc$

III. El número  $\frac{a}{b}$  es menor que  $\frac{c}{d}$  si se cumple que  $ad < bc$



Ejemplo

Relacionar los siguientes pares de números, utilizando los símbolos  $<$ ,  $>$ :

|      |    |       |    |       |    |
|------|----|-------|----|-------|----|
| a) 4 | 8  | b) -6 | 0  | c) -2 | -6 |
| d) 7 | -3 | e) -5 | -1 | f) 3  | 0  |

**Solución**

Observando la recta numérica se tiene:

|      |     |    |       |     |    |       |     |    |
|------|-----|----|-------|-----|----|-------|-----|----|
| a) 4 | $<$ | 8  | b) -6 | $<$ | 0  | c) -2 | $>$ | -6 |
| d) 7 | $>$ | -3 | e) -5 | $<$ | -1 | f) 3  | $>$ | 0  |



Ejercicio  
Módulo 1

Relacionar los siguientes pares de números, utilizando los símbolos  $<$ ,  $>$ :

|      |    |       |    |       |    |
|------|----|-------|----|-------|----|
| a) 5 | 7  | b) 6  | 0  | c) -5 | -7 |
| d) 8 | -2 | e) -1 | -3 | f) -4 | 0  |



Ejemplo

Relacionar los siguientes pares de números racionales, utilizando los símbolos  $<$ ,  $>$ :

|                   |                  |                    |   |                  |               |
|-------------------|------------------|--------------------|---|------------------|---------------|
| g) $-\frac{4}{3}$ | $-\frac{13}{11}$ | h) $-\frac{22}{7}$ | 3 | i) 0             | $\frac{1}{3}$ |
| j) -0.8           | -0.25            | k) $-\frac{2}{5}$  | 0 | l) $\frac{3}{5}$ | $\frac{7}{9}$ |

**Solución**

Para los incisos con fracciones se pueden efectuar productos cruzados. Así, en el primer caso se tiene que:

$$(-4)(11) = -44$$

$$(-13)(3) = -39 \text{ por tanto } -44 < -39$$

De aquí que las respuestas queden como se muestra a continuación:

|                                    |                        |                                |
|------------------------------------|------------------------|--------------------------------|
| g) $-\frac{4}{3} < -\frac{13}{11}$ | h) $-\frac{22}{7} < 3$ | i) $0 > -\frac{1}{3}$          |
| j) $-0.8 < -0.25$                  | k) $-\frac{2}{5} < 0$  | l) $\frac{3}{5} < \frac{7}{9}$ |

Relacionar los siguientes pares de números, utilizando los símbolos  $<$ ,  $>$ :

|                  |                 |                   |      |                  |               |
|------------------|-----------------|-------------------|------|------------------|---------------|
| g) $\frac{7}{3}$ | $-\frac{3}{10}$ | h) $\frac{22}{7}$ | 3.25 | i) 0             | $\frac{1}{3}$ |
| j) -0.75         | -0.2            | k) $-\frac{2}{5}$ | 0    | l) $\frac{2}{7}$ | $\frac{9}{7}$ |



## 8. Intervalos

Un **intervalo** es un conjunto de números reales que cumplen con ciertas propiedades de las desigualdades.

Existen dos tipos de intervalos:

**a) Intervalo de longitud finita:** es el conjunto de números reales comprendidos entre dos extremos  $a, b \in \mathbb{R}$ , donde  $a < b$ .

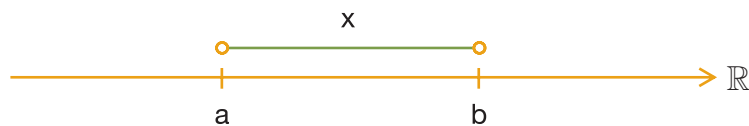
Se clasifican en:

### 8.1 Intervalo abierto

Es aquel que no incluye a los extremos.

Notación:  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$

Gráficamente:

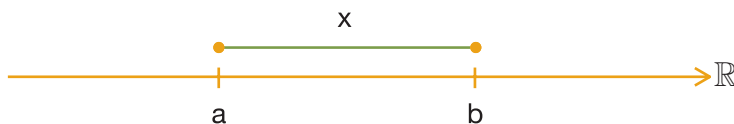


## 8.2 Intervalo cerrado

Es aquel que sí incluye a sus extremos.

Notación:  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$

Gráficamente:

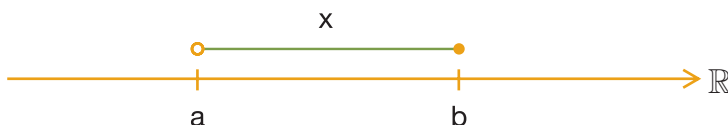


## 8.3 Intervalos mixtos semiabierto o semicerrado

Es aquel que incluye sólo a uno de sus extremos.

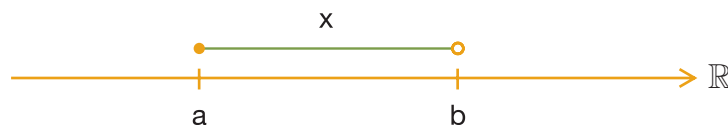
Notación:  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\}$

Gráficamente:



Notación:  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\}$

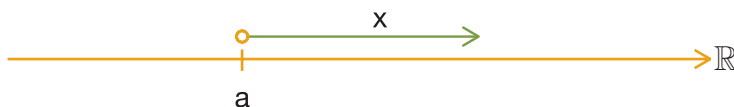
Gráficamente:



**b) Intervalos de longitud infinita:** Es el conjunto de números reales acotados cuando más por un sólo extremo  $a \in \mathbb{R}$ .

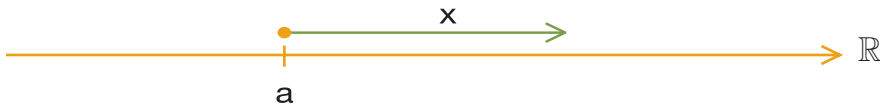
a)  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \wedge x > a\}$

Gráficamente:



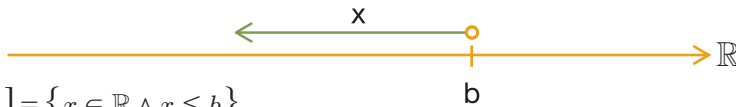
$$b) [a + \infty) = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a\}$$

Gráficamente:



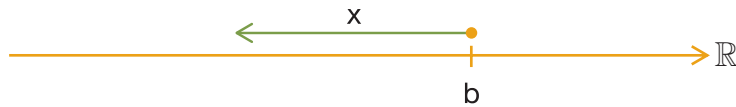
$$c) (-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \wedge x < b\}$$

Gráficamente:



$$d) (-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \leq b\}$$

Gráficamente:



$$e) (-\infty; \infty) = x \in \mathbb{R}$$

Gráficamente:



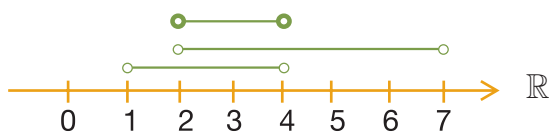
## 8.4 Operaciones con intervalos

Las operaciones que se realizan con intervalos son la unión y la intersección, mismas que se muestran con algunos ejemplos.

Resolver las operaciones indicadas, escribiendo el resultado como intervalos y representarlos sobre una recta numérica.

$$a) (1, 4) \cap (2, 7) = (2, 4)$$

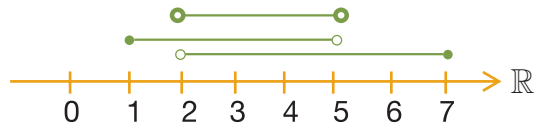
Gráficamente:



Ejemplo

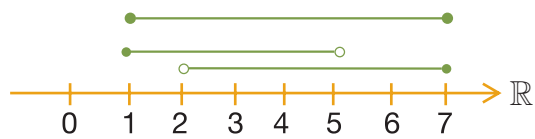
$$b) (2,7] \cap [1,5) = (2,5)$$

Gráficamente:



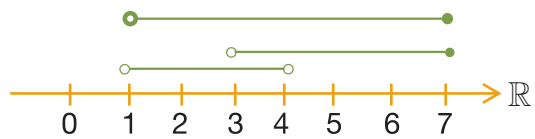
$$c) (2,7] \cup [1,5) = [1,7]$$

Gráficamente:



$$d) (1,4) \cup (3,7] = (1,7]$$

Gráficamente:



**Ejercicio**  
Módulo 1

Resolver las operaciones indicadas, escribiendo el resultado como intervalos y representarlos sobre una recta numérica.

$$a) (2,5] \cup [3,7) =$$

$$b) [-4,2] \cap [-1,4] =$$

c)  $[-3,4) \cup [0,6) =$

d)  $[-1,4] \cap (-3,2) =$

### Valor Absoluto

El valor absoluto de un número real  $x$ , que se denota en la forma  $|x|$  es definido como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Los teoremas más útiles para valor absoluto son:

1.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
2. Si  $b \geq 0$ , entonces  $|x| \leq b$ , si y sólo si  $-b \leq x \leq b$
3. Si  $b > 0$ ,  $|x| \geq b$  si y sólo,  $x \geq b$  o  $x \leq -b$

## 9. Problemas de aplicación

En una encuesta realizada a un grupo de 100 estudiantes del CELE, se obtuvo el siguiente resultado:

- 28 estudiaban francés (F).
- 30 estudiaban alemán (A).
- 42 estudiaban inglés (I).
- 8 estudiaban francés y alemán.
- 10 estudiaban francés e inglés.
- 6 estudiaban alemán e inglés.
- 3 estudiaban alemán, francés e inglés.

Se pregunta:

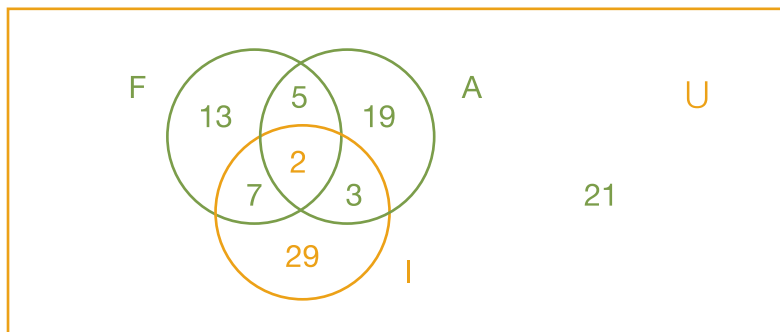
- ¿Cuántos estudiaban inglés como único idioma?
- ¿Cuántos no estudiaban ninguno de los tres idiomas?



**Ejemplo**

### Solución

Para dibujar el diagrama de Venn, se pueden comenzar con los que estudian los tres idiomas. Después, por diferencia de cantidades, es posible determinar los que estudian dos, los que estudian un solo idioma y, finalmente, los que no estudian ninguno de estos tres idiomas quedando de la siguiente manera:



Entonces, de acuerdo con la figura, las respuestas son: Sólo inglés 29 y Ninguno 21

En una encuesta realizada a la población a cerca de cómo se enteran de las noticias se encontró que:

- El 25% escuchando la radio.
- El 18% leyendo algún periódico.
- El 15% viendo el portal de Yahoo!.
- El 9% escuchando la radio y leyendo algún periódico.
- El 3% escuchando la radio y viendo Yahoo!.
- El 8% leyendo algún periódico y viendo Yahoo!.
- El 3% escuchando la radio, leyendo algún periódico y viendo Yahoo!.

Se pregunta:

¿Qué porcentaje de los encuestados no utilizan ninguno de estos medios para enterarse de las noticias?

¿Qué porcentaje de los encuestados se enteran de las noticias por solamente uno de estos medios?

Realizar el diagrama de Venn.



Basado en competencias



Ejercicio  
Módulo 1

## Ejercicios adicionales

Instrucciones: Resolver los siguientes problemas de conjuntos

1. Dados:  $C = \{ \text{Veracruz, Jalisco, Sonora, Estado de México, Colima} \}$   
 $O = \{ \text{Nuevo León, Estado de México, Tamaulipas, Jalisco} \}$   
 $P = \{ \text{Colima, Jalisco, Michoacán, Tamaulipas, Coahuila} \}$

Obtener: a)  $C \cup P$   
 b)  $P \cap O$   
 c)  $(C \cup O) \cap P$   
 d)  $(C \cap O) \cap P$

2. Dados:  $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 \}$   
 $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 15 \}$   
 $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15 \}$   
 $C = \{ 3, 6, 9, 12, 13, 14, 15 \}$

Obtener: a)  $A \cap B$   
 b)  $B \cup C$   
 c)  $(A \cup C) \cap B$   
 d)  $A \cup B$   
 e)  $B \cap C$   
 f)  $(A \cap C) \cup B$   
 g)  $(A \cap B) \cap C$

3. El director de una Preparatoria ha reportado los siguientes datos estadísticos acerca de un grupo de 30 estudiantes:

- 18 toman el curso de Matemáticas
  - 17 toman el curso de Física
  - 11 toman el curso de Administración
  - 12 toman los cursos de Matemáticas y Física
  - 7 toman los cursos de Matemáticas y Administración
  - 5 toman los cursos de Física y Administración
  - 2 toman los cursos de Matemáticas, Administración y Física
- ¿Cuántos estudiantes toman Administración pero no toman Matemáticas?  
 ¿Cuántos no estudian ninguno de los tres cursos mencionados?

4. Cierta número de medallas de oro, plata y bronce es distribuido entre 100 atletas que participaron en los juegos deportivos universitarios. Se sabe que 45 atletas reciben medalla de oro, 45 reciben medalla de plata, 60 atletas reciben medalla de bronce, 15 tanto de oro como de plata, 25 atletas reciben medallas de plata y bronce, 20 tanto de oro y bronce, y 5 reciben de oro, plata y bronce. ¿Cuántos atletas no ganaron ninguna medalla?

5. En una encuesta realizada a alumnos de primer semestre se determinó que: 68 se portan bien; 160 hablan mucho; 138 son inteligentes; 55 hablan mucho y se portan bien; 48 se portan bien y son inteligentes; 120 hablan mucho y son inteligentes; y 40 hablan mucho, son inteligentes y se portan bien. ¿Cuántos son inteligentes solamente?

6. Dados:  $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{a, c, e, g\}$$

$$C = \{b, e, f, g\}$$

Obtener: a)  $A \cup C$

b)  $B \cap A$

c)  $B^c \cup C$

d)  $C^c \cap A$

7. Relacionar los siguientes pares de números reales, utilizando los símbolos  $<$ ,  $>$ .

|                  |               |      |               |                     |                 |
|------------------|---------------|------|---------------|---------------------|-----------------|
| a) $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{6}$ | b) 0 | $\frac{1}{3}$ | c) 4.8              | 3.25            |
| d) -0.8          | -1.25         | e) 5 | 1             | f) $-\frac{11}{10}$ | $-\frac{4}{11}$ |

8. Representar los siguientes números reales en la recta numérica.

$$\sqrt{8}, -\sqrt{8}, \frac{\pi}{\sqrt{5}}, -\sqrt{7}$$



$$\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0$$



$$-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{4}$$



$$3.2, -1.2, -3.2$$



$$-100, 300, -400, 800$$



$$-0.4, 0.8, 0.5, -0.6$$



9. Resolver la operación indicada, escribiendo el resultado como intervalo y realizar la representación sobre una recta numérica.

a)  $(0,4) \cap (1,3)$

b)  $(-2,5) \cap (-4,3)$

c)  $(1,7) \cap (-1,4)$

d)  $(1,5) \cap (3,7)$

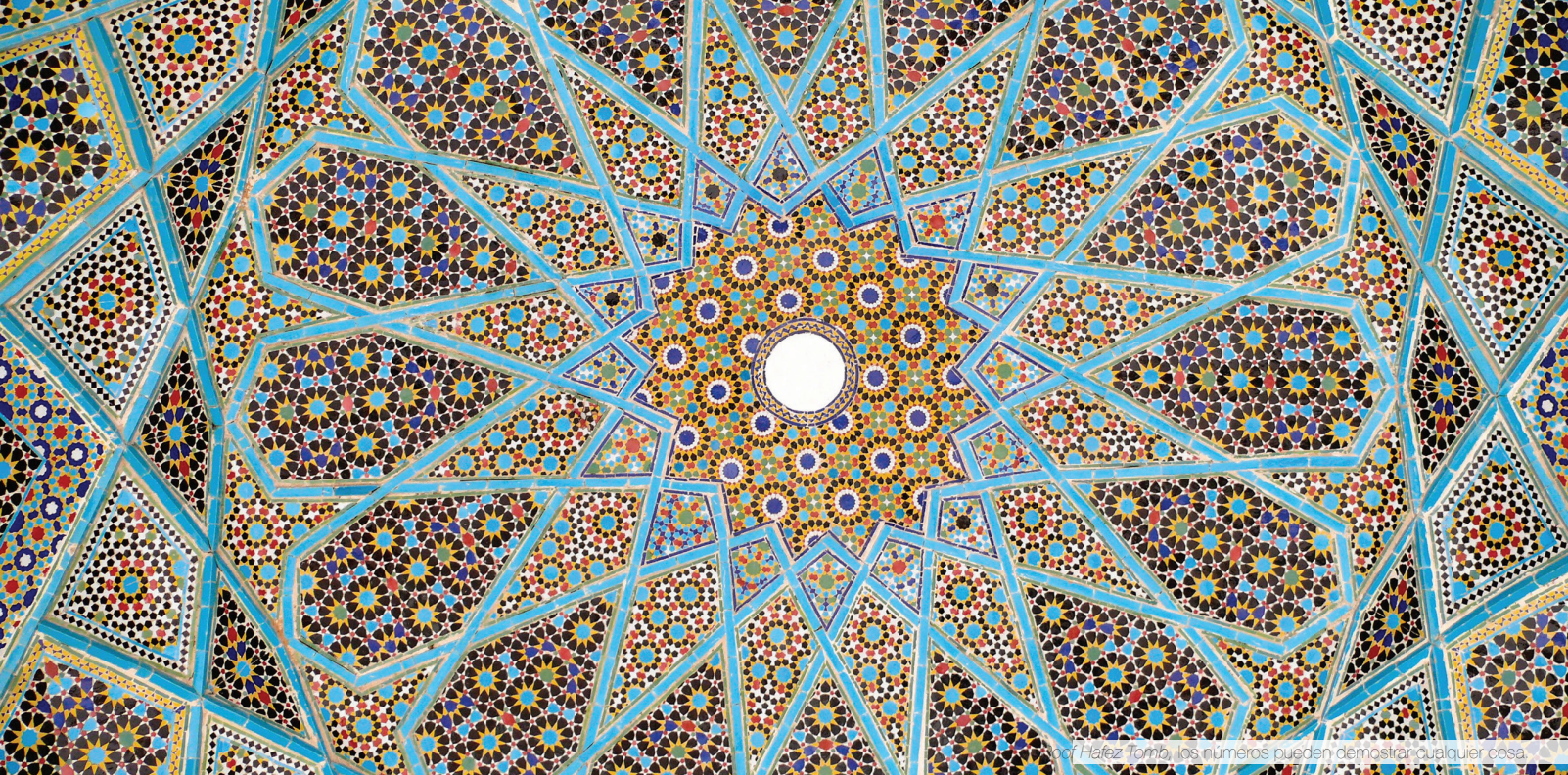
e)  $[-1;3) \cup (0;4]$

f)  $(-1;7] \cup [-4;5)$

## Respuestas

1. a)  $\{Veracruz, Jalisco, Sonora, Estado de México, Colima, Michoacán, Tamaulipas\}$   
 b)  $\{Jalisco, Tamaulipas\}$   
 c)  $\{Jalisco, Colima, Tamaulipas\}$   
 d)  $\{Jalisco\}$
2. a)  $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 15\} \{15\}$   
 b)  $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15\}$   
 c)  $\{3, 9, 15\}$   
 d)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15\}$   
 e)  $\{3, 9, 15\}$   
 f)  $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 15\}$   
 g)  $\{15\}$
3. Administración y no Matemáticas: 4  
 Ningún curso: 6
4. Atletas: 5
5. Inteligentes: 10
6. a)  $A \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$   
 b)  $B \cap A = \{a, c, e\}$   
 c)  $B^C \cup C = \{b, d, f, e, g\}$   
 d)  $C^C \cap A = \{a, c, d\}$
7. a)  $<$  b)  $<$  c)  $>$  d)  $>$  e)  $>$  f)  $>$
- 8.
9. a)  $(1, 3)$   
 b)  $(-2, 3)$   
 c)  $(1, 4)$   
 d)  $(3, 5)$   
 e)  $[-1, 4]$   
 f)  $[-4, 7]$





# Módulo 2

## Operaciones con números



### Competencias genéricas y atributos<sup>1</sup>

- 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos empleando medios, códigos y herramientas apropiados.
  - 4.1. Expresa ideas y conceptos por medio de representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
  - 4.5. Utiliza las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) para obtener información y expresar ideas.
- 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
  - 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva; comprende como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
  - 8.1. Propone maneras de resolver un problema o desarrollar proyectos en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

<sup>1</sup>Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).



## Competencias disciplinares básicas y extendidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Interpreta y explica los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

### 1. Números naturales

Como se explicó en el primer módulo, los números naturales se representan como:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Éstos se pueden sumar, multiplicar y el resultado será, siempre, otro número natural. Por otro lado, esto no ocurre con la resta y la división, porque no siempre el resultado es un número natural.

