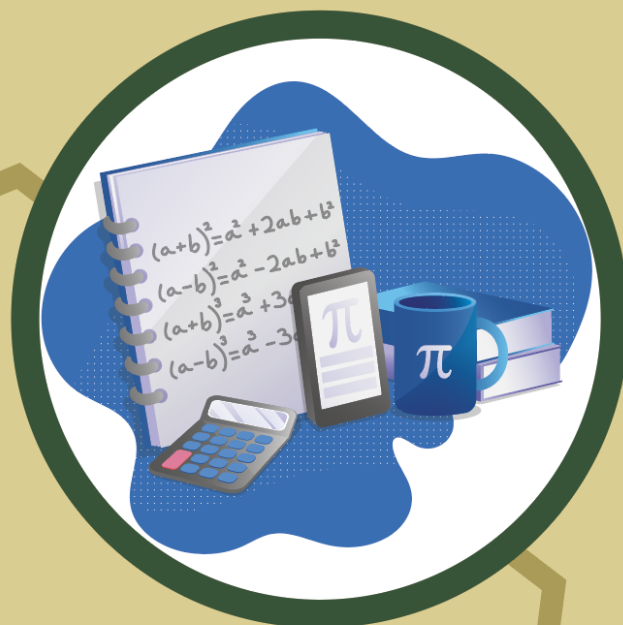




Universidad Autónoma
del Estado de México



Álgebra

Libro de texto basado en competencias

Ricardo Valdes Camarena · Alejandro Alvarado Catzoli
Domingo Hernández García · Edgar Jesús Rubelo Velásquez
Alfonso Samuel Soteno Tahuilán · José Luis Gerardo Valencia Aguilar
María Magdalena Villegas Carstensen
Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova

2°
Semestre

Álgebra

Libro de texto basado en competencias

DIRECCIÓN DE PUBLICACIONES UNIVERSITARIAS
Editorial de la Universidad Autónoma del Estado de México

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Luja
Secretaria de Difusión Cultural

Doctor en Administración
Jorge Eduardo Robles Álvarez
Director de Publicaciones Universitarias

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Estudios de Nivel Medio Superior

$$3x + 2y = 6$$

$$2x + 3y = 9$$

$$x = 0$$

$$y = 3$$

$$6x + 4y = 12$$

$$-6x - 9y = -27$$

$$y = 0$$

$$x = 4.5$$

$$-3y = -15$$

$$y = \frac{15}{3}$$

$$y = 5$$

$$3x + 2(+3) = 6$$

$$3x = 6 - 6$$

$$x = 0$$

ÁLGEBRA

Libro de texto basado en competencias

Ricardo Valdes Camarena

Alejandro Alvarado Catzoli

Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova

Domingo Hernández García

Edgar Jesús Rubelo Velásquez

Alfonso Samuel Soteno Tahuilán

José Luis Gerardo Valencia Aguilar

María Magdalena Villegas Carstensen

Segunda edición, febrero 2024

ÁLGEBRA

Libro de texto basado en competencias

Autores

Ricardo Valdes Camarena

Plantel "Lic. Adolfo López Mateos", de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Alejandro Alvarado Catzoli

Plantel "Isidro Fabela Alfaro", de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova

Plantel "Ignacio Ramírez Calzada", de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Domingo Hernández García

Plantel "Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana", de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Edgar Jesús Rubelo Velásquez

Plantel "Dr. Pablo González Casanova", de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Alfonso Samuel Soteno Tahuilán

Plantel "Nezahualcóyotl", de la Escuela Preparatoria de la UAEM

José Luis Gerardo Valencia Aguilar

Plantel "Cuauhtémoc", de la Escuela Preparatoria de la UAEM

María Magdalena Villegas Carstensen

Plantel "Cuauhtémoc", de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Universidad Autónoma del Estado de México

Av. Instituto Literario 100 Ote.

Toluca, Estado de México

C. P. 50000

Tel: (52) 722 277 38 35 y 36

<http://www.uaemex.mx>

El contenido de este material es responsabilidad de los autores, así como el tratamiento basado en competencias realizado a los libros de texto. Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra, sin el consentimiento previo y por escrito del editor. La Universidad Autónoma del Estado de México se deslinda de cualquier acción legal derivada de este material.