#### 1.1 Propiedades y operaciones

##### Adición

Para sumar números naturales  $a$  y  $b$ , se emplean las siguientes propiedades:

| Propiedades |                             |
|-------------|-----------------------------|
| Cerradura   | $a + b \in \mathbb{N}$      |
| Asociativa  | $(a + b) + c = a + (b + c)$ |
| Conmutativa | $a + b = b + a$             |



**Ejemplo**

$$4 + 7 = 11 \in \mathbb{N}$$

Cerradura

$$3 + 4 + 5 = \left\{ \begin{array}{l} (3 + 4) + 5 = 7 + 5 = 12 \\ 3 + (4 + 5) = 3 + 9 = 12 \end{array} \right\}$$

Asociativa

$$9 + 8 = 17 = 8 + 9$$

Conmutativa



**Ejercicio**  
Módulo 2

Completa las propiedades que se indican:

$$8 + 9 = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{Cerradura}$$

$$(5 + 9) + 7 = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{Asociativa}$$

$$12 + 15 = 15 + \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{Conmutativa}$$

## Multiplicación

Para multiplicar números naturales  $a$ ,  $b$  y  $c$ , se emplean las siguientes propiedades:

| Propiedades                    |                                             |
|--------------------------------|---------------------------------------------|
| Cerradura                      | $a \cdot b \in \mathbb{N}$                  |
| Asociativa                     | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ |
| Conmutativa                    | $a \cdot b = b \cdot a$                     |
| Elemento neutro o idéntico (1) | $a \cdot 1 = a$                             |
| Distributiva                   | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$   |

$$3 \cdot 4 \cdot 5 = \left\{ \begin{array}{l} (3 \cdot 4) \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60 \\ 3 \cdot (4 \cdot 5) = 3 \cdot 20 = 60 \end{array} \right\} \quad \text{Asociativa}$$

$$9 \cdot 8 = 72 = 8 \cdot 9 \quad \text{Conmutativa}$$

$$15 \cdot 1 = 15 \quad \text{Elemento neutro de la multiplicación}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14 \\ 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14 \end{array} \right\} \quad \text{Distributiva}$$

Completa las propiedades que se indican.

$$12 \cdot 8 = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{Cerradura}$$

$$5(2 \cdot 9) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{Asociativa}$$

$$6 \cdot 4 = 4 \cdot \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{Conmutativa}$$

$$24 \cdot 1 \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{Idéntico}$$

$$1 \cdot 17 \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{Idéntico}$$

$$5(3 + 7) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{Distributiva}$$

Al presentarse combinación de sumas, multiplicaciones y paréntesis, primero se realizan las operaciones que estén entre paréntesis, después las multiplicaciones y al final las sumas.

Realizar la siguiente operación con números naturales.

$$\begin{aligned} (12 + 25)3 + 8(5 + 2) + 11(8 + 3) &= (37)3 + 8(7) + 11(11) \\ &= 111 + 56 + 121 \\ &= 288 \end{aligned}$$



**Ejemplo**



**Ejercicio**  
Módulo 2



**Ejemplo**



**Ejercicio**  
Módulo 2

Realizar la siguiente operación con número naturales.

$$5(8 + 4) + (7 + 6)2 + 12 =$$

**Respuesta**

98

## Potenciación

La potencia de un número natural no es sino una multiplicación reiterada.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n - \text{veces}}, \text{ siendo } .$$

Al número  $a$  se le denomina base de la potencia, mientras que a  $n$  se le denomina exponente de la potencia.



**Ejemplo**

Calcular las siguientes potencias.

$$2^5$$

$$4^1$$

$$3^4$$

**Solución**

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$4^1 = 4$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$



**Ejercicio**  
Módulo 2

Calcular las siguientes potencias.

$$3^4 =$$

$$7^3 =$$

$$5^2 =$$

## 2. Números enteros

Recuérdese que el conjunto de números enteros adquiere la forma:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Es decir los naturales, sus opuestos negativos y el cero, se dividen en tres partes: enteros positivos (o números naturales), enteros negativos y cero.

Dado que los enteros contienen los enteros positivos, se considera a los números naturales como subconjunto de los enteros. ( $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ )

### 2.1 Propiedades y operaciones

#### Adición

Antes de presentar las propiedades, se explicará cómo sumar dos números enteros.

Si los sumandos poseen el mismo signo, se suman los valores absolutos y al resultado se le atribuye el signo común.

---


$$3 + 5 = 8$$

$$(-3) + (-5) = -8$$



**Ejemplo**

---


$$7 + 12 =$$

$$-7 - 12 =$$



**Ejercicio**  
Módulo 2

Si los sumandos poseen signo distinto, se restan los valores absolutos (al mayor se le resta el menor) y al resultado se le atribuye el signo del número con mayor valor absoluto.

---


$$-3 + 5 = 2$$

$$3 + (-5) = -2$$



**Ejemplo**

---


$$-6 + 9 =$$

$$6 - 9 =$$



**Ejercicio**  
Módulo 2

Propiedades de la adición de números enteros

| Propiedades     |                             |
|-----------------|-----------------------------|
| Cerradura       | $a + b \in \mathbb{N}$      |
| Asociativa      | $(a + b) + c = a + (b + c)$ |
| Conmutativa     | $a + b = b + a$             |
| Elemento neutro | $a + 0 = a$                 |
| Inverso aditivo | $a + (-a) = 0$              |

De Cerradura: el resultado al sumar dos números enteros es otro número entero, como se observa.

$$3 + (-5) = -2$$

Asociativa: el orden de agrupación para los sumandos no altera el resultado, como se observa.

$$(2 + 3) + (-5) = 2 + [3 + (-5)]$$

$$5 - 5 = 2 + (-2)$$

$$0 = 0$$

Conmutativa: el orden de los sumandos no altera la suma, como se observa.

$$2 + (-5) = (-5) + 2$$

$$-3 = -3$$

Elemento neutro aditivo: el cero es el elemento neutro de la suma, porque todo número sumado con él da como resultado el mismo número, como se observa.

$$(-5) + 0 = -5$$

Inverso aditivo: dos números son opuestos si, al sumarlos, se obtiene como resultado cero, como se observa.

$$5 + (-5) = 0$$

El inverso del inverso de un número es igual al mismo número, como se observa.

$$-(-5) = 5$$

## Sustracción de números enteros

La sustracción se obtiene restando al minuendo el sustraendo considerando las reglas de los signos.

$$7 - 5 = 2$$

$$7 - (-5) = 7 + 5 = 12$$



Ejemplo



$$8 - 3 =$$

$$3 - 8 =$$

$$8 - (-3) =$$

$$-10 - 7 =$$



## Propiedades de la sustracción de números enteros

Cerradura: de la resta de dos números enteros se obtiene otro número entero.

$$10 - (-5) = 10 + 5 = 15$$



$$15 - (-7) =$$



No conmutativa: el orden de los números sustraídos altera el resultado de la resta.

$$5 - 2 \neq 2 - 5$$

$$3 \neq -3$$



$$12 - 4 \neq 4 - 12$$

$$8 \neq -8$$



## Multiplicación

Al multiplicar varios números enteros, el resultado es otro número entero que tiene como valor absoluto el producto de los valores absolutos y cuyo signo se obtiene al aplicar regla de signos.

Propiedades de la multiplicación de números enteros

| Propiedades |                                                  |
|-------------|--------------------------------------------------|
| Cerradura   | $a \cdot b \in \mathbb{E} \text{ o } \mathbb{Z}$ |
| Asociativa  | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$      |
| Conmutativa | $a \cdot b = b \cdot a$                          |

|                        |                                           |
|------------------------|-------------------------------------------|
| Elemento neutro        | $a \cdot 1 = a$                           |
| Distributiva           | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ |
| Inverso multiplicativo | $\frac{1}{a} \cdot a = 1$                 |

De Cerradura: el resultado al multiplicar dos números enteros es otro número entero, como se observa.

$$(2)(-5) = -10$$

Asociativa: el orden de agrupación de factores no altera el resultado, si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números enteros cualesquiera, como se observa.

$$\begin{aligned} (2 \cdot 3)(-5) &= (2)(3 \cdot (-5)) \\ (6)(-5) &= (2)(-15) \\ -30 &= -30 \end{aligned}$$

Conmutativa: el orden de los factores no altera el producto, como se observa.

$$\begin{aligned} (2)(-5) &= (-5)(2) \\ -10 &= -10 \end{aligned}$$

Elemento neutro multiplicativo: el número 1 es el elemento neutro de la multiplicación porque todo número multiplicado por él da el mismo número, como se observa.

$$(-5)(1) = -5$$

Distributiva: el producto de un número por adición es igual a la suma de los productos de dicho número, por cada uno de los sumandos, como se observa.

$$\begin{aligned} (-2)(3 + 5) &= (-2)(3) + (-2)(5) \\ (-2)(8) &= -6 - 10 \\ -16 &= -16 \end{aligned}$$

Inverso multiplicativo: el número  $1/a$  es el inverso multiplicativo, porque todo número multiplicado por él da 1 como resultado, como se observa.

$$(2)(1/2) = 1$$

### 3. Leyes de los signos

Regla de signos para multiplicación:

$$\begin{aligned} (+)(+) &= + \\ (-)(+) &= - \\ (+)(-) &= - \\ (-)(-) &= + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}(4)(5) &= 20 \\ (-4)(-5) &= 20 \\ (-4)(5) &= -20 \\ (4)(-5) &= -20\end{aligned}$$

**Ejemplo**

Multiplica usando las reglas de los signos.

$$\begin{aligned}(7)(-3) &= \\ (-2)(15) &= \\ (-6)(-8) &= \\ (7)(9) &= \end{aligned}$$

**Ejercicio**  
Módulo 2

Regla de los signos para la división:

$$\begin{aligned}(+) / (+) &= + \\ (-) / (+) &= - \\ (+) / (-) &= - \\ (-) / (-) &= +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10 / 5 &= 2 \\ (-10) / (-5) &= 2 \\ 10 / (-5) &= -2 \\ (-10) / 5 &= -2\end{aligned}$$

**Ejemplo**

Divide usando las reglas de los signos.

$$\begin{aligned}-12 / 3 &= \\ (20) / (-5) &= \\ (-9) / (-3) &= \\ / 5 &= -2\end{aligned}$$

**Ejercicio**  
Módulo 2

Efectuar las siguientes operaciones.

$$\begin{aligned}(2 + 5) 32 + 8 (-5) (2) + 2 (8 + 3) &= \\ (-3)(-2) + 5 - (4)2 - 6 (-3) (2) + 3 (2 + 5) &= \end{aligned}$$

**Ejercicio**  
Módulo 2

## Potenciación

La potencia de un número entero es otro número entero, cuyo valor absoluto es el valor absoluto de la potencia y su signo es el deducido por la aplicación de las siguientes reglas:

1. Las potencias de exponente par son siempre positivas.
2. Las potencias de exponente impar siempre poseerán el signo de la base.

Propiedades de la potencia de números enteros.

Las propiedades de potenciación de números enteros son las mismas que se aplican en números naturales.



**Ejemplo**

Efectuar la siguiente operación.

$$\begin{aligned} &3^3 + 6 + (5) (3)^2 + 4 - (5) (-2)^3 - 2 + (2) (5)^2 - 16 \\ &27 + 6 + 45 + 4 + 40 - 2 + 50 - 16 \\ &172 - 18 \\ &= 154 \end{aligned}$$



**Ejercicio**  
Módulo 2

Efectuar la siguiente operación.

$$2^3 + 10 + (2) (6)^2 + 4 - (2) (3)^3 - 6 + (2) (10)^2 - 50 =$$

## 4. Signos de agrupación y jerarquía de operaciones

Para llevar a cabo operaciones combinadas de adición y sustracción sin paréntesis, se comienza de izquierda a derecha y se resuelven según el orden en el que se presentan.



**Ejemplo**

$$9 - 7 + 5 + 2 - 6 + 8 - 4$$

Comenzando por la izquierda, se efectúan las operaciones según se presentan.

$$9 - 7 + 5 + 2 - 6 + 8 - 4 = 7$$



**Ejercicio**  
Módulo 2

Efectuar la siguiente operación.

$$10 - 3 + 45 + 1 - 16 + 8 - 12 =$$

Para llevar a cabo operaciones combinadas de adición, sustracción y multiplicación se efectúan, en primer lugar, multiplicaciones y, posteriormente, las sumas y restas.



**Ejemplo**

$$(3) (2) - 5 + (4) (3) - 8 + (5) (2) =$$

Se realizan, primero, los productos por jerarquía.

$$6 - 5 + 12 - 8 + 10$$

Se efectúan sumas y restas.  
= 15

Efectuar la siguiente operación.

$$(-4)(2)(-5) + 3 + (-2)(8) - 3 + (-3)(4) =$$



**Ejercicio**  
Módulo 2

Para llevar a cabo operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división se efectúan, primero, multiplicaciones y divisiones. Posteriormente, se realizan sumas y restas.

$$(10/2) + (5)(3) + 4 - (5)(2) - 8 + (4)(2) - 16/4 =$$

Se realizan productos y cocientes según en el orden en que se presentan, pues las dos operaciones comparten la misma prioridad.

$$5 + 15 + 4 - 10 - 8 + 8 - 4$$

Se efectúan sumas y restas.

$$= 10$$



**Ejemplo**

Efectuar la siguiente operación.

$$(12/4) + (4)(2) + 3 - (-5)(3) - 3 + (3)(5) - (15/-3) =$$



**Ejercicio**  
Módulo 2

Para llevar a cabo operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación, división y potencias. En primer lugar, se efectúan las potencias y las divisiones; después, se resuelven las multiplicaciones y las divisiones; por último, se realizan las sumas y restas.

$$2^3 + (10/2) + (5)(3) + 4 - (5)(2) - 8 + (4)(2)^2 - (16/4)$$

Se realizan, primero, las potencias por tener mayor prioridad.

$$8 + (10/2) + (5)(3) + 4 - (5)(2) - 8 + (4)(4) - (16/4)$$

Se continúa con productos y cocientes.

$$8 + 5 + 15 + 4 - 10 - 8 + 16 - 4$$

Se efectúan sumas y restas.

$$= 26$$



**Ejemplo**



**Ejercicio**  
Módulo 2

Efectuar la siguiente operación.

$$2^4 + (25/5) + (4) (-2) + 4 - (-3) (2) - 3 + (3) (2)^2 - (32/4) =$$

Para llevar a cabo operaciones combinadas con paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { }, se realiza el siguiente proceso:

- Se efectúan las operaciones entre paréntesis, corchetes, llaves y vínculo o barra.
- Se calculan potencias y raíces.
- Se efectúan productos y cocientes.
- Se realizan sumas y restas.



**Ejemplo**

$$[15 - (2^3 - 10/2)] [5 + ((3) (2) - 4)] - 3 + (8 - (2) (3))$$

Primero, se operan potencias, productos y cocientes entre paréntesis.

$$[15 - (8 - 5)] [5 + (6 - 4)] - 3 + (8 - 6)$$

Se realizan sumas y restas parentéticas.

$$[15 - 3] [5 + 2] - 3 + 2$$

Se operan los corchetes.

$$(12) (7) - 3 + 2$$

Se multiplica.

$$84 - 3 + 2$$

Se resuelven sumas y restas.

$$= 83$$



**Ejercicio**  
Módulo 2

Efectuar la siguiente operación.

$$[10 - (5 - 16/2)] [3 + ((-2) (4) - 4)] - 2 + (6 - (-3) (5)) =$$



$$[9 - ((5 - 3) - 10)] [6 - ((-2) (4) - 2)] - 5 + 6 - (-10) (2) =$$

Esta operación equivale a:

$$\begin{aligned} &= [9 - ((2) - 10)] [6 - (-8 - 2)] - 5 + 6 + 20 \\ &= [9 - (-8)] [6 - (-10)] - 5 + 6 + 20 \\ &= [9 + 8] [6 + 10] - 5 + 6 + 20 \\ &= [17] [16] + 1 + 20 \\ &\quad \quad \quad 272 \quad + \quad 21 \\ &= 293 \end{aligned}$$

Efectuar la siguiente operación.

$$[12 - (10 - 2) + 7] [3 - (-5) (3) - 4] - 10 + 2 - (-23) (2) - 6 =$$



**Ejemplo**



**Ejercicio**  
Módulo 2

Completar las siguientes expresiones, escribiendo en el paréntesis el número que corresponda y la propiedad que se aplica.

$$9 + ( \quad ) = 3 \quad \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\left( -\frac{5}{6} \right) ( \quad ) = 1 \quad \underline{\hspace{10cm}}$$

$$2 + ( \quad ) = 0 \quad \underline{\hspace{10cm}}$$

$$( \quad ) + [4 + 3] = 7 \quad \underline{\hspace{10cm}}$$

$$( \quad ) (1) = \frac{7}{5} \quad \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\left( \frac{3}{2} \right) [ \quad + \quad ] = 3 + 6 \quad \underline{\hspace{10cm}}$$

$$(3.5) ( \quad ) = 7 \mathbb{E} \quad \underline{\hspace{10cm}}$$



**Ejercicio**  
Módulo 2

$$\left(\frac{3}{4}\right) + (\quad) = \frac{7}{2} + \frac{3}{4} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1000[(2000)(3000)] = [(\quad)(\quad)](3000) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(0.25)(\quad) = (0.3)(0.25) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left[\frac{1}{2} + 2\right] + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + [\quad] \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

## Ejercicios adicionales

Resolver las siguientes operaciones con números enteros:

a)  $30 + 13 + 7 - 10 - 18 + 8 - 40 =$

b)  $(4)(6) - 15 + (2)(3) - 9 + (5)(3) =$

c)  $[150 - (23 - 3)][2 + ((5)(2) - 2)] - 13 + (4 - (5)(2)) =$

d)  $3^3 + 50/10 + (3)(-2) + 3 - (-2)(5) - 4 + (3)(2)^2 - 32/16 =$

e)  $(-5)(4)(-10) + 5 + (-4)(6) - 2 + (-5)(2) =$

f)  $[16 - (10 - 8) + 7][9 - (-3)(2) - 11] - 10 + 3 - (-4)(2) - 10 =$

g)  $5^3 + 20/4 + (12)(-12) + 56 - (-12)(5) - 40 + (9)(3)^2 - 120/3 =$

h)  $[210 - (30 - 28 + 67)][45 - (-30)(2) - 10] - 100 + 8 - (-7)(7) - 2 =$

## 5. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

### Múltiplo

Los múltiplos de un número son aquellos que se obtienen al multiplicarlo por los números naturales.



**Ejemplo**

Los múltiplos de 3 son 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, etc.

Los múltiplos de 2 son 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, etc.

## Múltiplo común

Si se escriben los múltiplos de dos números diferentes, por ejemplo del 4 y del 5.

Los múltiplos de 4 son 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, etc.

Los múltiplos de 5 son 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, etc.

Se observa que los números 20 y 40 aparecen en los múltiplos del 4 y del 5, por lo que a estos números se les llama múltiplos comunes de 4 y 5 (también 60, 80, etc.).

## Mínimo común múltiplo (mcm)

Es el menor de los múltiplos comunes de dos o más números.

Según el ejemplo anterior, el menor de los múltiplos comunes es el número 20. Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de 4 y 5 es 20.

---

Calcular el mínimo común múltiplo de los números 3 y 5



**Ejercicio**  
Módulo 2

## Divisor

Un número es divisor de otro si, al dividir éste entre aquel, el cociente es un entero.

Por ejemplo: 2 es divisor de 14 porque  $14/2 = 7$

---

Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12



**Ejemplo**

## Máximo común divisor (mcd)

Es el mayor número por el que se pueden dividir dos o más números.

---

Los divisores de los números 12 y 30 son:

De 12: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

De 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30.



**Ejemplo**

## Solución

Observando los divisores comunes son 1, 2, 3 y 6.

Por tanto el máximo común divisor es 6.

---



### Ejercicio

Módulo 2

Calcular el máximo común divisor de 8 y 12.

## 5.1 Números primos

Son aquellos que sólo tienen dos divisores, el número 1 y el mismo número.



### Ejemplo

(2, 3, 5, ...)

11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 73, 79, 81, 83, 89, 97, etc.

## 5.2 Criterios de divisibilidad: (2, 3, 5)

Criterio de divisibilidad de 2:

Para que un número sea divisible por 2, el dígito de sus unidades debe ser número par o cero.

28, 88, 86, 470, 1422, etc.



### Ejemplo

Criterio de divisibilidad de 3:

Para que un número sea divisible por 3, la suma de sus dígitos debe ser un múltiplo de 3.

9, 27, 111, 999, 4518, etc.



### Ejemplo

Criterio de divisibilidad de 5:

Para que un número sea divisible por 5, el dígito de sus unidades debe ser cero o 5.

10, 20, 55, 115, 220, etc.



### Ejemplo



## 6. Número racional

Recuérdese que los números racionales son todos aquellos que pueden escribirse como fracción, cuyo numerador y denominador son números enteros y éste nunca puede ser cero.

Simbólicamente se escribe como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{a}{b}, \text{ donde } a \wedge b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Se considera que  $b \neq 0$  porque la división entre cero no está definida.

Números racionales:  $\frac{1}{2}, \frac{10}{3}, -\frac{120}{5}, 12, -9, 0$ .

Otra forma de definir a los números racionales es como “el conjunto formado por todos aquellos números cuya parte decimal es finita o infinita periódica”.

Esto se debe a que, al efectuar la división de dos números enteros, siempre se obtiene un número cuya parte decimal es finita o infinita y, cuando la expansión decimal es infinita, es periódica.

Números racionales expresados en forma decimal: 3, 5.5, -0.2222..., 4.15151515..., 6.329.



**Ejemplo**



**Ejemplo**

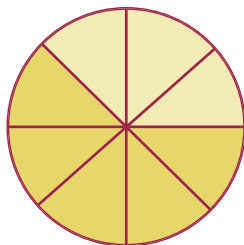
### 6.1 Fracción

La fracción se conforma por dos términos: el numerador y el denominador. El primero indica el número de partes iguales que se han tomado de un entero y el segundo las partes en que se dividió el entero.

La mitad de un pastel, un cuarto de hora, dos tercios de un terreno, etc.

Por ejemplo, la fracción  $\frac{5}{8}$  (cinco octavos) tiene como numerador al 5 y como denominador al 8. El 5 significa que se han considerado 5 partes de un total de 8 partes en que se dividió el entero.

Se tiene un pastel dividido en 8 partes de las cuales se han tomado 5.



**Ejemplo**



**Ejemplo**

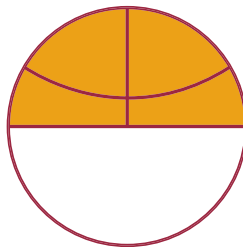
#### Solución

La fracción que representa este dibujo matemáticamente es  $\frac{5}{8}$  (cinco octavos).



Ejemplo

Una pelota dividida en 2 partes.



**Solución**

La fracción que representa este dibujo matemáticamente es  $\frac{1}{2}$  (un medio de la pelota).

## 6.2 Conversión de fracción a decimal

Para transformar un número racional de la forma  $\frac{a}{b}$  a la forma decimal, se realiza la división.

Cuando el cociente no es exacto la parte decimal puede ser:

**Finita**

**Infinita:** tienen una parte decimal periódica que se puede repetir indefinidamente, 10.333333 se puede representar  $10.\overline{3}$ .



Ejemplo

$$\frac{7}{4} = 1.75$$

$$\frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{1}{1000} = 0.001$$

## 6.3 Número mixto

Una fracción propia es aquella en la que el numerador es menor que el denominador.

Los números mixtos son aquellos que se componen por un número entero y una fracción propia.



Ejemplo

$$5\frac{3}{7}$$

$$9\frac{1}{3}$$

$$2\frac{3}{4}$$

## 7. Fracciones equivalentes

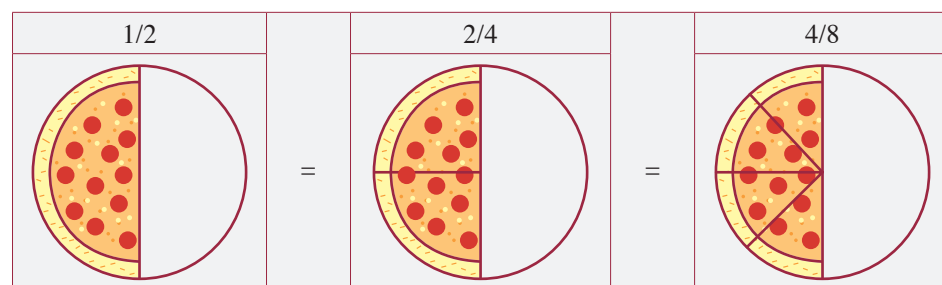
Una fracción es equivalente a otra cuando tienen el mismo valor.

En la fracción  $\frac{a}{b}$  con  $b \neq 0$ ,  $a$  se denomina numerador y  $b$  denominador.

Las fracciones  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{3}{9}$  son fracciones equivalentes, pues tienen el mismo valor.

Al utilizar una fracción, es recomendable utilizar su forma más simple.

Escribir dos fracciones equivalentes.



### Solución

Si multiplicamos la fracción por 2 y la resultante por 2 tenemos:

|   |            |   |            |   |
|---|------------|---|------------|---|
|   | $\times 2$ |   | $\times 2$ |   |
| 1 |            | 2 |            | 4 |
|   | =          |   | =          |   |
| 2 |            | 4 |            | 8 |
|   | $\times 2$ |   | $\times 2$ |   |

Escribir una fracción equivalente a:  $\frac{44}{120}$



**Ejemplo**



**Ejemplo**



**Ejercicio**  
Módulo 2

## 8. Leyes de exponentes

Considerando que  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $m, n \in \mathbb{E}$ , las propiedades de los exponentes son:

| Propiedad                                                      | Nombre                                      |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $a^n a^m = a^{n+m}$                                            | Producto de dos potencias con la misma base |
| $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$                                      | Potencia de potencias                       |
| $(ab)^n = a^n b^n$                                             | Potencia de un producto                     |
| $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ para $a \neq 0$                    | Cociente de dos potencias con la misma base |
| $a^0 = 1$                                                      | Potencia cero (por definición)              |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ para $b \neq 0$ | Potencia de un cociente                     |
| $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para $a \neq 0$                       | Exponente negativo                          |

### 8.1 Exponentes enteros

En la potencia de números enteros, todo número elevado a la potencia cero es 1.

---


$$5^0 = 1$$



**Ejemplo**

En la potencia de números enteros, todo número elevado a la potencia 1 da como resultado el mismo número de la base.

---


$$3^1 = 3$$



**Ejemplo**

Producto de potencias con la misma base: potencia con misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes.

---


$$(3^2) (3^3) = 3^{2+3} = 3^5$$



**Ejemplo**

División de potencias con la misma base: potencia con misma base cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.

---


$$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2}$$



**Ejemplo**

Potencia de una potencia: potencia con misma base cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$(4^2)^3 = 4^{(2) \cdot (3)} = 4^6$$



**Ejemplo**

Producto de potencias con el mismo exponente: potencia con mismo exponente cuya base es el producto de las bases.

$$(2^3) (4^3) = (2 \cdot 4)^3$$



**Ejemplo**

Cociente de potencias con el mismo exponente: potencia con mismo exponente cuya base es el cociente de las bases.

$$\frac{4^2}{2^2} = \left(\frac{4}{2}\right)^2$$



**Ejemplo**

## 8.2 Exponentes racionales

| Notación en radical                                                      | Notación en exponente                                        |
|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $(\sqrt[n]{a})^n$                                                        | $(a)^{\frac{n}{n}} = a$                                      |
| $\sqrt[n]{a}$                                                            | $(a)^{\frac{1}{n}}$                                          |
| $\sqrt[n]{a^m}$                                                          | $(a)^{\frac{m}{n}}$                                          |
| $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$                            | $(a)^{\frac{1}{mn}}$                                         |
| $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ con $b \neq 0$ | $\frac{(a)^{\frac{1}{n}}}{(b)^{\frac{1}{n}}}$ con $b \neq 0$ |

$$(\sqrt{4})^2 = 4^{\frac{2}{2}} = 4$$

$$(\sqrt[3]{5})^3 = 5^{\frac{3}{3}} = 5$$

$$\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = (5)(5) = 25$$

$$\sqrt{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$\sqrt{900} = \sqrt{(9)(100)} = \sqrt{9} \sqrt{100} = \sqrt{3^2} \sqrt{10^2} = (3)^{\frac{2}{2}} (10)^{\frac{2}{2}} = (3)(10) = 30$$



**Ejemplo**

$$\sqrt[3]{(8)(27)} = \sqrt[3]{(2^3)(3^3)} = (2^{\frac{3}{3}})(3^{\frac{3}{3}}) = (2)(3) = 6$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{(2)^2}}{\sqrt{(3)^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{(2)^3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{(2)^2}}{\sqrt{(3)^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{21}} = \sqrt[12]{21} = (21)^{\frac{1}{12}}$$

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = \sqrt{(3)^2} = 3$$

## 8.3 Aplicaciones de leyes de exponentes

### Notación científica

La aplicación de exponentes es muy importante en la vida diaria, dado que se pueden representar, por medio de ellos, cantidades grandes y pequeñas; por ejemplo, cuando se quiere conocer la distancia de un país a otro, de la tierra al sol, la velocidad de la luz, etc.

Al considerar que  $A$  es un número real, su representación en notación científica es considerada como el producto de un número  $a$  multiplicado por 10 elevado al exponente  $n$ , donde  $n$  es un número entero.

Su representación en forma matemática es:

Sí  $A \in R$  entonces  $A = a \times 10^n$ .

La representación de un número real en notación científica se realiza de dos maneras:

1) Cuando  $A > -1$  o  $A > 1$ , el exponente  $n$  es positivo.

Expresar las siguientes cantidades en notación científica.

a)  $278936.236 = 2.7894 \times 10^5$

b)  $563200 = 5.632 \times 10^5$

c)  $896699300000000 = 8.967 \times 10^{14}$

d)  $-423789000000 = -4.238 \times 10^{11}$



**Ejemplo**



Expresar las siguientes cantidades sin notación científica.

- a)  $6.23568 \times 10^5 = 623568$
- b)  $2.632 \times 10^8 = 263200000$
- c)  $1.112 \times 10^{15} = 1112000000000000$
- d)  $-10.69872 \times 10^9 = -10698720000$

Expresar las siguientes cantidades en notación científica.

- a)  $598323.116 =$
- b)  $22690000 =$
- c)  $2336426\ 100\ 000\ 000 =$
- d)  $-598\ 888\ 99\ 33\ 789\ 000\ 000 =$

Expresar las siguientes cantidades sin notación científica.

- a)  $897.122 \times 10^7 =$
- b)  $333892.0149 \times 10^{11} =$
- c)  $56.1126 \times 10^{15} =$
- d)  $-4230.236 \times 10^9 =$

2) Cuando  $A$  esta entre  $-1$  y  $1$ , el exponente  $n$  es negativo.

Expresar las siguientes cantidades en notación científica.

- a)  $0.1236 = 1.236 \times 10^{-1}$
- b)  $0.000982 = 9.82 \times 10^{-4}$
- c)  $0.000000000699 = 6.99 \times 10^{-10}$
- d)  $-0.00000789 = -7.89 \times 10^{-6}$

Expresar las siguientes cantidades sin notación científica.

- a)  $7.6321 \times 10^{-5} = 0.000076321$
- b)  $2.632 \times 10^{-10} = 0.0000000002632$
- c)  $99 \times 10^{-2} = 0.0099$
- d)  $-1.11 \times 10^{-9} = -0.00000000111$



**Ejercicio**  
Módulo 2



**Ejemplo**



Expresar las siguientes cantidades en notación científica.

a)  $0.5987 =$

b)  $0.000333 =$

c)  $0.000\ 000\ 000\ 123 =$

d)  $-0.000\ 001\ 11 =$

Expresar las siguientes cantidades sin notación científica.

a)  $2.1122 \times 10^{-5}$

b)  $9.999 \times 10^{-10}$

c)  $6 \times 10^{-3}$

d)  $-44.4444 \times 10^{-9}$

## 9. Operaciones con números racionales

### 9.1 Propiedades de números racionales

Las propiedades de los números racionales para la adición y sustracción son:

| Propiedad                                                                                                     | Nombre                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$                                                 | Propiedad cerradura        |
| $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) - \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f}\right)$ | Propiedad asociativa       |
| $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$                                                       | Propiedad conmutativa      |
| $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$                                                                               | Elemento neutro o idéntico |
| $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$                                                                               | Inverso aditivo            |

Las propiedades de los números racionales para el producto y el cociente son:

| Propiedad                                                                                                                                                                       | Nombre                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$                                                                                               | Propiedad cerradura para el producto |
| $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$                                                                                                                               | Propiedad cerradura para el cociente |
| $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right)\left(\frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right)\right)$ | Propiedad asociativa                 |
| $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$                                                                           | Propiedad conmutativa                |
| $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right)$                       | Propiedad distributiva               |
| $\left(\frac{a}{b}\right)(1) = \frac{a}{b}$                                                                                                                                     | Elemento neutro o idéntico           |
| $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = 1$                                                                                                                          | Elemento inverso o recíproco         |

## 9.2 Operaciones con números racionales

### Adición

En la adición de dos o más números racionales, se realiza el siguiente método:

1. Para obtener el denominador de la adición y sustracción, se determina el mínimo común múltiplo de los denominadores.
2. Para obtener el numerador, se divide el mínimo común múltiplo entre cada uno de los denominadores y se multiplica ese cociente por el numerador respectivo.
3. Se suman esos productos y finalmente, en caso de ser posible, se simplifica el resultado obtenido.

Realizar la siguiente operación.

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$$

### Solución

Al determinar el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{\quad}{15}$$



**Ejemplo**

Obtenido el mínimo común múltiplo, que es 15, se divide entre 5. El número obtenido se multiplica por 1; nuevamente, 15 se divide entre 3 y el número obtenido se multiplica por 2. Posteriormente, se suman ambas cantidades:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3(1) + 5(2)}{15}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3 + 10}{15}$$

El resultado final es:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}$$



### Ejercicio

Módulo 2

Resolver el siguiente problema.

Un hombre gastó su sueldo de la siguiente manera:  $\frac{1}{5}$  en el pago de su renta,  $\frac{1}{4}$  en el pago de alimentos y  $\frac{1}{8}$  en pagos de diversos servicios. ¿Qué fracción del total de sueldo le quedó después de realizar estos pagos?

- a)  $\frac{17}{40}$
- b)  $\frac{23}{40}$
- c)  $\frac{3}{17}$
- d)  $\frac{14}{17}$

### Solución

- b)  $\frac{23}{40}$

### Sustracción

En la sustracción de dos o más números racionales, se sigue el siguiente método:

1. Para obtener el denominador de la sustracción, se determina el mínimo común múltiplo de los denominadores.
2. Para obtener el numerador, se divide el mínimo común múltiplo entre cada uno de los denominadores y se multiplica ese cociente por el numerador respectivo.
3. Se restan los productos y finalmente, en caso de ser posible, se simplifica el resultado obtenido.



### Ejemplo

Realizar la siguiente operación.

$$\frac{2}{7} - \frac{5}{6}$$

**Solución**

Al determinar el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\frac{2}{7} - \frac{5}{6} = \frac{\quad}{42}$$

Obtenido el mínimo común múltiplo, que es 42, se divide entre 7. El número obtenido se multiplica por 2; nuevamente, 42 se divide entre 6 y el número obtenido se multiplica por 5. Posteriormente, se restan ambas cantidades:

$$\frac{2}{7} - \frac{5}{6} = \frac{6(2) - 7(5)}{42}$$

Simplificando

$$\frac{2}{7} - \frac{5}{6} = \frac{12 - 35}{42}$$

El resultado final es:

$$\frac{2}{7} - \frac{5}{6} = \frac{-23}{42}$$

Resolver el siguiente problema.

De un listón que mide  $\frac{3}{5}$  de metro, Laura utilizó  $\frac{5}{10}$  para hacer un moño. ¿Cuánto listón le sobró?

- a)  $\frac{1}{10}$  de metro
- b)  $\frac{2}{5}$  de metro
- c)  $\frac{8}{5}$  de metro
- d)  $\frac{2}{10}$  de metro

**Solución**

- a)  $\frac{1}{10}$  de metro

**Multiplicación**

Para obtener el numerador del producto en la multiplicación de números racionales, se multiplica numerador por numerador. Para obtener el denominador, se multiplica denominador por denominador.

Realizar la siguiente operación:  $\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$



**Ejercicio**  
Módulo 2



**Ejemplo**

### Solución

Se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador de las fracciones.

$$\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{(6)(1)}{(5)(8)}$$

Simplificando:

$$\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{6}{40}$$



**Ejemplo**

Realizar la siguiente operación:  $\left(\frac{-10}{11}\right)\left(\frac{7}{5}\right)$

### Solución

Se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador de las fracciones.

$$\left(\frac{-10}{11}\right)\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{(-10)(7)}{(11)(5)}$$

Simplificando:

$$\left(\frac{-10}{11}\right)\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{-70}{55} = -\frac{14}{11}$$



**Ejercicio**  
Módulo 2

Resuelve el siguiente problema.

Miguel quiere regalar una bolsa con 15 canicas a cada uno de sus 8 primos. Miguel desea saber cuántas canicas necesita para llenar las bolsas. ¿Cuál de las siguientes operaciones debe resolver?

a)  $15 \times 8$

b)  $\frac{8}{15}$

c)  $15 + 8$

d)  $15 - 8$

### Solución

a)  $15 \times 8$

### División

Para llevar a cabo la división entre dos números racionales, pueden emplearse dos métodos diferentes:

**a) Manejando productos cruzados**

Para obtener el numerador del cociente, se multiplican el numerador del dividendo por el denominador del divisor; para obtener el denominador del cociente, se multiplica el denominador del dividendo por el numerador del divisor.

---

Realizar la división.

$$\frac{3}{7} \div \frac{5}{9}$$

**Solución**

Para determinar el valor del numerador, se multiplica 3 por 9 y, para obtener el valor del denominador, se multiplica 7 por 5:

$$\frac{3}{7} \div \frac{5}{9} = \frac{3(9)}{7(5)}$$

Simplificando

$$\frac{3}{7} \div \frac{5}{9} = \frac{27}{35}$$

**Ejemplo**


---

Realizar la división.

$$\frac{-12}{8} \div \frac{3}{4}$$

**Solución**

Para determinar el valor del numerador, se multiplica -12 por 4 y, para obtener el valor del denominador, se multiplica 8 por 3:

$$\frac{-12}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{-48}{24}$$

Simplificando:

$$\frac{-12}{8} \div \frac{3}{4} = -2$$

**Ejemplo**


---

Realizar la siguiente división.

$$\frac{7}{8} \div \frac{1}{10}$$

**Ejercicio**  
Módulo 2**b) Aplicando el producto de extremos entre el producto de medios**

La división se expresa como una fracción de fracciones. Para determinar el numerador del cociente, se multiplican los extremos; para determinar el denominador, se multiplican los medios.



**Ejemplo**

Realizar la división.

$$\frac{-3}{2} \div \frac{5}{6}$$

**Solución**

Se colocan las fracciones de la siguiente manera:

$$\frac{-3}{2} \div \frac{5}{6} = \frac{\overset{\text{extremo}}{-3}}{\underset{\text{medio}}{2}} = \frac{\underset{\text{medio}}{5}}{\overset{\text{extremo}}{6}}$$

Para determinar el valor del numerador, se multiplican los extremos  $-3$  por  $6$  y, para obtener el valor del denominador, se multiplican los medios  $2$  por  $5$ :

$$\frac{-3}{2} \div \frac{5}{6} = \frac{-3(6)}{2(5)}$$

$$\frac{-3}{2} \div \frac{5}{6} = \frac{-18}{10}$$

Simplificando tanto el numerador como el denominador se obtiene:

$$\frac{-3}{2} \div \frac{5}{6} = \frac{-9(2)}{5(2)}$$

$$\frac{-3}{2} \div \frac{5}{6} = \frac{-9}{5}$$



**Ejemplo**

Realizar la división.

$$\frac{1}{3} \div \frac{9}{21}$$

**Solución**

Se colocan las fracciones de la forma siguiente:

$$\frac{1}{3} \div \frac{9}{21} = \frac{\overset{\text{extremo}}{1}}{\underset{\text{medio}}{3}} = \frac{\underset{\text{medio}}{9}}{\overset{\text{extremo}}{21}}$$

Para determinar el valor del numerador, se multiplican los extremos  $1$  por  $21$  y, para obtener el valor del denominador, se multiplican los medios  $3$  por  $9$ :

$$\frac{1}{3} \div \frac{9}{21} = \frac{1(21)}{3(9)}$$

$$\frac{1}{3} \div \frac{9}{21} = \frac{21}{27}$$

Simplificando tanto el numerador como el denominador se obtiene:

$$\frac{1}{3} \div \frac{9}{21} = \frac{7(3)}{9(3)}$$

$$\frac{1}{3} \div \frac{9}{21} = \frac{7}{9}$$

Realizar la siguiente división.

$$\frac{2}{9} \div \frac{1}{3}$$



Realizar el siguiente problema.

Lia tiene 3.72 metros de listón y va a hacer moños. Para cada moño, necesita 0.5 metros de listón. ¿Cuántos moños puede hacer?

- a. 7.41
- b. 7.42
- c. 7.43
- d. 7.44



### Solución

d. 7.44

### Potenciación

Para la potenciación de un número racional con exponente entero y positivo, se eleva el exponente como el denominador al exponente indicado.

Simbólicamente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ con } b \neq 0$$

Otra forma de expresar la potenciación es:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{(a)(a)(a)\dots(a) \text{ (n veces)}}{(b)(b)(b)\dots(b) \text{ (n veces)}} \text{ con } b \neq 0$$

Realizar la siguiente operación.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3$$



**Solución**

Se multiplica  $\frac{1}{2}$  tres veces, quedando como:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

Simplificando:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$



**Ejemplo**

Realizar la siguiente operación.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

**Solución**

Se multiplica  $\frac{2}{3}$  cinco veces:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

Simplificando:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$



**Ejercicio**  
Módulo 2

Realizar la siguiente operación.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3$$



## Radicación (valores exactos)

### Raíz enésima

Si  $a$  y  $b$  son dos números reales y  $n$  es un número entero positivo, la **raíz enésima** de  $a$  se define:

$$\sqrt[n]{a} = b. \text{ si y sólo si } b^n = a$$

Donde:

$\sqrt[n]{a}$  Es la raíz enésima de  $a$ .

$\sqrt{\phantom{x}}$  Es el radical.

$a$  Es el subradical.

$b$  Es la raíz de  $a$ .

$n$  Es el índice de la raíz.