® Derechos reservados, 2017

ISBN: 978-607-633-767-7

Hecho en México

Responsable del Programa de Diseño y Producción Editorial: L. D. G. Miguel Ángel Conzuelo Endeje

Corrección de estilo: Eugenio González

Portada e interiores: Víctor del Ángel | poligamografico.com



MENSAJE

A través de su historia, la Universidad Autónoma del Estado de México ha tenido como uno de sus objetivos fundamentales lograr que el estudiantado reciba una educación basada en el libre pensamiento, apelando a un sentido científico. La Escuela Preparatoria de la UAEM continuará mostrándose como un punto de inflexión para la comunidad estudiantil por la calidad de la educación que se ofrece al tiempo que se enseña a adquirir conocimientos, valores, habilidades y destrezas que favorezcan el entendimiento de nuestro entorno social y ambiental.

La responsabilidad de la Universidad Autónoma del Estado de México es asegurar que la educación que se imparte en la Escuela Preparatoria contribuya a ampliar el horizonte personal y profesional de los estudiantes. El enfoque para la apropiación del conocimiento parte de aprovechar la experiencia de vida y desde la autonomía de pensamiento y la reflexión lograr una comprensión más amplia de la realidad.

El material educativo que tienes en tus manos ha sido elaborado colegiadamente entre especialistas de cada una de las áreas del conocimiento. La creatividad, el pensamiento crítico y reflexivo, así como el espíritu científico del claustro de docencia e investigación se reúne en esta antología con el fin de que te acerques al conocimiento con una mirada crítica. Este ejemplar ha sido elaborado con el fin de establecer un aprendizaje dialógico que estimule tu curiosidad, que te sirva como guía, y que invariablemente te provoque pasión por el conocimiento.

El objetivo es lograr que recibas una educación integral e incluyente que incida de manera positiva en tu trayectoria escolar. Por ello es importante que asumas un compromiso personal, empeño y dedicación que te permita apropiarte del conocimiento.

Patria, Ciencia y Trabajo

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales

Carlos Eduardo Barrera Díaz

Rector

Índice

Módulo 1. Expresiones algebraicas..... 11

1. Definición de término y expresión algebraica.....	13
1.1 Clasificación de las expresiones algebraicas.....	14
1.2 Grado absoluto y grado relativo de un término.....	15
1.3 Polinomio	16
1.3.1 Grado de un polinomio.....	16
1.4 Términos semejantes.....	16
2. Leyes de exponentes y radicales.....	17
2.1 Potencia enésima.....	17
2.2 Leyes de los exponentes.....	18
2.3 Raíz enésima.....	21
2.4 Leyes de los radicales.....	21
3. Operaciones con expresiones algebraicas.....	22
3.1 Adición	22
3.2 Sustracción.....	25
3.3 Multiplicación.....	26
3.4 División.....	30
3.5 Potenciación.....	35
3.6 Radicación	37
4. Productos notables	44
5. Factorización.....	48
5.1 Factor común.....	49
5.2 Agrupación.....	50
5.3 Diferencia de cuadrados	51
5.4 Diferencia de cubos.....	52
5.5 Suma de cubos.....	53
5.6 Trinomio simple.....	54
5.7 Trinomio general.....	55
6. Expresiones algebraicas racionales.....	56
6.1 Definición.....	56
6.2 Clasificación de expresiones algebraicas racionales.....	56
6.3 Operaciones con expresiones algebraicas racionales.....	56
7. Problemas de aplicación.....	60