Si  $n$  es par, entonces  $a \geq 0$

Si  $n$  es impar, entonces  $a \in \mathbb{R}$

Determinar la siguiente raíz.

$$\sqrt{9}$$

#### Solución

$$\sqrt{9} = 3 \text{ porque } (3)^2 = (3)(3) = 9$$



**Ejemplo**

Determinar la siguiente raíz.

$$\sqrt[5]{32}$$

#### Solución

$$\sqrt[5]{32} = 2 \text{ porque } (2)^5 = (2)(2)(2)(2)(2) = 32$$



**Ejemplo**

Determinar la siguiente raíz.

$$\sqrt{\frac{4}{9}}$$

#### Solución

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \text{ porque } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$



**Ejemplo**



### Ejemplo

Determinar la raíz de  $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

### Solución

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3} \text{ porque } \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$$



### Ejemplo

Determinar la siguiente raíz  $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$

### Solución

$$\sqrt[4]{\frac{1}{256}} \text{ porque } \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}$$



### Ejercicio Módulo 2

Determinar la raíz del siguiente número:  $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$



## 10. Operaciones con números reales

### 10.1 Propiedades

La unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales se denomina conjunto de números reales ( $\mathbb{R}$ ).

Las propiedades de los números reales para la adición y sustracción son:

| Propiedad                                             | Nombre                             |
|-------------------------------------------------------|------------------------------------|
| $a + b \in \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$      | Propiedad de cerradura             |
| $a + b = b + a$ con $a, b \in \mathbb{R}$             | Propiedad conmutativa              |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ | Propiedad asociativa               |
| $a + 0 = a$ con $a \in \mathbb{R}$                    | Elemento idéntico o neutro aditivo |
| $a + (-a) = 0$ con $a \in \mathbb{R}$                 | Elemento inverso aditivo           |

Las propiedades de los números racionales para el producto y el cociente son:

| Propiedad                                                              | Nombre                                                                |
|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $a \cdot b \in \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$                   | Propiedad de cerradura                                                |
| $a \cdot b = b \cdot a$ con $a, b \in \mathbb{R}$                      | Propiedad conmutativa                                                 |
| $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$             | Propiedad asociativa                                                  |
| $a \cdot 1 = a$ con $a \in \mathbb{R}$                                 | Elemento neutro multiplicativo                                        |
| $a \left(\frac{1}{a}\right) = 1, a \neq 0$ con $a \in \mathbb{R}$      | Elemento inverso multiplicativo                                       |
| $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ | Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición |

## Adición

Las propiedades de los números reales se aplican como se muestra en los siguientes ejemplos:

| Adición                   | Propiedad       |
|---------------------------|-----------------|
| a) $8+3.1234 = 11.1234$   | Cerradura       |
| b) $3+6 = 6+3$<br>$9 = 9$ | Conmutativa     |
| c) $8+(3+7) = (8+3)+7$    | Asociativa      |
| d) $200 + 0 = 200$        | Neutro aditivo  |
| e) $-56 + 56 = 0$         | Inverso aditivo |



**Ejemplo**

Escribe la propiedad que se aplica en cada inciso.

| Adición               | Propiedad |
|-----------------------|-----------|
| a) $567+1.1234 =$     |           |
| b) $236+45 =45 + 236$ |           |
| c) $31+(20+ 87) =$    |           |
| d) $23.69870+0 =$     |           |
| e) $-789 +789 =$      |           |



**Ejercicio**  
Módulo 2

## Multiplicación



### Ejemplo

| Multiplicación                  | Propiedad              |
|---------------------------------|------------------------|
| a) $(1)(7) = 7$                 | Cerradura              |
| b) $(12)(6) = (6)(12)$          | Conmutativa            |
| c) $(63)(1) = 63$               | Neutro multiplicativo  |
| d) $(9)(2+8) = (9)(2) + (9)(8)$ | Distributiva           |
| e) $(2)(1/2) = 1$               | Inverso multiplicativo |



### Ejercicio Módulo 2

Escribe la propiedad que se aplica en cada inciso.

| Multiplicación             | Propiedad |
|----------------------------|-----------|
| a) $(120)(9.8974) =$       |           |
| b) $(325)(25) = (25)(325)$ |           |
| c) $(-899)(1) =$           |           |
| d) $(40)(9+12) =$          |           |
| e) $(83)(1/83) =$          |           |

## 10.2 Operaciones

I. Calcular el valor de las siguientes expresiones, que combinan las cuatro operaciones fundamentales entre números enteros.

a)  $6 + 16 \div (-2) + 4 \div (-1) - 23 + 4 =$

b)  $4(-2) - 28 \div (-3 - 11) + 4(-1 - 2)(-6+8) - 15 \div (-5) =$

c)  $1 - [(-15 + 1) \div (-1 - 1 - 5)](-2) + 15 \div (-2 - 3) =$

d)  $11 - (4 - 7)(-2) - [-1 + (-5 - 15) \div (-4)](-1) + 5 =$

$$e) 4 + [-5 + 2(-1 - 3) + 6 \div 3] \div (-1 + 2) - (-4) \div 2 =$$

$$f) 6 - [-6 + 40 \div (-1 - 7) - (-6)2] \div (2 - 3) + 6 =$$

II. Calcular el valor de las siguientes expresiones, que combinan las cuatro operaciones fundamentales entre números racionales.

$$a) 2 - \left\{ \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - 1 + \left[ \frac{3}{4} - 3 \left( \frac{7}{3} + 1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{5}{4} \right] + 2 \right\} =$$

$$b) \frac{11}{5} - \frac{1}{3} - \left\{ \frac{2}{5} - \frac{5}{6} - \left[ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \left( \frac{7}{30} + \frac{4}{5} - 1 \right) + \frac{1}{4} \right] \right\} - 1 =$$

$$c) 1 + \frac{4}{5} \left( -\frac{5}{2} \right) 3 + 2 \div \frac{3}{2} - 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \right) =$$

$$d) \frac{\frac{3}{4} \left( 1 - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)} =$$

$$e) \frac{\left( 3 + \frac{2}{7} \right) \div \left( \frac{3}{4} + 5 \right)}{\left( \frac{23}{14} - 1 \right) \div \left( 1 - \frac{9}{14} \right)} =$$

$$f) \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{2} \div \left( 2 - \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{5} \div \left( \frac{5}{2} + \frac{20}{21} - 3 \right)} =$$

$$g) \frac{\left( \frac{4}{3} - \frac{5}{6} \right) \div \frac{2}{3} - 1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{1}{2} \right)} =$$

$$h) \frac{-1 + \frac{3}{5} \div \left(1 - \frac{1}{5}\right)}{\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{3}\right)} \div 3 + 2 =$$

III. Aplicando las propiedades de los exponentes, resolver las siguientes expresiones de números racionales.

$$a) \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 \left(-\frac{4}{3}\right)^4 \left(-\frac{4}{3}\right)^{-10}}{\left(-\frac{4}{3}\right)^{-6}} =$$

$$b) \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^{-8}}{\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3} =$$

$$c) \frac{(-2)^{-2}}{\left(-\frac{4}{5}\right)^6 \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right)^{-8}} - (-3)^0 \div (-1)^{-2} =$$

$$d) \frac{\left(-\frac{5}{3}\right)^8 \div \left(-\frac{5}{3}\right)^{-6}}{1 - 2\sqrt[3]{\frac{26}{27}} - 1} \left(-\frac{3}{5}\right)^{-3} \cap (-5)^0 =$$

IV. Calcular el valor de las siguientes expresiones operando y dando el resultado en número decimal.

$$a) (2.5 + 0.25 - 0.875) \div 0.1875 =$$

$$b) \frac{(0.9 - 1) \div 0.1}{(0.5 - 1)^2} =$$

$$c) \frac{0.75 - (1 - 0.5)^2}{1.5 - (0.5 - 1)^2} =$$

$$d) \frac{2(-0.22) + (-1.2)^2}{0.2^{-2}} - 1 =$$



$$e) (0.2^2 - 0.1^3) \div 0.3 - 0.3^2 + (1.4 - 2)^2 =$$

V. Calcular y convertir expresiones decimales periódicas:

$$a) 0.7999... - 2.3 \div 0.777... =$$

$$b) \frac{(0.5 - \frac{1}{3})(-0.1)}{0.1\bar{6} - \frac{1}{9} \div 2} =$$

$$c) \frac{0.27 + \frac{1}{11} - 0.090}{1.36 - 0.72} =$$

$$d) \frac{0.1030\sqrt{99.\bar{9}} + 0.09(-0.\bar{3})}{0.222... \div 0.2} =$$

$$d) \sqrt{1.19444... (43^{-1})} - \sqrt{1.19444... (43^{-1})} - 0.4999... \div 0.6$$

VI. Transformar a notación científica las siguientes expresiones, realizar las operaciones indicadas y expresar el resultado en forma de notación científica.

$$a) \frac{140000(-0.00003)}{0.0021} =$$

$$b) \frac{0.00000025(-0.0014)}{0.000000035} =$$

$$c) \frac{1450000(-0.000007)}{-0.00029(-2500)} =$$

$$d) \frac{0.000051(-0.004)}{-0.0000006(-170000)} =$$

## Resultados

I. Calcular el valor de las siguientes expresiones, que combinan las cuatro operaciones fundamentales entre números enteros.

$$a) 6 + 16 \div (-2) + 4 \div (-1) - 23 + 4 = -25$$

$$b) 4(-2) - 28 \div (-3 - 11) + 4(-1 - 2) - 6 + 8 - 15 \div (-5) = -27$$

$$c) 1 - [ -(-15 + 1) \div (-1 - 1 - 5) ] (-2) + 15 \div (-2 - 3) = -6$$

$$d) 11 - (4 - 7) (-2) - [ -1 + (-5 - 15) \div (-4) ] (-1) + 5 = 14$$

$$e) 4 + [ -5 + 2(-1 - 3) + 6 \div 3 ] \div (-1 + 2) - (-4) \div 2 = -5$$

$$f) 6 - [ -6 + 40 \div (-1 - 7) - (-6) 2 ] \div (2 - 3) + 6 = 13$$

II. Calcular el valor de las siguientes expresiones, que combinan las cuatro operaciones fundamentales entre números racionales.

$$a) 2 - \left\{ \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - 1 + \left[ \frac{3}{4} - 3 \left( \frac{7}{3} + 1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{5}{4} \right] + 2 \right\} = \frac{53}{6}$$

$$b) \frac{11}{5} - \frac{1}{3} - \left\{ \frac{2}{5} - \frac{5}{6} - \left[ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \left( \frac{7}{30} + \frac{4}{5} - 1 \right) + \frac{1}{4} \right] \right\} - 1 = \frac{53}{30}$$

$$c) 1 + \frac{4}{5} \left( -\frac{5}{2} \right) 3 + 2 \div \frac{3}{2} - 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \right) = -\frac{17}{6}$$

$$d) \frac{\frac{3}{4} \left( 1 - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)} = -\frac{28}{3}$$

$$e) \frac{\left( 3 + \frac{2}{7} \right) \div \left( \frac{3}{4} + 5 \right)}{\left( \frac{23}{14} - 1 \right) \div \left( 1 - \frac{9}{14} \right)} = \frac{20}{63}$$

$$f) \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{2} \div \left( 2 - \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{5} \div \left( \frac{5}{2} + \frac{20}{21} - 3 \right)} = \frac{38}{7}$$

$$g) \frac{\left( \frac{4}{3} - \frac{5}{6} \right) \div \frac{2}{3} - 1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{1}{2} \right)} = -\frac{3}{7}$$

$$h) \frac{-1 + \frac{3}{5} \div \left( 1 - \frac{1}{5} \right)}{\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{1}{3} \right)} \div 3 + 2 = \frac{7}{3}$$



III. Aplicando las propiedades de los exponentes, resolver las siguientes expresiones de números racionales.

$$a) \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 \left(-\frac{4}{3}\right)^4 \left(-\frac{4}{3}\right)^{-10}}{\left(-\frac{4}{3}\right)^{-6}} = \frac{16}{9}$$

$$b) \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^8}{\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3} = \frac{16}{81}$$

$$c) \frac{(-2)^{-2}}{\left(-\frac{4}{5}\right)^6 \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right)^{-8}} - (-3)^0 \div (-1)^{-2} = -\frac{6}{5}$$

$$d) \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^{-6}}{1 - 2\sqrt[3]{\frac{26}{27}} - 1} \left(-\frac{3}{5}\right)^{-3} + (-5)^0 = 0$$

IV. Calcular el valor de las siguientes expresiones operando y dando el resultado en número decimal.

$$a) (2.5 + 0.25 - 0.875) \div 0.1875 = 10$$

$$b) \frac{(0.9 - 1) \div 0.1}{(0.5 - 1)^2} = 4$$

$$c) \frac{0.75 - (1 - 0.5)^2}{1.5 - (0.5 - 1)^2} = 0.4$$

$$d) \frac{2(-0.22) + (-1.2)^2}{0.2^{-2}} = -0.96$$

$$e) (0.2^2 - 0.1^3) \div 0.3 - 0.3^2 + (1.4 - 2)^2 = 0.4$$

V. Calcular y convertir expresiones decimales periódicas:

$$a) 0.7999... - 2.3 \div 0.777... = -\frac{11}{5}$$

$$b) \frac{\left(0.5 - \frac{1}{3}\right)(-0.1)}{0.16 - \frac{1}{9} \div 2} = -\frac{1}{5}$$

$$c) \frac{0.27 + \frac{1}{11} - 0.090}{1.36 - 0.72} = \frac{3}{7}$$

$$d) \frac{0.1030\sqrt{99.9} + 0.09(-0.3)}{0.222... \div 0.2} = \frac{9}{10}$$

$$d) \sqrt{1.19444... (43^{-1})} - 0.4999... \div 0.6 = -\frac{2}{3}$$

VI. Transformar a notación científica las siguientes expresiones, realizar las operaciones indicadas y expresar el resultado en forma de notación científica.

$$a) \frac{140000(-0.00003)}{0.0021} - 2 \times 10^5 = -200000$$

$$b) \frac{0.00000025(-0.0014)}{0.000000035} = -1 \times 10^{-1}$$

$$c) \frac{1450000(-0.000007)}{-0.00029(-2500)} = -1.4 \times 10$$

$$d) \frac{0.000051(-0.004)}{-0.0000006(-170000)} = -2 \times 10^{-6}$$

## 11. Problemas de aplicación

1. Lia tiene 1.23 metros de cordón para amarrar un árbol en el jardín de su casa, pero observa que no alcanza y va a comprar 2.1 metros más. ¿Cuántos metros de cordón compro finalmente Lia?

### Solución

$$1.23 + 2.1 = 3.33 \text{ m}$$

2. Zaireth quiere regalar una bolsa con 15 dulces a cada uno de sus 23 amigos y necesita saber cuántos dulces son suficientes para llenar las bolsas.

### Solución

$$(15)(23) = 345 \text{ dulces}$$

3. Un trascabo escarba  $56\frac{1}{2}$  metros cúbicos de arena en 4 horas. ¿Cuántos metros cúbicos escarba por hora?

### Solución

$$\frac{56\frac{1}{2}}{4} = 14.125 \text{ m}^3 \text{ por hora}$$

1. Una acción se vende en  $\$3\frac{1}{2}$ . ¿Cuántas se pueden comprar con \$ 98?



**Ejemplo**



**Ejercicio**  
Módulo 2

**Respuesta**

28 acciones

2. Entre 1971 y 1977,  $\frac{1}{5}$  de los inmigrantes llegó a Estados Unidos desde Europa, mientras que  $\frac{9}{20}$  llegaron del resto de América. ¿Cuál es la fracción total de inmigrantes que estaban en los dos grupos?

**Respuesta**

$\frac{13}{20}$  de inmigrantes

3. El peso de un objeto sobre la luna es de  $\frac{1}{6}$  su peso sobre la Tierra. ¿Cuánto pesaba el vehículo Lunar Rover en la superficie del satélite, si tiene un peso de 450 libras sobre la Tierra?

**Respuesta**

77.5 lb

## Ejercicios adicionales

### Mínimo común múltiplo

- a) Calcular el mínimo común múltiplo de 6 y 8.
- b) Calcular el mínimo común múltiplo de 9, 12 y 18.

### Respuesta

- a) 24
- b) 36

### Máximo común divisor

- a) Calcular el máximo común divisor de 10, 20 y 30.
- b) Calcular el máximo común divisor de 7 y 11.

### Respuesta

- a) 10
- b) 1

### Fracciones equivalentes

Resuelve los siguientes problemas.

¿Cuál de los siguientes números es equivalente a  $\frac{117}{468}$ ?

- a)  $\frac{1}{4}$
- b)  $\frac{3}{4}$
- c) 4
- d)  $\frac{351}{468}$

### Respuesta

- a)  $\frac{1}{4}$

### Operaciones con números racionales.

#### Adición

Juan mezcló  $\frac{1}{2}$  litro de agua con un  $\frac{1}{3}$  de litro de jugo de naranja. ¿Qué cantidad de mezcla obtuvo?

- a)  $\frac{5}{6}$
- b)  $\frac{2}{5}$
- c)  $\frac{1}{6}$
- d)  $\frac{5}{5}$



**Respuesta**

a)  $\frac{5}{6}$

Don Raúl mezcló  $2\frac{1}{2}$  litros de pintura roja con  $3\frac{1}{4}$  litros de pintura blanca. ¿Qué cantidad de líquido tiene en total la mezcla?

a)  $5\frac{3}{8}$  litros

b)  $5\frac{3}{4}$  litros

c)  $5\frac{1}{8}$  litros

d)  $5\frac{1}{4}$  litros

**Respuesta**

b)  $5\frac{3}{4}$  litros

**Sustracción**

Sebastián guardó 196 canicas en un frasco. De todas las que guardó 79 son negras y las demás son blancas. ¿Cuántas canicas blancas hay en total?

a) 117

b) 127

c) 265

d) 275

**Respuesta**

a) 117

**Producto**

a)  $\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$

b)  $\left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{7}{8}\right)$

c)  $\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{4}{9}\right)$

**Respuestas**

a)  $\frac{5}{6}$

b)  $\frac{-7}{20}$

c)  $\frac{8}{21}$

## Cociente

Realizar la división de los siguientes ejercicios:

### a) Manejando productos cruzados

a)  $\frac{-4}{3} \div \frac{2}{11}$

b)  $\frac{10}{50} \div \frac{2}{4}$

### Respuesta

a)  $\frac{-44}{6}$

b)  $\frac{4}{10}$

### b) Aplicando el producto de extremos y producto de medios

a)  $\frac{5}{4} \div \frac{33}{7}$

b)  $\frac{24}{3} \div \frac{42}{8}$

### Respuesta

a)  $\frac{35}{132}$

b)  $\frac{32}{21}$

Luis tiene 72 limones y los quiere poner en bolsitas con 8 limones cada una. ¿Cuántas bolsitas necesita?

- a) 9 bolsitas
- b) 576 bolsitas
- c) 80 bolsitas
- d) 8 bolsitas

### Respuesta

- a) 9 bolsitas

## Potenciación

Resuelve las siguientes operaciones.

a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^6$

b)  $\left(\frac{5}{7}\right)^4$

c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^9$

d)  $\left(\frac{8}{6}\right)^5$



**Respuestas**

- a)  $\frac{1}{64}$   
 b)  $\frac{625}{2401}$   
 c)  $\frac{512}{19683}$   
 d)  $\frac{32768}{7776}$

Determinar la raíz de los siguientes números.

- a)  $\sqrt[5]{\frac{32}{1024}}$   
 b)  $\sqrt{\frac{169}{625}}$   
 c)  $\sqrt[4]{\frac{16}{1296}}$   
 d)  $\sqrt[7]{\frac{1}{2187}}$

**Solución**

- a)  $\frac{2}{4}$   
 b)  $\frac{13}{25}$   
 c)  $\frac{2}{6}$   
 d)  $\frac{1}{3}$

**Problemas de aplicación**

1. La asociación de actores tiene 28, 000 miembros, pero sólo  $\frac{1}{5}$  se encuentra trabajando en un momento dado. ¿Cuántos actores con trabajo son en total?

**Respuesta**

5,600 actores

2. Los trabajadores estadounidenses laboran un promedio de  $46\frac{3}{5}$  horas a la semana, mientras que los canadienses trabajan  $38\frac{9}{10}$  horas. ¿Cuántas horas más a la semana laboran los primeros?

**Respuesta**

$7\frac{7}{10}$  horas

3. Jesús se debe trasladar de la Ciudad de Toluca a la Ciudad de Torreón. La distancia total entre estas ciudades es de 798 kilómetros. Jesús, en su primer recorrido, cubre 230 kilómetros, mientras que en el segundo su automóvil registra 289 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros le faltan a Jesús para llegar a su destino?

**Respuesta**

279 kilómetros

4. Pedro es un estudiante y necesita conocer los posibles gastos que va a realizar el siguiente mes. Tomando en consideración que la inscripción escolar cuesta \$2800, el pago de renta \$2000, los alimentos \$2,500 y que él gana \$2,700 al mes, ¿cuánto dinero tiene que conseguir para seguir estudiando?

**Respuesta**

\$4,600 pesos





Casino, crecer en proporción directa a la cantidad de caos que podemos sostener y disipar.

# Módulo 3

## Razones, proporciones y porcentajes



### Competencias genéricas y atributos<sup>1</sup>

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
  - 4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
  - 4.5. Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
  - 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
  - 8.1. Propone maneras de resolver un problema o desarrollar proyectos en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

<sup>1</sup>Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).



## Competencias disciplinares básicas y extendidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Interpreta y explica los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

### 1. Conceptos

#### 1.1 Razones

- En lenguaje matemático una **razón** es la relación que se establece entre dos cantidades de la misma especie.