Módulo 2. Ecuación y desigualdad lineal..... 73

1. Datos de una situación problema.....	75
1.1 Datos, símbolos matemáticos, variables y constantes.....	75
2. Definición de ecuación lineal.....	75
3. Propiedades de igualdades.....	76
4. Solución y representación gráfica de una ecuación lineal.....	81
5. Desigualdad lineal.....	87
5.1 Propiedades sobre desigualdades	87
5.2 Intervalos	88
5.2.1 Intervalo de longitud finita.....	88
5.2.2 Intervalos de longitud infinita.....	89
6. Inecuaciones.....	90
6.1 Desigualdad condicional.....	90
6.2 Desigualdad absoluta.....	90
7. Valor absoluto.....	92
7.1 Propiedades de valor absoluto.....	93
7.2 Valor absoluto en las desigualdades.....	94
8. Sistema de dos ecuaciones con dos variables.....	97
8.1 Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.....	97
8.1.1 Método de suma y resta.....	97
8.1.2 Método de sustitución.....	99
8.1.3 Método de igualación.....	100
8.1.4 Método gráfico.....	101
9. Problemas de aplicación.....	103
Ejercicios adicionales	105

Módulo 3. Ecuación cuadrática..... 111

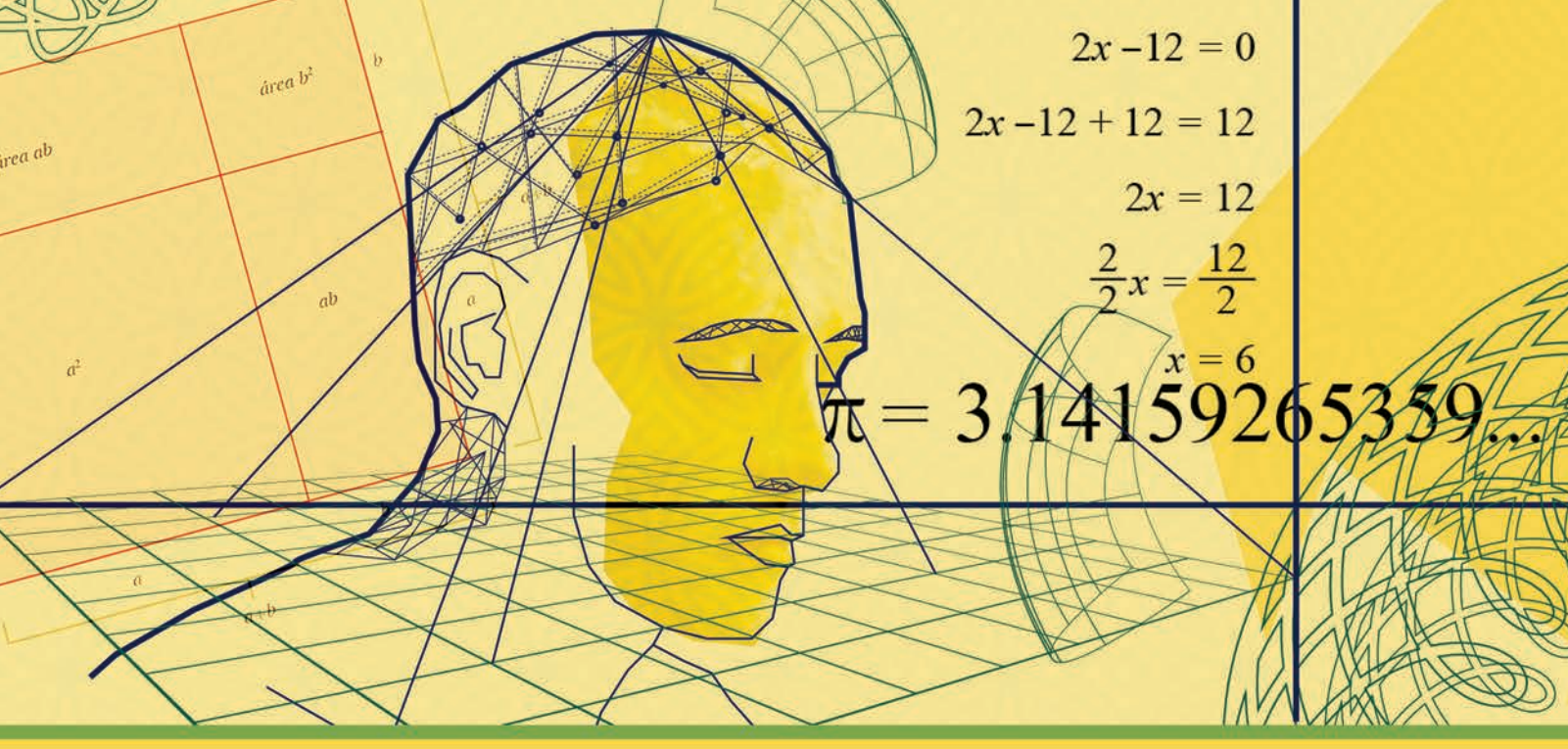
1. Concepto de ecuación cuadrática.....	113
1.1 Definición de ecuación cuadrática.....	113

2. Métodos para la solución de ecuaciones cuadráticas con una variable.....	113
2.1 Método de factorización	113
2.1.1 Ecuaciones completas.....	113
2.1.2 Ecuaciones incompletas.....	115
2.2 Trinomio cuadrado perfecto.....	117
2.3 Método de fórmula general.....	119
3. Representación gráfica de una ecuación cuadrática.....	122
4. Desigualdad cuadrática	125
4.1 Solución y representación gráfica de una desigualdad cuadrática.....	125
5. Valor absoluto.....	127
6. Problemas de aplicación.....	128
Ejercicios adicionales.....	131

Módulo 4. Funciones..... 133

1. Funciones.....	135
1.1 Producto cartesiano.....	137
2. Definición de función.....	137
2.1 Regla de correspondencia.....	138
2.2 Funciones reales de variable real.....	139
2.3 Notación de función.....	139
3. Clasificación de funciones.....	140
3.1 Funciones algebraicas.....	140
3.2 Funciones trascendentales.....	141
4. Dominio y rango de una función.....	143
4.1 Regla de correspondencia, dominio y rango.....	144
5. Representación gráfica de una función.....	144
Ejercicios adicionales.....	153

6. Operaciones con funciones.....	154
6.1 Suma de funciones.....	154
6.2 Resta de funciones.....	154
6.3 Multiplicación de funciones.....	154
6.4 División de funciones.....	154
7. Función inversa de una función.....	157
7.1 Definición de una función.....	157
7.2 Obtención de la función inversa de una función.....	158
7.3 Composición de funciones.....	161
Ejercicios adicionales.....	165
8. Problemas de aplicación.....	166
Ejercicios adicionales.....	175
Referencias.....	180



Módulo 1

Expresiones algebraicas



Competencias genéricas y atributos¹

1. Se conoce y se valora a sí mismo, aborda problemas o retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
 - 1.1. Enfrenta las dificultades que se le presentan, es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
 - 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
 - 4.5. Maneja las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para poder obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
 - 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
 - 5.2. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

¹Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).

5.6. Utiliza las TIC para procesar e interpretar información.

8. Participa y colabora de una manera efectiva en equipos diversos.

8.1. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

8.2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.



Competencias disciplinares básicas y extendidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las TIC.



Introducción

La Aritmética surgió por la necesidad que tenían los pueblos primitivos de medir el tiempo y contar sus posesiones; el origen del Álgebra es muy posterior, puesto que debieron transcurrir muchos siglos para que el Hombre llegara al concepto abstracto de número, su fundamento. La obra más antigua que se conserva sobre el Álgebra es la de Diofanto de Alejandría (siglo IV d. C.), sin embargo, el gran desarrollo experimentado por esta materia se debió sobre todo a los matemáticos árabes y, muy en particular, a Al-Khwarizmi (siglo IX d.C.), quien sentó sus bases tal como la conocemos hoy día.

El Álgebra fue originalmente concebida como una generalización y extensión de la Aritmética y, para lograrlo, se introdujeron símbolos (usualmente letras) para representar cantidades conocidas o desconocidas. En Europa, esta ciencia fue introducida por los árabes en el siglo X y, en el siglo XVII, René Descartes le dio un gran impulso al lenguaje matemático pues simplificó y completó la estructura simbólica del Álgebra, adaptando las primeras letras del abecedario para indicar cantidades conocidas o constantes ($a, b, c, d, \dots$) y las últimas letras para las cantidades desconocidas, incógnitas o variables (u, v, w, x, y, z).