Existen dos tipos de razones:

- **Razón aritmética o por diferencia:** es la comparación de dos cantidades por diferencia, la cual se representa mediante la forma  $a - b$ , en la que “**a**” se denomina antecedente y “**b**” consecuente. Por ejemplo, la razón aritmética de 3 a 2 se escribe como  $3 - 2$ , en la cual el 3 es el antecedente y el 2 es el consecuente.
- **Razón geométrica:** es la comparación de dos cantidades por cociente y se representa como:  $\frac{a}{b}$ ;  $a/b$ ;  $a : b$ , en la que “**a**” se denomina antecedente, “**b**” consecuente, e indica las veces que “**b**” está contenida en “**a**”. Por ejemplo:  $\frac{12}{4}$ ;  $20/5$ ;  $1:5$ ;  $\frac{1}{10}$ ;  $\frac{3}{4}$ ;  $\frac{3}{8}$  de pulgada;  $60/100$  aciertos,  $60 \text{ km/h}$ ;  $\frac{10}{x}$ .

#### Investigación:

a) ¿Cuántas veces está contenido el número de habitantes de Toluca en la población del Estado de México?

---

b) ¿Qué significado tiene la **razón** obtenida?

---



---

c) Escribe tres **razones** que aplicas en tu entorno:

---



---



---



Basado en competencias

¿Cuál es la razón geométrica de \$20 en monedas de \$5?

### Solución

Si divides  $\frac{20}{5} = 4$  significa que \$5 está contenido 4 veces en \$20. O bien 4 monedas de \$5 conforman \$20.



**Ejemplo**

Obtener la razón geométrica de \$50 en monedas de \$10. \_\_\_\_\_, ¿qué significa?



**Ejercicio**  
Módulo 3

Obtener la razón geométrica de la parte que has vivido de un siglo.

### Solución

Si tienes 15 años, la razón que has vivido de un siglo es:  $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ .



**Ejemplo**

¿Cuántos vasos de 200 ml llenas con 1 litro de agua?

### Solución

Un litro equivale a 1000 mililitros (ml), entonces la razón es  $\frac{1000 \text{ ml}}{200 \text{ ml}} = 5$ ; la respuesta es 5 vasos.



**Ejemplo**

Si tienes una jarra de 3 litros de agua, ¿cuántos vasos de 200 ml puedes llenar?



**Ejercicio**  
Módulo 3

En una casa de cambio al día 28 de marzo de 2023 el dólar americano equivale aproximadamente a \$18 a la venta. ¿Cuántos pesos pagaré por 500 dólares americanos?

### Solución

La razón de un dólar americano a un peso mexicano es  $\frac{1}{18}$ , por lo tanto,  $\frac{500}{\frac{1}{18}}$ , la respuesta es \$9,000 pesos mexicanos.



**Ejemplo**

En la misma casa de cambio de moneda ¿cuántos dólares americanos puedo comprar con \$10,000? Escribe tu procedimiento.



**Ejercicio**  
Módulo 3

## 1.2 Proporciones

Una proporción en lenguaje matemático es la igualdad de dos razones y se denota como  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  o bien  $a : b :: c : d$ , lo cual se lee “**a** es a **b** como **c** es a **d**”; a las cantidades  $a$  y  $d$  se les llama *extremos* y a las cantidades  $b$  y  $c$  *medios*.

En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios, es decir  $ad = bc$ .

### Investigación

- a) ¿Cuántos kilómetros por litro de gasolina rinde el auto de tu familia?  
b) Calcula cuántos kilómetros podrá recorrer con 20 litros de gasolina.



**Ejercicio**  
Módulo 3

Escribir dos proporciones que utilices para tener una vida saludable:

La propiedad de igualdad de producto de extremos y medios permite determinar un valor desconocido, cuando se conocen tres elementos de la proporción, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Rubén se propuso ahorrar la mitad de los \$100 que recibe cada domingo para darse un regalo de fin de año ¿Cuánto reunió a lo largo de 52 domingos?

### Solución

Se plantea la siguiente proporción:  $1 : \frac{100}{2} :: 52 : \$x$ ,

Que se puede expresar como:

$$\frac{1}{50} = \frac{52}{x}$$

Aplicando la igualdad del producto de extremos con medios se tiene:

$$1(x) = 52(50)$$

$$x = 2600$$

Por lo tanto, Rubén ahorró \$2,600 a lo largo de un año.



**Ejercicio**  
Módulo 3

Iris se propuso ahorrar la cuarta parte de los \$120 que recibe cada domingo para que a medio año compre un regalo para su mamá ¿Cuánto dinero ahorró?

Dos kilogramos de manzanas cuestan \$52 conteniendo 15 manzanas, ¿cuánto gastaré por 7 manzanas?

### Solución

$$\frac{\$52}{15} = \frac{x}{7}$$

Aplicando la igualdad del producto de extremos con medios se tiene:

$$7(52) = 15(x)$$

$$364 = 15x$$

$$\frac{364}{15} = \frac{15x}{15}$$

$$x = 24.26$$

Por lo tanto, las 7 manzanas cuestan \$24.26



Ejemplo

Dos kilogramos de peras cuestan \$65 conteniendo 17 peras, ¿cuánto gasto por 5 peras?



Ejercicio  
Módulo 3

## 1.3 Porcentajes

**Porcentaje** es un número asociado a una razón, que representa una cantidad dada como una fracción en cien partes.

¿Sabes qué significan las expresiones 10%, 95% y 4.5%?

10% significa  $\frac{10}{100}$ , 95% quiere decir  $\frac{95}{100}$  y 4.5% es  $\frac{4.5}{100}$ .

El cien por ciento (100%) se considera como un entero (la unidad) y partes menores que el 100% son centésimos de la unidad. Por lo anterior, se tiene que el 6% significa  $\frac{6}{100} = 0.06$ , mientras que el 60% significa  $\frac{60}{100} = 0.60$  y el 22.7%  $\frac{22.7}{100} = 0.227$ .

Calcula el 6% de \$720.

### Solución

Considerando que el  $6\% = \frac{60}{100} = 0.06$ , se multiplica  $0.06 \times 720 = 43.20$ . Por lo tanto, el 6% de \$720 son \$43.20.



Ejemplo



### Ejercicio

Módulo 3

Calcula el 15% de \$850.



### Ejemplo

En el departamento de caballeros se tiene un 20% de descuento en todos los artículos. José desea una camisa que cuesta \$389.50 sin descuento. Su esposa Mariana tiene \$300. ¿Será suficiente para comprar la camisa?

#### Solución

El precio de la camisa es de \$389.50, el 20% de \$389.50 es:  $(0.20)(389.50) = 77.90$

Restando \$77.90 a \$389.50 resulta \$311.60

Por lo tanto Mariana no podrá comprar la camisa.



### Ejercicio

Módulo 3

En una tienda de deportes, los tenis para correr tienen un 25% de descuento. Juan desea comprar unos tenis que cuestan \$1,100 sin descuento y cuenta con \$850. ¿Le alcanzará para comprarlos?, justificar la respuesta.

## 2. Variaciones

### 2.1 Variaciones directas

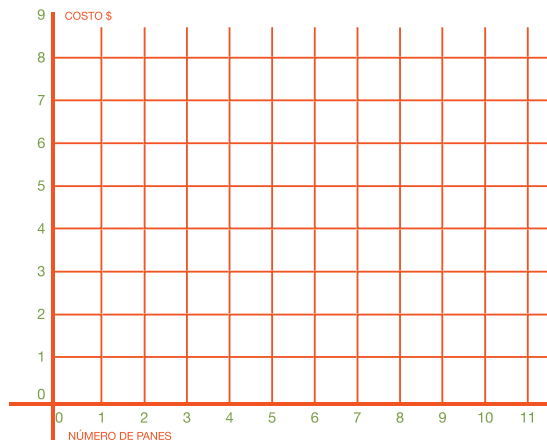
Una proporción o variación directa tiene como característica principal que, si una de las magnitudes relacionadas aumenta, la otra también y, si una disminuye, la otra también.

Matemáticamente decimos que dos cantidades son directamente proporcionales si se cumple que  $\frac{y}{x} = k$ , donde  $k$  se llama constante de proporcionalidad ( $k \neq 0$ ).

**Situación de aprendizaje.** Traza la gráfica de los siguientes conjuntos de magnitudes e indica que tipo de relación hay entre ellos.

|          |     |     |     |     |     |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Panes    | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
| Costo \$ | 1.5 | 3.0 | 4.5 | 6.0 | 7.5 |

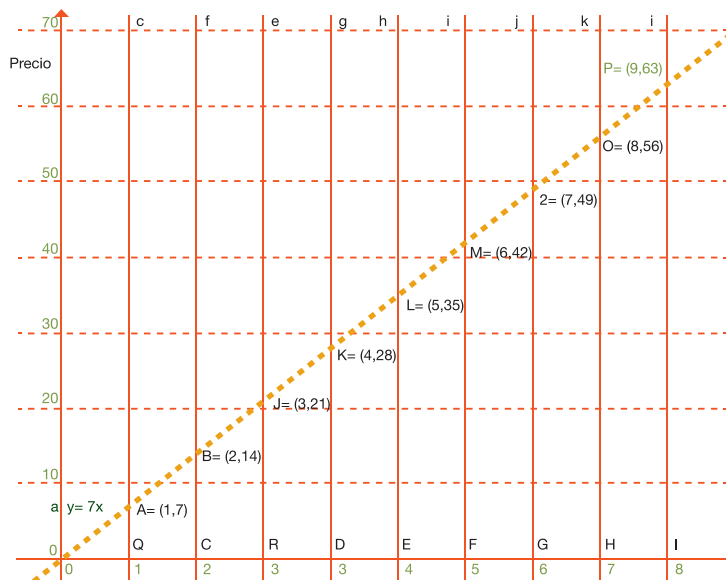
Hacer su trazo con regla a escala.



Los negocios que venden cosas que tienen un mismo precio tienen una tabulación de dos columnas, donde está escrito como una tabla de multiplicar. Por ejemplo: si cada artículo cuesta \$7.00, veríamos una tabla como la siguiente:

| Número  | Precio | Número   | Precio | Número   | Precio |
|---------|--------|----------|--------|----------|--------|
| 1 x 7 = | 7      | 8 x 7 =  | 56     | 15 x 7 = | 105    |
| 2 x 7 = | 14     | 9 x 7 =  | 63     | 16 x 7 = | 112    |
| 3 x 7 = | 21     | 10 x 7 = | 70     | 17 x 7 = | 119    |
| 4 x 7 = | 28     | 11 x 7 = | 77     | 18 x 7 = | 126    |
| 5 x 7 = | 35     | 12 x 7 = | 84     | 19 x 7 = | 133    |
| 6 x 7 = | 42     | 13 x 7 = | 91     | 20 x 7 = | 140    |
| 7 x 7 = | 49     | 14 x 7 = | 98     | 21 x 7 = | 147    |

Si esta información se coloca en una gráfica, donde colocamos en el eje  $x$  el número, y en el eje  $y$  el precio correspondiente, se tiene una gráfica como la siguiente:



Se dice que a un aumento de  $x$  corresponde un valor del precio  $y = 7(x)$ , también llamada regla de correspondencia, a la razón  $\frac{y}{x} = p$  se denominará constante de proporcionalidad (más adelante a esa constante se le llamará pendiente). En este caso:

$$p = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{21}{3} = \dots = 7$$



**Ejemplo**

Analizar si las siguientes tabulaciones son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o no tienen relación de proporcionalidad. (tomado de <https://www.youtube.com/watch?v=laL1AaV4HSk>, Prof. Alberto Martín Casado).



(Sugerencia: ver el video asociado con esta liga).



**Ejemplo**

Si en 3 cajas se pueden llevar 18 botellas, ¿cuántas botellas se pueden llevar en 5 cajas?

**Solución**

Se plantea la siguiente proporción directa:  $\frac{3 \text{ cajas}}{18 \text{ botellas}} = \frac{5 \text{ cajas}}{x \text{ botellas}}$

Producto de extremos = Producto de medios:  $3x = 5(18)$

Multiplicando y dividiendo entre 3:  $\frac{3x}{3} = \frac{90}{3}$

Dividiendo  $x = \frac{90}{3} = 30$ , o bien  $x = 30$  botellas  $x = 30 \text{ botellas}$



**Ejercicio**  
Módulo 3

Si en 6 cajas se pueden llevar 72 botellas, ¿cuántas botellas se pueden llevar en 10 cajas? (escribe el argumento de tus procedimientos).

Un motociclista recorre 220 km en 2 horas, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 5 horas a la misma velocidad?

### Solución

Se plantea la siguiente proporción Directa:  $\frac{220 \text{ km}}{2 \text{ horas}} = \frac{x \text{ km}}{5 \text{ horas}}$

Producto de extremos = Producto de medios:  $5(220) = 2x$

Multiplicando y dividiendo entre 2 en ambos miembros:  $\frac{1100}{2} = \frac{2x}{2}$

$\frac{1100}{2} = x$  Por lo que dividiendo se tiene.  $x = 550 \text{ km}$



**Ejemplo**

Un automovilista recorre 460 km en 4 horas, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 3 horas a la misma velocidad? (escribe el argumento de tus procedimientos).



**Ejercicio**  
Módulo 3

Miguel compró 3 libretas reforzadas en \$105 pero debe comprar otras 4 libretas de las mismas características, ¿cuánto dinero debe llevar para comprarlas?

### Solución

Se plantea la siguiente proporción Directa:  $\frac{\$105}{x} = \frac{3 \text{ libras}}{4 \text{ libras}}$

Producto de extremos = Producto de medios:  $4(105) = 3x$

Multiplicando y dividiendo entre 3 en ambos miembros:  $\frac{420}{3} = \frac{3x}{3}$

$\frac{420}{3} = x$   $140 = x$   $x = \$140$

\$140 debe llevar Miguel para comprar 4 libretas más.



**Ejemplo**



### Ejemplo

Ana Paola compró 9 libretas de pasta dura en \$297 pero debe comprar otras 15 libretas de las mismas características para sus hermanas, ¿cuánto dinero debe pagar por ellas?



Basado en competencias

## 2.2 Variaciones indirectas o inversas

Una proporción o variación inversa tiene como característica principal que, si una de las magnitudes relacionadas aumenta, la otra disminuye y si una disminuye, la otra aumenta. Ejemplo: la velocidad y el tiempo de recorrido de cierta distancia. Matemáticamente, decimos que las dos cantidades son inversamente proporcionales o tienen una variación inversa se cumple que:

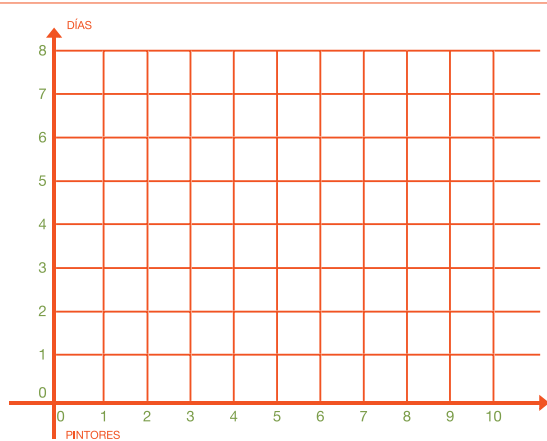
$$y = k \frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

Si una magnitud es inversa y proporcionalmente con otra, entonces la primera es igual al producto de una constante por el recíproco de la segunda

**Situación de aprendizaje.** Traza la gráfica de los siguientes conjuntos de magnitudes e indica qué tipo de relación hay entre ellos.

|          |   |   |   |     |   |      |
|----------|---|---|---|-----|---|------|
| Pintores | 2 | 3 | 4 | 5   | 6 | 7    |
| Días     | 6 | 4 | 3 | 2.4 | 2 | 1.71 |

Hacer su trazo con regla a escala.



Un automovilista que conduce a  $90 \frac{km}{h}$  tarda 5 horas en llegar a su destino. Si aumenta a  $100 \frac{km}{h}$ , ¿cuánto tardará para hacer el mismo recorrido?

### Solución

Al **aumentar su velocidad** para el mismo recorrido **debe hacer menos tiempo**, por lo que la **proporción es con variación inversa**.

Se plantea la siguiente proporción **inversa**:  $\frac{90 \frac{km}{h}}{xh} = \frac{5h}{100 \frac{km}{h}}$  La razón que **contiene a x se invierte**.

$$\text{Producto de extremos} = \text{Producto de medios: } 5(90) = 100x$$

$$\text{Multiplicando y dividiendo entre 100 en ambos miembros: } \frac{450}{100} = \frac{100x}{100}$$

$$\frac{450}{100} = x \quad 4.5 = x \quad x = 4.5 \text{ horas}$$



Ejemplo

Un automovilista que conduce a  $80 \frac{km}{h}$  en promedio tarda 6 horas en llegar a su destino. Si aumenta a  $100 \frac{km}{h}$ , ¿cuánto tardará para hacer el mismo recorrido?



Ejercicio  
Módulo 3

Diez Trabajadores tardan 6 días en hacer una obra. Si el número de trabajadores se reduce a 8, ¿cuánto tardarán para hacer el mismo trabajo?

### Solución

Al disminuir el número de trabajadores de 10 a 8 para el mismo trabajo, deben tardar más tiempo, por lo que la proporción es con variación inversa.

Se plantea la siguiente proporción **inversa**:  $\frac{10 \text{ trabajadores}}{9 \text{ trabajadores}} = \frac{x \text{ días}}{6 \text{ días}}$  La razón que **contiene a se invierte**.

$$\text{Producto de extremos} = \text{Producto de medios: } 6(10) = 8x$$

$$\text{Multiplicando y dividiendo entre 8 en ambos miembros: } \frac{60}{8} = \frac{8x}{8}$$

$$\frac{60}{8} = x \quad 7.5 = x \quad x = 7.5 \text{ días}$$



Ejemplo



**Ejercicio**  
Módulo 3

Doce Trabajadores tardan 20 días en hacer una obra. Si el número de trabajadores se reduce a 10, ¿cuánto tardarán para hacer el mismo trabajo?



**Ejemplo**

Llenar una alberca con 2 mangueras tarda 15 horas. Si se agrega otra manguera de las mismas dimensiones que las otras, ¿cuánto tardarán las 3 mangueras para llenar la piscina?

**Solución**

Se plantea la siguiente proporción **inversa**:  $\frac{2 \text{ mangueras}}{3 \text{ mangueras}} = \frac{x \text{ horas}}{15 \text{ horas}}$

$$\text{Producto de extremos} = \text{Producto de medios:} \quad 15(2) = 3x$$

$$\text{Multiplicando y dividiendo entre 3 ambos miembros:} \quad \frac{30}{3} = \frac{3x}{3}$$

$$\frac{30}{3} = x \quad 10 = x \quad x = 10 \text{ horas}$$



**Ejercicio**  
Módulo 3

Llenar una cisterna con 2 mangueras tarda 24 horas. Si se agrega otra manguera de las mismas dimensiones que las otras, ¿cuánto tardarán las 3 mangueras para llenar la cisterna? (escribir el argumento de tus procedimientos).



Basado en  
competencias

Cuando se tienen valores tabulados en una tabla como la siguiente.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| M  | A  | b  | C  |
| M' | a' | b' | c' |

Se puede saber si existe una variación directa o inversa si se cumple lo siguiente:

Es **directa** si:  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$  constante de proporcionalidad.

Es **inversa** si:  $Aa' = Bb' = Cc' = p$  constante de proporcionalidad.

Analizar las siguientes tabulaciones, para saber si son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o no tienen relación de proporcionalidad.



a)

|    |     |     |      |
|----|-----|-----|------|
| M  | 1   | 2   | 3    |
| M' | 3.5 | 7.0 | 10.5 |

b)

|    |   |    |    |
|----|---|----|----|
| N  | 1 | 2  | 3  |
| N' | 8 | 16 | 26 |

c)

|   |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|
| N | 1   | 2   | 3   |
| M | 6.0 | 3.0 | 2.5 |

d)

|   |    |   |   |
|---|----|---|---|
| N | 1  | 2 | 3 |
| P | 12 | 6 | 4 |

## 2.3 Variación compuesta

Diremos que un problema es de proporcionalidad compuesta si intervienen tres o más magnitudes (cantidades). Al intervenir más de dos magnitudes (cantidades), las relaciones proporcionales de dos a dos cantidades pueden ser distintas; es decir, si tenemos las magnitudes A, B y C, la relación proporcional entre A y B puede ser directa o inversa y entre B y C puede ocurrir lo mismo. Dicho de otro modo, se presenta como una combinación de proporciones directas e inversas. Se pueden dar dos proporciones directas.



**Ejemplo**

Cuatro costureras producen en diez días trescientas veinte blusas. ¿Cuántas blusas serán producidas por diez costureras en dieciséis días?

| Número de costureras | Número de blusas | Número de días |
|----------------------|------------------|----------------|
| 4                    | 320              | 10             |
| 10                   | $x$              | 16             |

$$\frac{4}{10} = \frac{320}{x} = \frac{10}{16}$$

$$x = \frac{320(10)}{4}$$

$x = 800$  ésta es la producción de 10 costureras en 10 días.

Ahora debemos calcular la producción en 16 días.

$$\frac{800}{x} = \frac{10}{16}$$

$$x = \frac{800(16)}{10}$$

$$x = 1280$$

### Respuesta

La producción es de 1,280 blusas en 16 días por 10 costureras.

## Combinación de dos proporciones inversas



**Ejemplo**

Nueve pintores trabajando ocho horas diarias pintan un edificio en doce días. ¿Cuántos días tardarán dieciocho pintores en pintar el mismo edificio trabajando seis horas diarias?

| Número de pintores | Número de horas | Número de días |
|--------------------|-----------------|----------------|
| 9                  | 8               | 12             |
| 18                 | 6               | $x$            |

En forma de proporción:

$$\frac{9}{18} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{9}{18} = \frac{x}{12}$$

$$x = \frac{12 \cdot 9}{18} = 6$$

Este es el número de días que tardarían 18 pintores trabajando 8 horas diarias.