1. Definición de término y expresión algebraica

El **Álgebra** es la rama de las Matemáticas que estudia cantidades de un modo más general. Por ejemplo, para el cálculo del área de un triángulo se utiliza la fórmula:

$$A = \frac{bh}{2}$$

Donde A representa el área, b la base y h la altura. A , b y h varían según sea el triángulo de que se trate y por eso se les llama *variables*. En este caso el denominador es una *constante*.

Otro ejemplo es la fórmula para calcular el perímetro (longitud) de una circunferencia:

$$P = 2\pi r$$

Donde el perímetro P y el radio r son las variables. El número 2 y π son constantes.

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y literales (constantes y variables) unidos por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Algunos ejemplos de expresiones algebraicas son:

$$3x^2 + 4x - 7, \quad \frac{4 - 2xy}{3xy^2z}, \quad 8xy + \frac{2x}{\sqrt{5y}}, \quad \frac{5x^2 - 4x - 11}{x^3 - 8}$$

La expresión algebraica más simple es el término algebraico.

Un **término algebraico** es la mínima expresión algebraica irreducible y está formado por un conjunto de números y literales asociados entre sí solo mediante operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación.

Son ejemplos de términos algebraicos:

$$x, 2x^3, 5, \frac{6}{x}, -4x^2y^3, 3xyz, \sqrt{7xy^5}, mn$$

Un término algebraico está formado por coeficiente, literales y exponentes, como se indica a continuación:

Diagrama de un término algebraico $5x^2y^4z^3$ con flechas que indican sus partes:

- Coeficiente:** 5
- Literales:** x, y, z
- Exponentes:** 2, 4, 3

Para ilustrar el concepto de término, se muestran dos ejemplos de términos algebraicos en los que se identifican cada uno de sus elementos:

Término	$2x^2y^3z^5$	$-3m^5n$
Coeficiente	2	-3
Literales	x, y, z	m, n
Exponentes	2, 3, 5	5, 1
Signo	+	-



Ejercicio
Módulo 1

Identifica en los siguientes términos algebraicos cada uno de sus elementos.

Término	$-5pq^2r^6$	$\frac{2}{3} a^5b^4c^2$
Coeficiente		
Literales		
Exponentes		

1.1. Clasificación de expresiones algebraicas

Una expresión algebraica se clasifica de acuerdo al número de términos que contiene.

Un monomio es una expresión algebraica formada por un solo término.

Ejemplos:

$$2x^3, \quad 3xy^2, \quad 5abc, \quad 7mn^4, \quad \sqrt{6x}$$

Un binomio es una expresión algebraica formada por la adición o sustracción de dos monomios.

Ejemplos:

$$b + c, \quad 3x^2 - 9x, \quad 6m - n, \quad x - y$$

Un trinomio es una expresión algebraica formada por la adición o sustracción de tres monomios.

Ejemplos:

$$a + b + c, \quad x^2 + 2xy + y^2, \quad x^6 + x^4 + x$$

Una expresión algebraica formada por cuatro términos se denomina expresión algebraica de cuatro términos, y así sucesivamente.

Ejemplo:

Clasifica las expresiones siguientes de acuerdo al número de términos que contienen.

Expresión	Clasificación
$6xy + 2x^3y^4 - 3\frac{x}{y}$	Trinomio
$\frac{1}{x^2}$	Expresión algebraica de un término
$3a - 2b$	Binomio
$\frac{3x}{2} + 4x^3 - 5x^2 + \sqrt{x} - 10$	Expresión algebraica de cinco términos



Basado en
competencias

Clasifica las expresiones siguientes de acuerdo al número de términos que contienen.

Expresión	Clasificación
$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	
$\frac{1}{2x}$	
$4m - 3mn + \sqrt{7n} - 2m^2n^2 - 20$	
$x + y + z$	



Ejercicio
Módulo 1

1.2 Grado absoluto y grado relativo de un término

Un término algebraico tiene dos tipos de grados: absoluto y relativo.

El **grado absoluto** se obtiene al sumar los exponentes de las variables que aparecen en el término.

Ejemplo:

Determinar el grado absoluto del término $3^5 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot z^3$

Solución:

Su grado absoluto es 8, debido a que la suma de los exponentes de las variables es:
 $2 + 3 + 3 = 8$ (el exponente de 3 no se incluye porque el 3 no es variable).