Ahora, se calcula cuánto tardarían trabajando 6 horas diarias

$$\frac{8}{6} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{x}{6}$$

$$x = \frac{8 \cdot 6}{6} = 8$$

### Respuesta

18 pintores trabajando 6 horas diarias tardarán 8 días en pintar el mismo edificio.

## Combinación de una proporción directa y una inversa

Dieciocho mecánicos le dan servicio a veinte tractores en sesenta días. ¿Cuántos tractores pueden ser atendidos por doce mecánicos trabajando treinta y seis días?

| Número de mecánicos | Número de tractores | Número de días |
|---------------------|---------------------|----------------|
| 18                  | 20                  | 60             |
| 12                  | $x$                 | 36             |



**Ejemplo**

La primera parte es variación inversa y la segunda es directa:

$$\frac{18}{12} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{18}{12} = \frac{x}{20}$$

$$x = \frac{18 \cdot 20}{12} = 30$$

Esta es la cantidad de tractores que producirán 18 mecánicos en 36 días.

Ahora se calcula cuántos tractores repararán 12 mecánicos en 36 días.

$$\frac{60}{36} = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30 \cdot 36}{60} = 18$$

### Respuesta

12 mecánicos reparan 18 tractores en 36 días.

## 3. Problemas de aplicación

**Situación de aprendizaje.** Cinco operadoras fabrican 60 camisas en 6 horas. ¿Cuántas operadoras fabricarán 100 camisas en 5 horas? (sugerencia: investiga el caso de regla de 3 compuesta.)

---

---

---

---

---

---

---



<https://www.youtube.com/watch?v=i4Xfm5xxUzg>



### Ejemplo

Las edades de un hijo y un padre están en la razón 1:5. Hace 5 años las edades estaban en la razón 1:9. ¿Qué edad tiene el hijo?

### Solución

Asignaremos las siguientes variables:

$h = \text{edad del hijo}$  y  $p = \text{edad del padre}$ , por la razón 1:5 se establece la siguiente proporción:

$$\frac{1}{5} = \frac{h}{p}$$

Producto de extremos = producto de medios:  $p = 5h \rightarrow \text{ecuación (1)}$

Por la razón 1:9, las edades del hijo y del padre hace 5 años eran:  $h - 5$  y  $p - 5$

Respectivamente, se hace la siguiente proporción:  $\frac{h-5}{p-5} = \frac{1}{9}$

Producto de extremos = producto de medios:  $9(h - 5) = 1(p - 5)$

$$x = \frac{\quad}{3} = 30$$

Multiplicando, aplicando ley distributiva:

$$9h - 45 = p - 5$$

*ecuación (2)*

Se sustituye la *ecuación (1)*,  $p = 5h$  en la *ecuación (2)* para tener una ecuación de una sola incógnita:

$$9h - 45 = 5h - 5$$

Se desplazan los términos semejantes:

$$9h - 5h = 45 - 5$$

Se hacen operaciones:

$$4h = 40$$

Se divide entre 4 en ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{4h}{4} = \frac{40}{4}$$

Realizando las divisiones, obtenemos la edad del hijo,  $h = 10 \text{ años}$

Las edades de un hijo y un padre están en la razón 1:4. Hace 6 años las edades estaban en la razón 1:7. ¿Qué edades tiene el hijo y el padre?



### Respuesta

12 y 48 años

En mi examen de admisión vino un problema como este: Se sabe que  $p$  y  $q$  son números enteros positivos y que  $q/r = 1/p$ . Si  $q = 2$  y  $r = 10q$ . Entonces, ¿cuánto vale  $3p$ ?

### Solución

De la proporción:  $\frac{q}{r} = \frac{1}{p}$  se sabe que  $q = 2$ ,  $r = 10q$ , o sea  $r = 10(2) = 20$ .

Sustituyendo estos valores en la proporción:  $\frac{2}{20} = \frac{1}{p}$

Producto de extremos = producto de medios:  $2p = 20$

...Dividiendo entre 2 resulta que:  $p = 10$ , luego:  $3p = 30$ .





**Ejercicio**  
Módulo 3

Se sabe que  $p$  y  $q$  son números enteros positivos y que  $q/r = 2/p$ . Si  $q = 3$  y  $r = 10q$ . Entonces, ¿cuánto vale  $5p$ ?



**Ejemplo**

El automóvil de David consume 20 litros en un viaje de 245 km. Si al tanque le caben 35 litros, ¿cuántos kilómetros puede recorrer su automóvil?

**Solución**

Se hace una proporción  $245 \text{ km} : 20 \text{ l} :: x \text{ km} : 35 \text{ l}$

En forma de igualdad  $\frac{245 \text{ km}}{20 \text{ l}} = \frac{x \text{ km}}{35 \text{ l}}$

Por lo que  $12.25 = \frac{x}{35}$

Se puede hacer la división  $\frac{245 \text{ km}}{20 \text{ lts}}$  es el rendimiento;  $12.25 = \frac{x}{35}$

Multiplicando por 35 resulta:  $x = 428.75 \text{ km}$



**Ejercicio**  
Módulo 3

El automóvil de Ricardo consume 30 litros en un viaje de 270 km Si el tanque tiene una capacidad de 40 litros, ¿cuántos kilómetros puede recorrer su automóvil?

**Respuesta**

360 km

En una sala de cine con cupo para 180 personas se ha llenado completamente la proporción de adultos a menores es de 1:3, se ha llenado completamente. Si hay 5 niñas por cada 4 niños, ¿cuántas niñas hay en toda la sala?



**Ejemplo**

### Solución

Como la proporción de adultos a menores es de 1 por cada 3 de los 180, hay  $\frac{180}{4} = 45$  *adultos* y el resto son  $180 - 45 = 135$  *menores de edad*; si 5 son niñas de cada 9 menores, entonces se hace la proporción:  $\frac{5}{9} = \frac{x}{135}$ , por lo que se tiene  $\frac{5(135)}{9} = x$

De donde,  $x = 75$  *niñas*

Una sala de cine con cupo para 240 personas en que la proporción de adultos a menores es de 1:3, se ha llenado completamente. Si hay 2 niñas por cada 3 niños, ¿cuántos niños hay en toda la sala?



**Ejercicio**  
Módulo 3

### Respuesta

108 niños

Una pantalla de \$8,000 está rebajada en 15%, ¿cuánto es el descuento en pesos?

### Solución

La proporción que se puede plantear es:  $\frac{(8000)}{100} = \frac{x}{15}$

Una manera práctica de hacerlo es:  $\frac{(8000) 15}{100} = x$ ; como  $\frac{15}{100} = 0.15$ ;

Multiplicando:  $8000(0.15) = 1200$ , que es el descuento en pesos.



**Ejemplo**



**Ejercicio**  
Módulo 3

Un corte de tela me cuesta \$1,100. ¿Cuál debe ser el precio para ganar un 25% de lo que costó?

**Respuesta**

\$1375



**Ejemplo**

Una camisa le costó a Margarita \$315.35 que resultó el 17% del dinero que llevaba. ¿Cuánto dinero tenía?

**Solución**

Si hacemos una proporción  $\frac{\text{tenía } \$x}{\$315.35} = \frac{100\%}{17\%}$

Multiplicando \$315.35, para despejar a la incógnita:

$$\frac{\$x \text{ tenía}}{17\%} = \frac{\$315.35(100\%)}{17\%} ; \text{ se tiene } x = \frac{\$315.35(100\%)}{17\%}$$

Multiplicando y dividiendo se obtiene:  $x = \$1855$

De una manera práctica, divide la cantidad entre el %:  $x = \frac{\$315.35}{0.17} = \$1855$

¿Por qué resulta lo mismo, pero más simple? Comentar con la clase la respuesta y mostrarla al profesor.

---

---

---

---

---

De una generación egresaron el 84% de los alumnos de un colegio y sólo quedaron 20 alumnos, ¿cuántos alumnos salieron del colegio?



### Respuesta

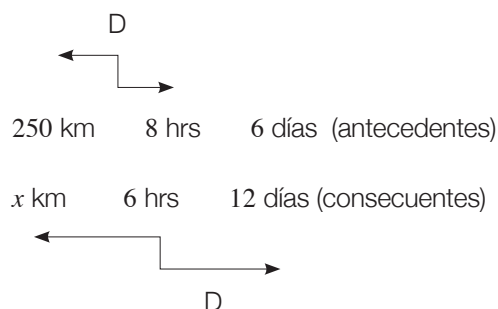
105 alumnos

Un hombre recorre 250 km caminando 8 horas durante 6 días, ¿cuánto recorrerá si camina 6 horas durante 12 días?



### Solución

Se establece una regla de tres compuesta. Se escribe en el primer renglón los datos completos (antecedentes) y debajo los datos donde está la (consecuentes):



Se analiza el comportamiento entre horas y kilómetros. Entre más horas camine, más kilómetros avanza; entre menos horas camine, menos kilómetros avanza, lo cual corresponde a una relación directa.

En seguida se analiza el comportamiento entre días y km. Considerando que son las mismas horas, entre más días camine más km acumula; entre menos días camine, menos km acumula. Es también una relación directa.

El valor de la incógnita se obtiene multiplicando el valor conocido por las razones conocidas, pero invirtiéndolas en caso de ser directas (si son inversas no se invierten).

En este caso:  $x = 250 \left( \frac{6}{8} \right) \left( \frac{12}{6} \right) = 375 \text{ km}$

---

Cinco trabajadoras hacen 60 camisas trabajando 6 horas, ¿cuántas trabajadoras harán 100 camisas trabajando 5 horas?



Basado en  
competencias

**Respuesta**  
10 trabajadoras

## Serie de ejercicios

Resuelve en tu cuaderno los ejercicios propuestos, indicando en forma clara y ordenada el procedimiento que justifique el resultado obtenido. Compáralos con los de otros compañeros.

1. ¿Cuál es la razón que indica el avance de 40 000 metros que realiza un automóvil en 60 minutos?
2. Si me comí 3 rebanadas de pizza cortada en 8 partes iguales, ¿cuál es la razón de lo que quedó de pizza?
3. ¿Cuál es la razón simplificada de 5 minutos entre 60 minutos?
4. ¿Cuáles son las 6 razones que puedes formar entre los lados de un triángulo rectángulo que miden 3, 4 y 5 *cm* de longitud?
5. ¿Cuál es la razón entre mujeres y hombres en tu salón de clases?
6. ¿Cuál es la razón entre mujeres y hombres de los maestros que te dan clase este semestre?
7. ¿Cuál es la razón entre conocidos y desconocidos de tus compañeros de grupo?
8. ¿Cuántos vasos de 150 *ml* llenas con 2 litros de agua?
9. ¿Cuántos litros de agua de limón debo preparar para que 50 personas tomen 2 vasos de 200 *ml*?
10. ¿Cuál es la razón entre los libros que has leído y los libros de matemáticas que conoces?
11. Utilizando la razón entre mujeres y hombres de tu salón de clases, calcula cuántas mujeres y cuántos hombres hay en toda la escuela.
12. Pregunta cuál es la razón entre alumnos que reprueban el primer examen parcial de matemáticas y el total de alumnos de tu escuela y compárala con la de tu grupo.
13. ¿Cuál es la razón de horas que ves televisión entre horas que estudias matemáticas? (muéstraselo a tus padres).
14. ¿Cuál es la razón de horas que juegas y te diviertes entre las horas que estás despierta, en un día?
15. Un litro de gasolina Magna cuesta \$13.57 ¿cuánto cuesta 20 litros de gasolina Magna?
16. ¿Cuántos litros de gasolina puedo comprar con \$150?
17. ¿Cuántos Euros puedo comprar con \$20,000? (investiga el tipo de cambio entre euros y pesos mexicanos).
18. ¿Cuántas Libras esterlinas puedo comprar con otros \$20,000 (investiga el tipo cambio de entre libras esterlinas y pesos mexicanos).

19. Traza en tu cuaderno un cuadrado de 2 pulgadas de lado, calcula su área, enseguida traza un cuadrado del doble de área del primer cuadrado, ¿cuánto mide el lado del segundo cuadrado? Comprueba calculando el área del segundo cuadrado.
20. Veinte litros de gasolina cuestan \$271.40 ¿Cuántos litros de gasolina compro con \$150?
21. Para hacer dos ejercicios de proporciones me tardé 15 minutos, ¿cuánto tiempo tardaré en realizar 10 ejercicios similares?
22. ¿Cuánto cuestan 2.5 kilogramos de mango Ataulfo, si 850 gramos costaron \$23.80?
23. ¿Cuánto cuesta un plátano tabasco, si compré a \$10.00 un racimo con 8 plátanos que pesó 1.260 kg?
24. Medio kilogramo de zanahorias costó \$6, ¿cuánto costarán 5 kilogramos de zanahorias para hacer jugo?
25. ¿Cuántos gramos de calabaza compró Silvia si le cobraron \$8.75 y un kilogramo de calabaza cuesta \$12.00?
26. ¿Cuánto cuestan cinco litros de leche si la caja de 12 litros cuesta \$198.00?
27. Un auto de gran rendimiento recorre 340 kilómetros con 20 litros de gasolina, ¿cuántos kilómetros recorrerá con 15 litros?
28. Un auto compacto con 30 litros recorre 420 kilómetros, ¿cuántos kilómetros recorrerá con 20 litros de gasolina? y ¿cuál es su rendimiento en *km/litro*?
29. ¿En qué proporción ha crecido la población de la República Mexicana del año 2000 a la fecha, si pasó de 103'873,607 habitantes a 125'647,860 habitantes en la actualidad?
30. El rendimiento de un impermeabilizante es aproximadamente de  $5 \frac{m^2}{lt}$ , ¿cuántos litros se necesitarán para impermeabilizar la azotea de tu casa? (Sugerencia: mide aproximadamente el ancho y largo de tu casa para calcular su área).



31. ¿Cuántos Euros puedo comprar con \$25,000? (investiga el cambio actual de euros a pesos mexicanos).
32. Dibuja en tu cuaderno un cuadrado de un centímetro de lado y en el centro un círculo de un milímetro de radio, calcula su área, ¿cuál es la proporción del círculo respecto al cuadrado?
33. Tomando como escala que  $1\text{ cm} = 20\text{ km}$  representa en una recta numérica que el punto D está a  $150\text{ km}$  del punto A en el origen, y que el punto E está a  $-210\text{ km}$  de D.
34. Calcula los siguientes porcentajes.

|                                        |                                               |                                                   |
|----------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| a) 20% de \$3600                       | b) 35% de $360^\circ$                         | c) 21% de 2015 años                               |
| d) 28% de 4500 gramos                  | e) 45% de $1315\text{ km}$                    | f) 0.5% de $72\text{ m}$                          |
| g) 0.66% de $27\text{ cm}$             | h) 0.6% de 54 pies                            | i) 4.5% de 15 años                                |
| j) 1.5% de 154 millones                | k) 0.2% de $42\text{ Kg.}$                    | l) 3.75% de $18\text{ cm.}$                       |
| m) 30% de descuento en tenis de \$1890 | n) Pague dos y llévase tres de \$600 cada uno | o) 5% de descuento en anuncio \$307 por tres días |

35. La cuenta total en un restaurante para una familia de 5 personas es \$640.72. Quieren dejar un 10% de propina. Deciden dejar \$50.00. ¿Es razonable esta estimación? Explica tu razonamiento.
36. Una encuesta reciente muestra que el 67% de los estudiantes ve 3 o más horas de televisión en la noche. Imagina que hay 892 estudiantes en tu escuela. ¿Cuál sería una estimación razonable para el número de estudiantes de tu escuela que ve 3 o más horas de televisión en la noche? Explica tu razonamiento.
37. Mario y Juan almuerzan en un restaurante y Mario debe determinar cuánta propina dejar basándose en la cuenta. Si la cuenta es de \$215 y Juan quiere dejar un 15% de propina, ¿cuál es una estimación razonable de cuánto debe dejar?
38. De los 42,000 aficionados que asisten a un partido de fútbol entre el Américus y Chiapanis, el 60% son aficionados del Américus. Aproximadamente, ¿cuántos aficionados del Chiapanis asistieron al estadio?
39. Una encuesta a 1,950 personas determina que el 39% prefiere el helado de chocolate al de vainilla. Aproximadamente, ¿cuántas personas prefieren el helado de chocolate de acuerdo a la encuesta?

40. El área de la superficie de la Tierra es aproximadamente 70% de agua. Si se estima que el área de la superficie mide aproximadamente 510'000,000 kilómetros cuadrados, ¿a cuantos  $\text{km}^2$  de agua corresponde el 70%?
41. De 7,450 estudiantes universitarios de primer año, el 72% cambió de licenciatura desde que comenzó el año académico. Aproximadamente, ¿cuántos estudiantes han mantenido la misma licenciatura?
42. Al ir de compras, Fátima gasta \$257.00. Si la cantidad que gasta es el 20% de sus ahorros, ¿cuánto había ahorrado antes de comprar?
43. Jorge debe \$180 pero le descuentan el 5%, por pronto pago ¿cuánto debe pagar?
44. De una finca de 50 hectáreas se vende el 32% y se alquila el 28%, ¿cuántas hectáreas quedan para cultivo?
45. Tenía 30 cuadernos. Obsequié el 30% a mi hermano Francisco, a mi primo Carlos el 20% y a mi amigo Alejandro el 10%, ¿cuántos cuadernos tiene cada uno y cuántos tengo yo?
46. De los 80 libros que había en una librería, se vendió el 45% a \$120.50 cada uno, el 75% del resto a \$104.09 cada uno, y los restantes a \$100.00 cada uno; ¿cuál fue el importe total de las ventas?
47. Se incendia un negocio que estaba asegurado en el 86% de su valor y se cobran \$186,000 por el seguro; ¿cuál era el valor del negocio?
48. La comisión de un agente es el 30% de las ventas que haga. Luego de cierta operación recibe \$1,380.00 de comisión, ¿cuál fue el importe de la venta?
49. Compré un anillo en \$2,200 y lo quiero vender ganando el 15%; ¿cuánto debo pedir por él?
50. En el examen de "Salud adolescente" de 40 preguntas Ramón obtuvo 30 aciertos y el examen representa el 50% de la calificación ¿cuánto le corresponde del puntaje total?
51. Traza la gráfica de los siguientes conjuntos de magnitudes y analiza que tipo de relación hay entre ellos y sus elementos.

|          |   |    |    |    |    |
|----------|---|----|----|----|----|
| Pasajes  | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  |
| Costo \$ | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 |

52. Hacer su trazo con regla a escala y con un paquete graficador. [GeoGebra].
53. Si en 20 cajas se pueden llevar 480 refacciones, ¿cuántas refacciones se pueden llevar en 50 cajas?
54. Si en 16 cajas se pueden llevar 256 envases, ¿cuántos envases se pueden llevar en 24 cajas?



55. Un tractor recorre 80 km en 2 horas ¿cuántos kilómetros recorrerá en 3 horas a la misma velocidad?
56. Un automovilista recorre 660 km en 6 horas ¿cuántos kilómetros recorrerá en 4 horas a la misma velocidad?
57. Un automovilista que conduce a  $70 \frac{km}{h}$  en promedio tarda 7 horas en llegar a su destino. Si aumenta a  $95 \frac{km}{h}$ , ¿cuánto tardará para hacer el mismo recorrido?
58. Doce trabajadores tardan 30 días en hacer una obra. Si el número de trabajadores se reduce a 8, ¿cuánto tardarán en hacer el mismo trabajo?
59. Sesenta obreros tardan 90 días en fabricar un pedido. Si el número de trabajadores se reduce a 50, ¿cuánto tardarán en hacer el mismo trabajo?
60. Para llenar con agua unos tinacos, 3 bombas se tardan 40 minutos. Si se agrega otra bomba con las mismas características, ¿cuánto tardarán las 4 bombas en llenar los tinacos?
61. Cómo es la gráfica de los siguientes conjuntos de magnitudes y que tipo de relación hay entre ellos y sus elementos.

|        |   |   |               |   |     |               |
|--------|---|---|---------------|---|-----|---------------|
| Pintor | 1 | 2 | 3             | 4 | 5   | 6             |
| Días   | 8 | 4 | $\frac{8}{3}$ | 2 | 1.6 | $\frac{4}{3}$ |

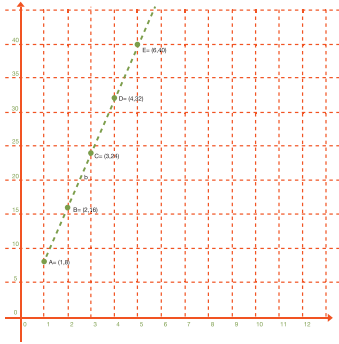
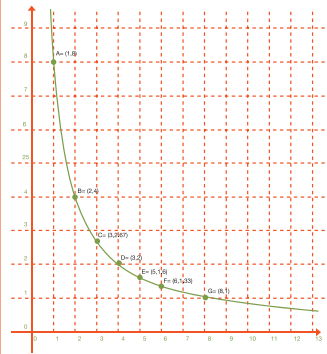
62. Hacer su trazo con regla a escala y con un paquete graficador. [GeoGebra].
63. Magdalena tiene \$200 para los gastos de la semana. Utiliza 40% para transporte, de lo que resta ocupa la mitad para ir al cine, gasta una tercera parte del sobrante en golosinas. ¿Cuánto dinero le quedó para ahorrar?
64. Tres hermanas elaboran adornos de fiesta, Rosa hace un adorno cada 6 minutos, Esperanza en 3 minutos y Abigail en 5 minutos. ¿Cuántos adornos completos harán en 30 minutos si las tres trabajan en forma colaborativa?
65. Si en la proporción  $11 : 17 :: 3 : p$  ¿qué parte es 3 de p?
66. Si  $1 : c :: 5 : d$ , entonces el producto de 5 y c es igual a:
67. Con \$p se compran 3 cuadernos, ¿cuántos cuadernos del mismo valor se pueden comprar con \$2pq?
68. Los diámetros de dos círculos tangentes interiormente están en razón 1:3, ¿en qué razón están las áreas de esos círculos?
69. Una repisa con libros pesa 60 kg. Si el peso de la repisa con los libros está en la razón 1:11, ¿cuántos kilogramos pesa la repisa?

70. La superficie de un rectángulo es  $x^2$ . Si el ancho y el largo del rectángulo están en la razón 1:4, entonces el ancho está representado por:
- a)  $2x^2$       b)  $x/2$       c)  $2/x$       d)  $x/4$
71. La superficie de un rectángulo es  $36 \text{ cm}^2$ . Si el ancho y el largo del rectángulo están en la razón 1:4, entonces el ancho mide:
72. Herlinda tiene que pagar un adeudo de \$9,000. Si le descuentan el 5% de su deuda, ¿cuánto tiene que pagar todavía?
73. Joaquín tenía \$8,000, gastó el 20% y dio a su hermana el 15% del resto, ¿cuánto le queda?
74. De las 240 estampas nuevas que tiene Ricardo, 48 están repetidas. ¿Cuál es el porcentaje de estampas repetidas?
75. ¿Qué porcentaje me descontaron del precio original de un juego electrónico que cuesta \$4,500 si el precio se redujo a \$3,600?
76. ¿En cuánto hay que vender un producto que ha costado \$650 para ganar el 15% en la venta?
77. Un jardinero cobraba \$450 por su trabajo. Ahora aumentó a \$585, ¿en qué porcentaje aumentó su tarifa?
78. Si Alfonso tuviese un 16% menos de la edad que tiene tendría 21 años, ¿cuál es la edad actual de Alfonso?
79. Sofía compartió 40 dulces entre sus amigos. A Paco le dio  $\frac{2}{5}$  del total, a Mario el 25% del resto y a Brenda el 50% de los que le quedaban. ¿Con cuántos dulces se quedó Sofía?

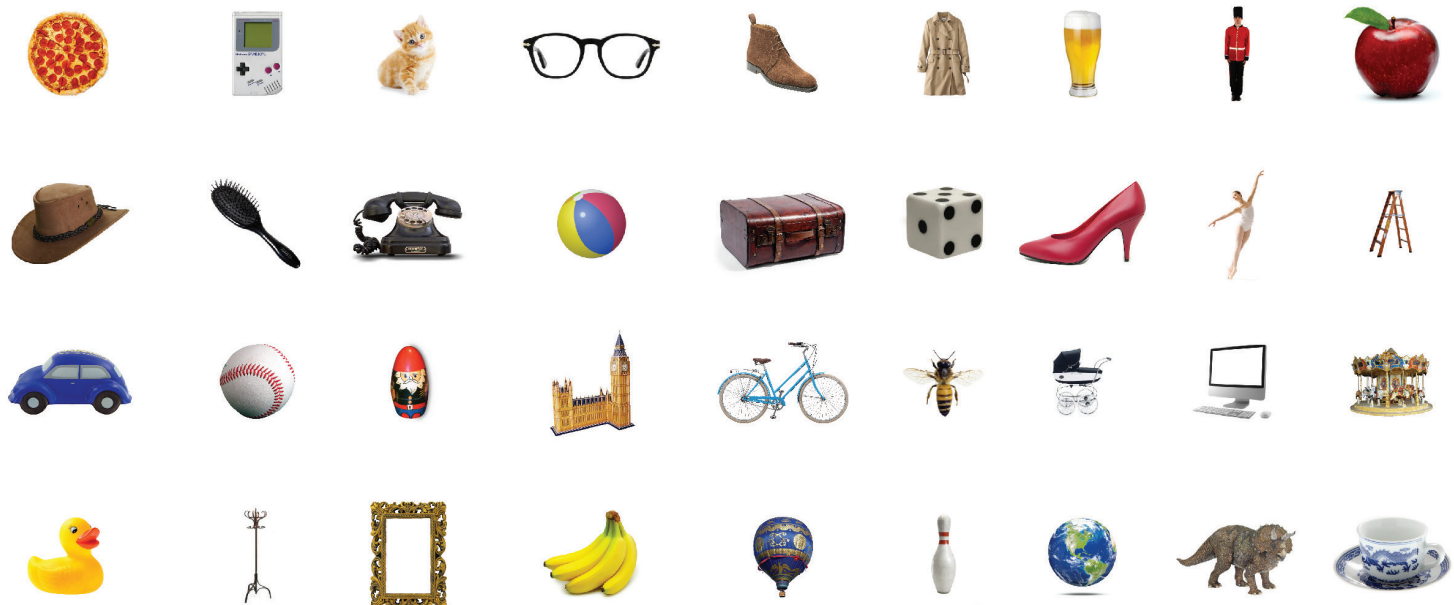


## Resultados

|                                                                                         |                                                         |                                                             |                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. 40 km/hr                                                                             | 2. 5/8 de pizza                                         | 3. 1/12                                                     | 4. 3/5, 4/5, 3/4, 5/3, 5/4, 4/3      |
| 5. $\frac{\text{mujeres}}{\text{hombres}}$                                              | 6. $\frac{\text{maestras}}{\text{maestros}}$            | 7. $\frac{\text{conocidos}}{\text{desconocidos}}$           | 8. $\frac{2000}{150} = 13.333$ vasos |
| 9. 20 litros                                                                            | 10. $\frac{\text{leídos}}{\text{matemáticas}}$          | 11. $\frac{\text{mujeres}}{\text{hombres}} = (\text{gpos})$ | 12. del gpo.                         |
| 13. $\frac{\text{veoTV}}{\text{estudio matem.}}$                                        | 14. $\frac{\text{horas juego}}{\text{horas despierto}}$ | 15. \$271.40                                                | 16. 11.053 lbs                       |
| 17. 1127.40 € a \$17.54/euro                                                            | 18. 794 £ a \$25.18/Libra                               | 19. $L = \sqrt{8}$                                          | 20. 53 lbs                           |
| 21. 75 minutos                                                                          | 22. \$70                                                | 23. \$1.60                                                  | 24. \$60                             |
| 25. 729 gramos                                                                          | 26. \$82.50                                             | 27. 255 km                                                  | 28. 280 km y 14 km/lt                |
| 29. 1.21                                                                                | 30. $\frac{(\text{ancho})(\text{largo})}{5}$            | 31. $\frac{25000}{17.71} = 1411.60$ €                       | 32. $\frac{1}{3183.09}$              |
| 33.  |                                                         |                                                             |                                      |
| 34. a) \$720                                                                            | b) 126°                                                 | c) 423.15 años                                              | d) 1260 gramos                       |
| e) 591.75 km                                                                            | f) 0.36 m                                               | g) 17.82 cm                                                 | h) 0.324 pies                        |
| i) 0.675 años                                                                           | j) 2' 310,000                                           | k) 0.084 kg                                                 | l) 0.675 cm                          |
| m) \$567                                                                                | n) 33.33% de descuento                                  | o) pagas \$291.65                                           |                                      |
| 35. No, lo correcto son \$64                                                            | 36. 598 estudiantes                                     | 37. \$32                                                    | 38. 16,800 aficionados al Chiapanis  |
| 39. 761 personas                                                                        | 40. 357' millones de km <sup>2</sup>                    | 41. 2,086 se han mantenido                                  | 42. \$1285.                          |
| 43. \$171                                                                               | 44. 20 hectáreas                                        | 45. 9 a Francisco, 6 a Carlos, 3 Alejandro y 12 para mí     | 46. \$8,872.97                       |
| 47. \$216,279                                                                           | 48. \$4,600                                             | 49. \$2,530                                                 | 50. 3.75 de calificación             |

|                                                                                              |                                                                                                                |                          |                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <p>51.</p>  | <p>52. 1200 refacciones.</p>                                                                                   | <p>53. 384 envases</p>   | <p>54. 120 <i>km</i></p> |
| <p>55. 440 <i>km</i></p>                                                                     | <p>56. 5 hrs 9' 28"</p>                                                                                        | <p>57. 45 días</p>       | <p>58. 108 días</p>      |
| <p>59. 30 minutos</p>                                                                        | <p>60. relación inversa</p>  | <p>61. \$40</p>          | <p>62. 21 adornos</p>    |
| <p>63. 11/17</p>                                                                             | <p>64. 1d</p>                                                                                                  | <p>65. 6q cuadernos</p>  | <p>66. 1 : 9</p>         |
| <p>67. 5 <i>kg</i></p>                                                                       | <p>68. b) <math>x/2</math></p>                                                                                 | <p>69. 3 cm</p>          | <p>70. \$8550</p>        |
| <p>71. \$5440</p>                                                                            | <p>72. 20%</p>                                                                                                 | <p>73. 20% descuento</p> | <p>74. \$747.50</p>      |
| <p>75. 30% aumento</p>                                                                       | <p>76. 25 años</p>                                                                                             | <p>77. 9 dulces</p>      |                          |





*Variables, construye un modelo equilibrado entre la simplicidad y la exactitud de los resultados.*

# Módulo 4

## Modelos matemáticos y lenguaje algebraico



### Competencias genéricas y atributos<sup>1</sup>

- 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
  - 4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
  - 4.5. Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
- 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
  - 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
- 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
  - 8.1. Propone maneras de resolver un problema o desarrollar proyectos en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

<sup>1</sup>Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).



## Competencias disciplinares básicas y extendidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Interpreta y explica los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

### 1. Lenguaje común y lenguaje algebraico

El lenguaje es una herramienta de comunicación; el sistema básico para transmitir conocimiento.

**Lenguaje común:** forma de lenguaje cotidiano que utiliza el ser humano para expresarse.  
**Lenguaje algebraico:** es la representación del lenguaje común que emplea símbolos, letras y signos.

La posibilidad de utilizar una sola letra para representar y operar, de manera sencilla, un conjunto de valores numéricos es una de las características principales del Álgebra.

Es importante mencionar que la conversión del lenguaje común al lenguaje algebraico permite el planteamiento y la resolución de problemas, siguiendo el método algebraico de ecuaciones o sistemas de ecuaciones.

Para emplear efectivamente el lenguaje algebraico, se usan todas las letras del alfabeto:

- Las primeras letras del alfabeto a, b, c, d, e, se determinan, por regla general, como constantes.
- Por lo general, las letras  $x$ ,  $y$  y  $z$  se utilizan como incógnitas o variables.

#### Términos para identificar las operaciones en lenguaje algebraico:

- **Suma:** adición, aumento, suma, más; añadir, exceder, agregar.
- **Resta:** diferencia, menos, menos que; disminuir, sustraer, quitar, reducir.
- **Multiplicación:** producto, el producto de, tantas veces, por, multiplicado por; incrementar; doble, triple, cuádruplo, etc.
- **División:** cociente, fracción, porción, entre, parte, dividido por, razón de; reparto; mitad, tercio, cuarto, etc.

Otros términos comunes que se pueden usar:

- **Semi:** mitad
- **Al cuadrado o el cuadrado de:** elevado a la segunda potencia ( $^2$ ).
- **Al cubo o el cubo:** elevado a la tercera potencia ( $^3$ ).
- **Igual o Equivalente:** igualdad.



- **Consecutivos o Sucesor:** siguiente.
- **Antecesor:** antes de.
- **Simétrico:** inverso aditivo.
- **Recíproco:** inverso multiplicativo.

A qué tipo de expresión corresponde el enunciado: el doble de un número excedido en cinco:

### Solución

**Un número:**  $x$

**Doble:** indica que se multiplicará por 2.

**Excedido:** suma.

Por lo tanto, la expresión es:  $2x + 5$



Ejemplo

Traducciones del lenguaje común al lenguaje algebraico:

| Lenguaje común                                                                  | Lenguaje algebraico         |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| 1. Un número aumentado en $n$ unidades                                          | $x + n$                     |
| 2. El doble de un número                                                        | $2x$                        |
| 3. El triple de un número disminuido en $k$ unidades                            | $3x - k$                    |
| 4. El doble de un número aumentado en 5                                         | $2x + 5$                    |
| 5. La tercera parte de un número                                                | $\frac{x}{3}$               |
| 6. La cuarta parte de un número aumentado $p$ unidades                          | $\frac{x}{4} + p$           |
| 7. La quinta parte de la diferencia entre un número y 8                         | $\frac{1}{5}(x - 8)$        |
| 8. El doble de la suma entre un número y 7                                      | $2(x + 7)$                  |
| 9. Un número multiplicado por sí mismo                                          | $(x)(x)$                    |
| 10. Un número aumentado en 7 y multiplicado por el mismo número disminuido en 6 | $(x + 7)(x - 6)$            |
| 11. La diferencia de dos números es 6                                           | $(x - y) = 6$               |
| 12. La suma de 2 números es 15                                                  | $(x + y) = 15$              |
| 13. Un número excede en 10 unidades a otro                                      | $x - 10 = y$                |
| 14. Tres números consecutivos                                                   | $x; (x + 1); (x + 2)$       |
| 15. Tres números pares consecutivos                                             | $x; x + 2; x + 4$           |
| 16. Tres números impares consecutivos                                           | $x; x + 2; x + 4$           |
| 17. El recíproco de un número                                                   | $x^{-1} = \frac{1}{x}$      |
| 18. La suma de tres números consecutivos al cuadrado                            | $(x + (x + 1) + (x + 2))^2$ |
| 19. Un número de dos cifras                                                     | $10x + y$                   |



Ejemplo

|                                                                                     |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 20. Un número de tres cifras                                                        | $100x + 10y + z$      |
| 21. El sucesor de un número                                                         | $x + 1$               |
| 22. El antecesor de un número                                                       | $x - 1$               |
| 23. El numerador de una fracción se aumenta en 3 y el denominador de disminuye en 5 | $\frac{x + 3}{x - 5}$ |



### Ejemplo

El numerador de una fracción aumenta en tres al denominador

### Solución

Si una  $fracción = \frac{numerador}{denominador}$

Entonces:

Denominador =  $x$

Numerador =  $x + 3$

$$fracción = \frac{x + 3}{x}$$



### Ejercicio

Módulo 4

Escribir en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

- El cubo de la suma de dos números.
- La suma de los cuadrados de dos números.
- La raíz cuadrada de la diferencia de dos números.

## 2. Expresión algebraica

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras relacionados mediante operaciones aritméticas; adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. La expresión algebraica está conformada por términos algebraicos.



### Ejemplo

- $2x$
- $-\frac{3}{4a}$
- $2x - 3y$
- $-\frac{2}{3x} + \frac{1}{4y}$
- $x^2 - 2x + 4 = 0$
- $\frac{2x^4 + 4y^3}{3x^2 + 2y^4}$

$$g) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, -\infty$$

$$h) (1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

## 2.1 Término algebraico

La expresión algebraica más simple es el término algebraico.

Un **término algebraico** es la mínima expresión algebraica irreducible, que consta de uno o varios símbolos asociados entre sí por las operaciones de multiplicación, división, potenciación y/o radicación.

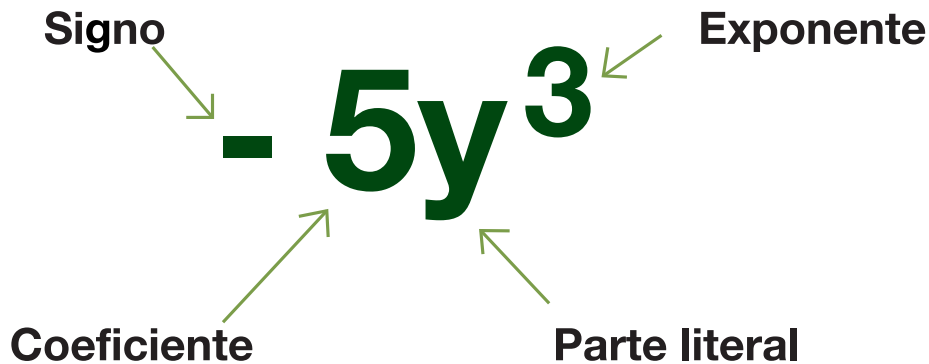
Son **ejemplos** de términos algebraicos:

$$x, 2x^3, 5, -4x^2y^3, -5xyz, \sqrt{7xy^5}, \frac{3}{2}mn$$

### Componentes

Un término algebraico se compone por los siguientes elementos:

- a) **Signo**: que puede ser positivo o negativo
- b) **Coeficiente**: factor multiplicativo. Es decir, el número constante que se encuentra a la izquierda de una variable (incógnita) y la multiplica.
- c) **Literal (variable)**: símbolo que representa un valor numérico, pudiendo ser, al principio, un valor cualquiera.
- d) **Exponentes**: número de veces que se multiplicará la variable por sí misma.





**Ejercicio**  
Módulo 4

Para cada uno de los siguientes términos algebraicos, determinar el signo, el coeficiente numérico, la parte literal y los exponentes

| Ejercicio                   | Signo | Coeficiente numérico | Parte literal variable | Exponentes |
|-----------------------------|-------|----------------------|------------------------|------------|
| $-5.9a^2b^3c$               | menos | 5.9                  | $a,b,c$                | 2,3,1      |
| $-\frac{\sqrt{3}}{3}h^2k^5$ |       |                      |                        |            |
| $abc$                       |       |                      |                        |            |
| $\frac{xy^2}{4}$            |       |                      |                        |            |
| $-8a^4c^2d^3$               |       |                      |                        |            |

## 2.2 Variables y constantes

Una **variable** se define como aquel símbolo por medio del cual se representa un valor numérico, pudiendo ser éste, en un principio, un valor cualquiera. Una variable puede ser representada por cualquier letra o literal.

**Ejemplos:**  $x, y, z, r, t, s, n$

- Por lo general las letras  $x, y$  y  $z$  se utilizan como incógnitas o variables.

Una constante se define como un número o un símbolo cuyo valor numérico es fijo y nunca cambia o varía.

**Ejemplos:**  $5, -4, 2, a, b, c$

- Por lo general, las primeras letras del alfabeto se emplean para representar constantes.

En la enseñanza de las Matemáticas es muy común que se emplee la letra " $x$ ", en particular al poner énfasis sobre el valor indefinido de una variable.

La importancia del lenguaje algebraico radica en que ayuda a describir y traducir situaciones del mundo real a esta forma de expresiones.

Es importante mencionar que para construir una expresión algebraica es necesario: en primer lugar, asignar variables a lo que se desea cuantificar, para lo cual se utilizan letras o literales que plantean la expresión deseada y recuerdan lo que representan cada una de ellas. En segundo lugar, es recomendable escribir el cálculo que se desea realizar utilizando las variables que se han escogido.

## 2.3 Clasificación de expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas se clasifican de acuerdo al número de términos algebraicos que la conforman según los siguientes tipos:

**a) Monomio:** un término algebraico.

- a)  $7xy$
- b)  $-0.5xy$
- c)  $4ab$
- d)  $-5xyz$
- e)  $52abc$
- f)  $3xz$



**Ejemplo**

**b) Binomio:** dos términos algebraicos.

- a)  $5x^2y + 2x^2y^3$
- b)  $4a^2b + 4a^3b^3$
- c)  $8m^3n^2 - 2m^2n^3$
- d)  $-4x + 3y$
- e)  $6x^2y^2z - 3xy^3$
- f)  $4x - 2xy$



**Ejemplo**

**c) Trinomio** o Polinomio de tres términos algebraicos.

- a)  $5x + 6y + 3z$
- b)  $4mn^2 + 2m^2n - 3mn$
- c)  $a^2 + b^2 + 3ab^3 + ab$
- d)  $-1 + ab + 3a^2b$
- e)  $-3xy^2z + 3x^2y^2z + x^2y^2z^3$
- f)  $x^3y^2 + xy^2 + 3xy$



**Ejemplo**

**d) Polinomio:** cuatro o más términos algebraicos.

- a)  $-7x^2 + 4x - 5xy + 1$
- b)  $5a^2 + 3ab - ab^2 - 2$
- c)  $6x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x + 9$
- d)  $8x^3 + 2x^2 - x + 1$



**Ejemplo**



**Ejemplo**

Clasificar las expresiones según el número de términos que contienen

| Expresión                                          | Clasificación                           |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\sqrt{3x^2y^3} + \frac{2}{5}x^3y^2 - \frac{x}{y}$ | Trinomio                                |
| $\frac{1}{x^2}$                                    | Monomio                                 |
| $3a - 2b$                                          | Binomio                                 |
| $\frac{1}{2}x^2y^2$                                | Monomio                                 |
| $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$                              | Expresión algebraica de cuatro términos |
| $\frac{3x}{2} + 4x^3 - 5x^2 + \sqrt{7x} - 10$      | Expresión algebraica de cinco términos  |



**Ejercicio**  
Módulo 4

Clasificar las expresiones según el número de términos que contienen

| Expresión                             | Clasificación |
|---------------------------------------|---------------|
| $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$           |               |
| $\frac{1}{3x}$                        |               |
| $4m - 2mn + \sqrt{7n} - 2m^2n^2 - 20$ |               |
| $3x + 2y + 5z$                        |               |
| $a^2 - b^2$                           |               |

## 2.4 Modelos matemáticos

En Matemáticas, un modelo se emplea para expresar relaciones o proposiciones a través de variables, parámetros, entidades y operaciones.