El **grado relativo**, o con relación a una variable, es el dado por cada uno de los exponentes de las variables consideradas en forma individual.

Ejemplo:

Obtener los grados relativos del término $3^5 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot z^3$

Solución:

Con respecto a x es de segundo grado

Con respecto a y es de tercer grado

Con respecto a z es de tercer grado

Obtén los grados relativos y el grado absoluto del término $7^3 \cdot a^5 \cdot bc^8$



Ejercicio
Módulo 1

1.3 Polinomio

Un polinomio es una expresión algebraica en la cual los exponentes de las variables son números enteros positivos.

Son ejemplos de polinomios.

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 2, \quad 2m - n^5, \quad a^2 - ab - a^3 b^2$$

Se debe tener en cuenta que todos los polinomios son expresiones algebraicas, pero no todas las expresiones algebraicas son polinomios.

1.3.1 Grado de un polinomio

El grado de un polinomio corresponde al mayor de los grados absolutos de los términos que lo forman.

Ejemplos:

Polinomio de grado uno o de primer grado: $2x - 3$

Polinomio de grado dos o de segundo grado: $x^2 + 3x - 6$

Polinomio de grado tres o de tercer grado: $4x^3 + 5x^2 - 8x + 3$

Así hasta llegar a un polinomio de grado n , cuya forma general es:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Donde cada $a_i \in \mathbb{R}$ para $i=0, 1, \dots, n$

1.4 Términos semejantes

Dos o más términos son **semejantes** cuando tienen igual grado relativo en cada una de sus variables y, por ende, el mismo grado absoluto. Solamente pueden diferir en sus coeficientes.

Ejemplos:

Indica si los términos mostrados en cada inciso son o no semejantes.

a) $-5xy^4z^3, 10xy^4z^3$

b) $-5x^2y, 0.25x^2y, \frac{1}{3}x^2y$

c) $2xy^2z, -11xy^3z$

Solución:

- a) **Sí** son términos semejantes, porque tienen el mismo grado relativo en cada una de sus variables; es decir, en x es 1, en y es 4 y en z es 3 y en consecuencia el grado absoluto en ambos es 8.
- b) **Sí** son términos semejantes, porque los tres tienen el mismo grado relativo en cada una de sus variables; es decir, en x es 2 y en y es 1 y en consecuencia el grado absoluto en ambos es 3.



- c) **No** son términos semejantes, porque, aunque el grado relativo de las variables x y z es el mismo, el grado relativo de y en el primero es diferente al del segundo y, por ende, el grado absoluto también difiere pues para el primero es 4 y para el segundo es 5.

Indica si los términos mostrados en cada inciso son o no semejantes.

- a) $-9x^2yz^3, 12xy^3z^4$ _____
- b) $-6mn^2, 1.3mn^2, \frac{1}{3}mn^2$ _____
- c) $11abc, -10abc$ _____

1.5 Valor numérico de expresiones algebraicas.

El **valor numérico** de una expresión algebraica se obtiene sustituyendo en las literales los valores que se les han asignado y realizando las operaciones y simplificaciones correspondientes.

Ejemplo: Obtener el valor numérico de las siguientes expresiones:

- a) $2xy^2 + 3x - y$ si $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$
- b) $\frac{5x^2y + 4x^4y^3}{3xy}$ si: $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

2. Leyes de exponentes y radicales

2.1 Potencia enésima

Si n es un número entero positivo, la **potencia enésima** de un número real a , denotada por a^n , se define como el producto de n factores, siendo cada uno de ellos iguales a a . Esto es:

$$a^n = \underbrace{(a)(a)(a) \cdots (a)}_{n \text{ veces}}$$

Donde:

- a es la base
 n es el exponente
 a^n es la potencia enésima de a

Ejemplo:

Desarrolla las siguientes potencias.

- a) 2^5
 b) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$
 c) $(a + b)^4$
 d) x^6

Solución:

- a) $2^5 = (2)(2)(2)(2)(2) = 32$
 b) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{27}{125}\right)$
 c) $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$
 d) $(x)^6 = (x)(x)(x)(x)(x)(x)$



Ejercicio
Módulo 1

Desarrolla las siguientes potencias.