En Geometría, Estadística, Álgebra y otras ramas de las Matemáticas, se utilizan fórmulas para realizar diferentes cálculos, entre ellos los que se emplean para determinar las áreas de polígonos regulares, conocer el volumen de cuerpos geométricos, definir las relaciones métricas o las razones trigonométricas del triángulo. Por ejemplo, el volumen de una esfera puede calcularse por medio de la fórmula que relaciona el volumen con el radio:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

En Álgebra, la fórmula se define como una relación que se utiliza para simplificar cálculos, resolver una ecuación o factorizar polinomios. Por ejemplo, al resolver una ecuación cuadrática se emplea la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Un **modelo matemático** puede definirse como la construcción matemática, abstracta y simplificada, relacionada con una parte de la realidad y creada para un propósito particular.

Algunos ejemplos de modelos matemáticos son: una gráfica, una función, una ecuación o un sistema de ecuaciones planteado de alguna situación específica.

Las características de un modelo matemático dependerán de la situación a ser modelada y del problema planteado.

Los modelos matemáticos pueden estar integrados por operaciones con variables y constantes.

a) Para el cálculo del área  $A$  de un cuadrado de lado  $a$  se utiliza el modelo:  $A = aa = a^2$

b) Para el cálculo del perímetro  $p$  de un rectángulo de lados  $a$  y  $b$  se emplea el modelo:  
 $p = 2a + 2b$



**Ejemplo**

### a) Fórmulas

Una fórmula puede ser definida como:

El conjunto de términos matemáticos utilizados para resolver un problema para obtener una cantidad numérica específica.

a)  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

b)  $A = \pi r^2$

c)  $c^2 = a^2 + b^2$

d)  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$



**Ejemplo**

### b) Ecuaciones

La ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, conformadas por valores numéricos constantes y valores desconocidos (**incógnitas**) representados por medio de letras o símbolos (**valores variables**) relacionados mediante operaciones matemáticas.

Existen diferentes tipos de ecuaciones, por ejemplo lineales o de primer grado, cuadráticas o de segundo grado, de tercer grado, de cuarto grado, ecuaciones bicuadradas, ecuaciones de grado “ $n$ ”, racionales, irracionales, logarítmicas, trigonométricas y diferenciales.



**Ejemplo**

- a)  $3x = 81$
- b)  $2x - 14 = 26$
- c)  $x^2 + x - 6 = 0$
- d)  $2^{x+1} = 64$

### c) Funciones

La función es una relación entre un conjunto “ $x$ ”, llamado **dominio**, y otro conjunto de elementos “ $y$ ”, llamado **codominio**, de forma que a cada elemento “ $x$ ” del dominio le corresponde un único elemento  $f(x)$  del codominio, mismos que forman el **rango**.

Las funciones matemáticas también pueden referir situaciones cotidianas, de manera que permiten obtener valores como el número de metros cúbicos de agua potable consumidos en el período de un mes, el valor de un metro cuadrado en bienes raíces, predecir el momento en que será proyectada la sombra de un edificio según la hora del día, el costo de una llamada telefónica que depende de su duración, etcétera.



**Ejemplo**

El volumen de un gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura absoluta. Determinar un modelo matemático que exprese el volumen como una función de la temperatura

#### Solución

Sea  $V$  (en metros cúbicos) el volumen del gas cuya temperatura es  $x$  grados.

Entonces, por la definición de variación directamente proporcional, tenemos que el modelo matemático será:

$$V = kx$$

Donde  $k$  es una constante



**Ejemplo**

Un mayorista vende un producto por kilo (o fracción de kilo); si se ordenan no más de 10 kilos, el mayorista cobra \$20 por kilo. Sin embargo, para atraer órdenes mayores, cobra sólo \$18 por kilo si se ordenan más de 10 kilos. Determine un modelo matemático que exprese el costo total de la orden como función de la cantidad de kilos ordenados del producto.

#### Solución

Sea  $C$  (en pesos) el costo total de una orden de  $x$  kilos del producto.

Entonces,

$$c = \begin{cases} 20x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ 18x & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

### 3. Valor numérico

Es el proceso por el que se sustituyen valores numéricos asignados a las variables (literales) de una expresión algebraica. Sustituidos los valores, se realizan las operaciones correspondientes.

Para la evaluación numérica de una expresión algebraica es necesario considerar la jerarquía de operaciones vista en el segundo módulo.

#### 3.1 Expresiones algebraicas

Evaluar las siguientes expresiones algebraicas

a)  $2a^2bc^3$ , cuando  $a = 2, b = 3$  y  $c = 1$ .

##### Solución

Sustituyendo los valores de  $a, b$  y  $c$  en la expresión:

$$2(2)^2 \cdot (3) \cdot (1)^3 = 2(4) \cdot (3) \cdot (1) = 24$$

b)  $4\sqrt{bx^3}$ , cuando  $b = 8$  y  $x = 2$ .

##### Solución

Sustituyendo los valores de  $b$  y  $x$  en la expresión:

$$4\sqrt{(8)(2)^3} = 4\sqrt{(8)(8)} = 4(8) = 32$$

c)  $8\frac{a}{x} + \frac{5b^2}{y} - \frac{2a^2b}{x^2y}$ , cuando  $a = 1, b = 2, y = 4, x = 3$ .

##### Solución

Sustituyendo los valores de  $a, b$  y  $x$  en la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{8(1)}{3} + \frac{5(2)^2}{4} - \frac{2(1)^2(2)}{(3)^2(4)} &= \frac{8(1)}{3} + \frac{5(4)}{4} - \frac{2(1)(2)}{(9)(4)} = \frac{8}{3} + \frac{20}{4} - \frac{4}{36} = \frac{8}{3} + 5 - \frac{1}{9} = \\ &= \frac{24 + 45 - 1}{9} = \frac{68}{9} \end{aligned}$$



**Ejemplo**



**Ejercicio**  
Módulo 4

Obtener el valor numérico de la siguiente expresión  $\frac{2x^2 + 5y}{x - 3y}$  si  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

## 3.2 Fórmulas



### Ejemplo

a) Obtener el área de una circunferencia cuyo radio es 5 cm. Considera

$$A = \pi r^2 \quad \pi = 3.1416$$

$$A = \pi (5)^2 = 78.54 \text{ cm}^2$$

b) Obtener el volumen de una esfera cuyo radio es 5 cm.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi (5)^3 = 523.60 \text{ cm}^3$$



### Ejercicio

Módulo 4

Obtener el valor numérico de la siguiente expresión  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\text{Para los valores } \begin{cases} x_1 = 3 & x_2 = -2 \\ y_1 = 5 & y_2 = -7 \end{cases}$$



### Ejercicio

Módulo 4

El área  $A$  de un triángulo se puede calcular conociendo sus tres lados con la ley de Herón, dada por  $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

En la que  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las medidas de los lados del triángulo y  $s$  representa el semiperímetro del mismo.

Calcular el área de un triángulo si sus lados miden  $a = 15 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$  y  $c = 13 \text{ cm}$ .

## 4. Problemas de aplicación

El lado de un cuadrado mide  $(2x + 3)$  metros de lado. Determinar su perímetro en función de  $x$ .

$$(2x + 3) m$$



**Ejemplo**

### Solución

El perímetro de un cuadrado se obtiene mediante la fórmula  $P = 4l$  o  $P = l + l + l + l$ , donde  $l$  es la longitud de sus lados:

$$P = 4(2x + 3) m$$

$$P = 8x + 12 m$$

O bien:

$$P = (2x + 3) + (2x + 3) + (2x + 3) + (2x + 3) m$$

$$P = 8x + 12 m$$

Resolver las siguientes situaciones problema

a) La base de un rectángulo mide  $(x^2 - 5x + 1)$  metros y su altura  $(7x + 4)$  metros. Determinar su perímetro en función de  $x$ .

b) El lado de un cuadrado mide  $(x + 3)$  metros. Determinar su área en función de  $x$ .

c) La longitud de la base de un rectángulo equivale a  $(2x + 7)$  metros y su altura a  $(x - 5)$  metros. Determinar su área en función de  $x$ .

d) Determinar el área de un rombo, cuyas diagonales miden  $(2x + 4)$  y  $(x + 3)$ .



**Ejercicio**  
Módulo 4



### Ejemplo

Expresar en lenguaje algebraico: una tabla de nueve metros es cortada en dos pedazos. Un pedazo es tres metros más largo que otro. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?



### Solución

Es una tabla de nueve metros:

Largo = 9 m



La tabla es cortada en dos pedazos:



Primer pedazo      Segundo pedazo

Un pedazo es tres metros más largo.

Sea  $x$  la primera parte, es decir

Primer Pedazo:



$x$

Segundo pedazo es 3 m más largo:



$x + 3 \text{ m}$

Entonces:

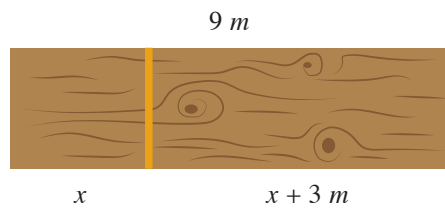


Tabla: primer pedazo más segundo pedazo =  $9\text{ m}$ .

Algebraicamente:  $x + (x + 3m) = 9m$

Simplificando:  $x + x + 3m = 9m$   
 $2x + 3m = 9m$

## Ejercicios adicionales

I. Subrayar la expresión algebraica que corresponda a la expresión escrita en lenguaje común:

1. La suma de un número, su doble y su triple es 42.

a)  $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 42$

b)  $x + y + z = 42$

c)  $x + 2x + 3x = 42$

d)  $x + x + 2 + x + 3 = 42$

2. La suma de tres números consecutivos es 61.

a)  $x + x + 1 + x + 2 = 61$

b)  $x + y + z = 61$

c)  $x + x + x = 61$

d)  $x + 2x + 3x = 61$

3. La mitad de un número.

a)  $\frac{x}{2}$

b)  $x^2$

c)  $x + x$

d)  $2x$

4. El cuadrado de la diferencia de dos números.

a)  $(a - b)^2$

b)  $a - b^2$

c)  $a^2 + b^2$

d)  $a^2 - b^2$

5. La suma de un número con su tercera parte.

a)  $x - \frac{x}{3}$

b)  $x + \frac{x}{3}$



c)  $3x + 3$

d)  $3x + \frac{x}{3}$

6. El recíproco de un número.

a)  $x^2$

b)  $\frac{1}{x}$

c)  $x + 1$

d)  $x$

7. El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

a)  $c^2 = a + b$

b)  $c^2 = a - b$

c)  $c^2 = a^2 + b^2$

d)  $c^2 = (a + b)^2$

8. Un número aumentado en 5 unidades.

a)  $5a$

b)  $5 - a$

c)  $a - 5$

d)  $a + 5$

9. El cociente de la suma entre la diferencia de dos cantidades.

a)  $(a + b)(a - b)$

b)  $(a + b) - (a - b)$

c)  $(a + b) + (a - b)$

d)  $(a + b) / (a - b)$

10. El doble producto de dos números.

a)  $-2xy$

b)  $2x - y$

c)  $x - 2y$

d)  $2xy$

11. En una granja hay pollos y cerdos, en total son 45 animales.

a)  $2xy = 45$

b)  $x/y = 45$

c)  $x + y = 45$

d)  $xy = 45$

12. El área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

a)  $A = 2(b + h)$

b)  $A = \frac{(bh)}{2}$

c)  $A = \frac{(b + h)}{2}$

d)  $A = 2b + 2h$

13. El cuadrado de un número.

a)  $2 + x$

b)  $2x$

c)  $x^2$

d)  $x - 2$

14. El promedio de tres números.

a)  $\frac{(x - y - z)}{3}$

b)  $\frac{(x + y + z)}{3}$

c)  $x + 2y + 3z$

d)  $3(x + y + z)$

15. El perímetro de un cuadrado.

a)  $P = 4a$

b)  $P = 4 - a$



c)  $P = a^2$

d)  $P = 4a^2$

16. El cubo de un número.

a)  $3n^3$

b)  $n^3$

c)  $3n$

d)  $n - 3$

17. El producto de la suma de dos números por su diferencia.

a)  $x(x - y)$

b)  $(x + y) - (x - y)$

c)  $(x + y)(x - y)$

d)  $xy$

18. El triple de la diferencia de dos números.

a)  $(a - b)^3$

b)  $3a - b$

c)  $3(a - b)$

d)  $a - 3b$

19. Un número disminuido en 3 es 19.

a)  $3x = 19$

b)  $x + 3 = 19$

c)  $x - 3 = 19$

d)  $x^3 = 19$

20. La suma de dos números cualesquiera.

a)  $g/f$

b)  $gf$

c)  $g - f$

d)  $g + f$

21. La diferencia de dos números cualesquiera.

a)  $h - k$

b)  $hk$

c)  $h/k$

d)  $h + k$

22. El cociente de dos números cualesquiera.

a)  $b/c$

b)  $b + c$

c)  $bc$

d)  $b - c$

23. El cuadrado del producto de tres números cualesquiera.

a)  $(abc)^2$

b)  $(2abc)^2$

c)  $(abc)^4$

d)  $2(abc)^2$

## II.

Un fabricante de cajas de cartón desea elaborar cajas abiertas a partir de piezas de cartón rectangulares de 25 cm por 43 cm, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. Determinar un modelo matemático que exprese el volumen ( $V$ ) de la caja como una función de la longitud ( $x$ ) del lado de los cuadrados que se recortan

2. Un envase cerrado de hojalata tiene la forma de un cilindro circular recto. Determine un modelo matemático que exprese el área ( $A$ ) de la superficie total del envase como una función del radio ( $r$ ) de la base y la altura ( $h$ ) del envase.

### Respuestas

1.  $V = x(25 - 2x)(43 - 2x)$

2.  $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$



III. Dadas las siguientes expresiones algebraicas, calcular el valor numérico, si:

$$x = -2, \quad y = 5, \quad z = 3$$

$$1. (2x + 3y)^2 - \frac{x^3}{3z} =$$

$$R. \frac{1097}{9}$$

$$2. \sqrt{x^2 y^3 + 2x - z} =$$

$$R. \sqrt{493}$$

$$3. \frac{3}{4} \left( x - 6yz + \frac{1}{2} z^2 - 5 \right) - \frac{2}{3} =$$

$$R. -\frac{1681}{24}$$

$$4. (x - 4)^2 + \sqrt{(y + 5)^2} =$$

$$R. 46$$

$$5. \frac{(z + 3)^2}{8} + \frac{(2x - y)^2}{10} =$$

$$R. -\frac{63}{5}$$

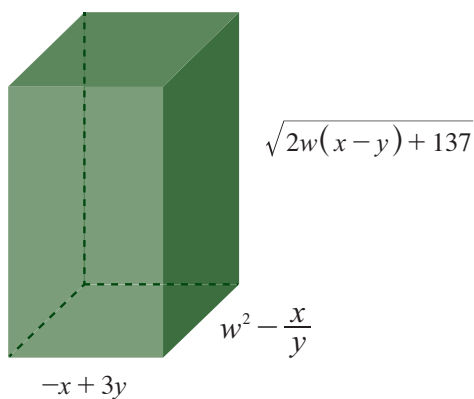
$$6. (z) \frac{xy}{(x - y)^2} + \frac{3}{5} =$$

$$R. -\frac{3}{245}$$

IV.

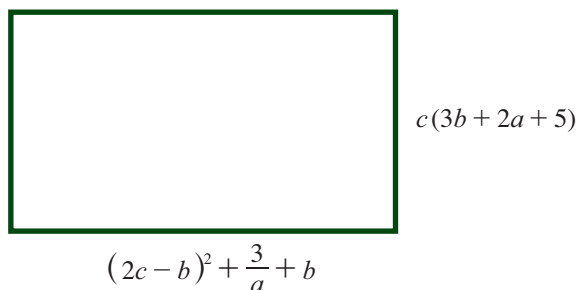
1. Calcular el volumen en centímetros cúbicos del siguiente prisma rectangular, si:

$$x = -3, \quad w = 7, \quad y = 5$$



$$V = 4,464 \text{ cm}^3$$

2. Determinar el área y perímetro del siguiente rectángulo, si  $a = \frac{3}{5}, b = -2, c = 6$



**Respuestas**

$$1. \text{Área} = \frac{1194}{5} u^2$$

$$2. \text{Perímetro} = \frac{2002}{5} u$$

## Bibliografía

Baldor, A. (1994), *Álgebra*, Publicaciones Cultural, Decima primera reimpresión, México.

Cuéllar, J. A. (2015) *Matemáticas I*, Mc Graw Hill Education, 4ª edición, México.

Ortiz, F., (2009). *Matemáticas Bachillerato General: Serie Integral por competencias*. México: Ed. Patria ISBN: 9786074381085

Osorio, J. M. et. al (2009). *Matemáticas 1 Enfoque por competencias bachillerato*. México: Ed. Santillana. ISBN: 9786070102691

## Mesografía

Barros, P. et. al. (2001) “*Libros Maravillosos, Serie Yakov Perelman*”, en línea web. Google. Disponible en: <http://www.librosmaravillosos.com> (consultada 16 de diciembre 2015)

## Índice de imágenes

### Portada / Portadilla

*Escuela de Atenas*, extraída de Transita el Mundo, URL: [https://transitaelmundo.files.wordpress.com/2014/08/l\\_escola\\_d\\_atenes\\_rafael\\_arist\\_til\\_plat.jpg](https://transitaelmundo.files.wordpress.com/2014/08/l_escola_d_atenes_rafael_arist_til_plat.jpg) consultado el 8 de junio de 2016.

### Módulo 1

*El agujero negro más joven de la galaxia* extraída de Libertad Digital, URL: <http://www.libertaddigital.com/ciencia-tecnologia/ciencia/2013-02-14/la-nasa-encuentra-un-agujero-negro-1276482322/> consultado el 26 de mayo de 2016.

### Módulo 2

*Roof Hafez Tomb*, extraída de Wikimedia Commons, URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Roof\\_hafez\\_tomb.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Roof_hafez_tomb.jpg) consultado el 8 de junio de 2016.

### Módulo 3

*Casino*, extraída de Li Casino Transportation, URL: <http://www.licasinotransportation.com/images/CASINO.jpg> consultado el 8 de junio de 2016.

### Módulo 4

Variables, elaboración propia, extraídas de Wikimedia Commons, URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/Main\\_Page](https://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page) consultado el 8 de junio de 2016.

# Directorio

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales  
Carlos Eduardo Barrera Díaz

**Rector**

Doctor en Ciencias Computacionales  
José Raymundo Marcial Romero

**Secretario de Docencia**

Doctora en Ciencias Sociales  
Martha Patricia Zarza Delgado

**Secretaria de Investigación y Estudios Avanzados**

Doctor en Ciencias de la Educación  
Marco Aurelio Cienfuegos Terrón

**Secretario de Rectoría**

Doctora en Humanidades  
María de las Mercedes Portilla Lujá

**Secretaria de Difusión Cultural**

Doctor en Ciencias del Agua  
Francisco Zepeda Mondragón

**Secretario de Extensión y Vinculación**

Doctor en Educación  
Octavio Crisóforo Bernal Ramos

**Secretario de Finanzas**

Doctora en Ciencias Económico Administrativas  
Eréndira Fierro Moreno

**Secretaria de Administración**

Doctora en Ciencias Administrativas  
María Esther Aurora Contreras Lara Vega

**Secretaria de Planeación y Desarrollo Institucional**

Doctora en Derecho  
Luz María Consuelo Jaimes Legorreta

**Abogada General**

Doctora en Ciencias de la Educación  
Yolanda Eugenia Ballesteros Senties

**Secretaria Técnica de la Rectoría**

Licenciada en Comunicación  
Ginarely Valencia Alcántara

**Directora General de Comunicación Universitaria**

Doctor en Ciencias Sociales  
Luis Raúl Ortiz Ramírez

**Director General de Centros Universitarios y Unidades Académicas  
Profesionales Región A**

Doctora en Ciencias de la Educación  
Sandra Chávez Marín

**Directora General de Centros Universitarios y Unidades Académicas  
Profesionales Región B**

Doctora en Investigación Educativa  
Eva Lilia García Escobar

**Directora de Estudios de Nivel Medio Superior**

# Planteles Dependientes de la Escuela Preparatoria

Doctor en Tecnología e Innovación de la Educación

Arturo Mejía Zamora

***Plantel “Lic. Adolfo López Mateos”***

Maestro en Ciencias de la Educación

Erick Vieyra Méndez

***Plantel “Nezahualcóyotl”***

Maestro en Administración Pública y Gobierno

Raúl Juárez Toledo

***Plantel “Cuauhtémoc”***

Doctora en Ciencias de la Educación

María del Rocío García de León Pastrana

***Plantel “Ignacio Ramírez Calzada”***

Doctor en Ciencias de la Educación

Alejandro Morales Velázquez

***Plantel “Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana”***

Maestra en Ciencias de la Educación

Sofía Sandoval Trejo

***Plantel “Texcoco”***

Maestro en Docencia

Erick Rodolfo Sánchez Cortés

***Plantel “Sor Juana Inés de la Cruz”***

Maestra en Ciencias Ambientales

Janette Jaimes García

***Plantel “Dr. Pablo González Casanova”***

Doctora en Tecnología e Innovación en la Educación

Mónica Garduño Suárez

***Plantel “Isidro Fabela Alfaro”***

Licenciada en Comunicación

Ana Vianey Suárez Castro

***Plantel “Mtro. José Ignacio Pichardo Pagaza”***