- a) $5^4 =$
- b) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 =$
- c) $(2x + 3y)^3 =$
- d) $a^2 =$

2.2 Leyes de los exponentes

Si $a, b \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{Z}$

Ley 1. $a^n a^m = a^{n+m}$

Ley 2. $(a^n)^m = a^{nm}$

Ley 3. $(ab)^n = a^n b^n$

Ley 4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ para $a \neq 0$

Ley 5. $a^0 = 1$

Ley 6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ para $b \neq 0$

Ley 7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Las leyes 1, 2 y 3 pueden generalizarse a tres o más factores. Por ejemplo, al generalizar la 1 se obtiene lo siguiente

$$a^n a^m a^p \dots a^r = a^{n+m+p+\dots+r}$$

Ejemplos:

- 1. $x^2 x^3 = x^{2+3} = x^5$ Ley 1
- 2. $(y^4)^2 = y^8$ Ley 2
- 3. $(ab)^5 = a^5 b^5$ Ley 3
- 4. $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$ Ley 4
- 5. $7^0 = 1$ Ley 5
- 6. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$ Ley 6
- 7. $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ Ley 7

Las leyes de los exponentes se utilizan para simplificar expresiones, como en los ejemplos siguientes:

Ejemplos:

Simplifica las siguientes expresiones.

- a) $(x^2 y^3)^5 =$



$$b) \left(\frac{x^3}{y^4} \right)^3 =$$

$$c) (3 a^6 b^0)^2 =$$

$$d) \frac{y^3}{y^7} =$$

$$e) y^4 y^6 z^{-3} =$$

$$f) (a^5 b^2)^{-3} =$$

$$g) \frac{x^5 x^3}{y^2 y^4} =$$

$$h) \frac{(a^7 b^8)^2}{(a^3 b^2)^3} =$$

Solución:

$$a) (x^2 y^3)^5 = (x^2)^5 (y^3)^5 = x^{10} y^{15}$$

Leyes 3 y 2

$$b) \left(\frac{x^3}{y^4} \right)^3 = \frac{(x^3)^3}{(y^4)^3} = \frac{x^9}{y^{12}}$$

Leyes 6 y 2

$$c) (3a^6 b^0)^2 = (3a^6 (1))^2 = 3^2 (a^6)^2 (1)^2 = 9a^{12}$$

Leyes 5, 3 y 2

$$d) \frac{y^3}{y^7} = y^{3-7} = y^{-4} = \frac{1}{y^4}$$

Leyes 4 y 7

$$e) y^4 y^6 z^{-3} = y^{4+6} z^{-3} = y^{10} z^{-3} = y^{10} \frac{1}{z^3} = \frac{y^{10}}{z^3}$$

Leyes 1 y 7

$$f) (a^5 b^2)^{-3} = (a^5)^{-3} (b^2)^{-3} = a^{-15} b^{-6} = \frac{1}{a^{15}} \frac{1}{b^6} = \frac{1}{a^{15} b^6}$$

Leyes 3, 2 y 7

$$g) \frac{x^5 x^3}{y^2 y^4} = \frac{x^8}{y^6}$$

Ley 1

$$h) \frac{(a^7 b^8)^2}{(a^3 b^2)^3} = \frac{(a^7)^2 (b^8)^2}{(a^3)^3 (b^2)^3} = \frac{a^{14} b^{16}}{a^9 b^6} = a^5 b^{10}$$

Leyes 3, 2 y 4

Existen expresiones más laboriosas que igualmente requieren del uso de dos o más leyes.

Ejemplos:

Simplifica las siguientes expresiones dejando exponentes positivos.

$$a) \left(\frac{8x^{-2}y^{-1}}{2xy^{-4}} \right)^{-3}$$

$$b) \left(\frac{3bc^5}{a^2} \right)^{-2} \left(\frac{a^5b}{5c} \right)^3$$

$$c) \left(\frac{3a^{-2}}{b} \right)^2 \left(\frac{2a}{b^3c} \right)^{-1} \left(\frac{b^{-1}}{3a} \right)^{-2}$$

$$d) \left(\frac{x^2y^{-3}}{z^3} \right)^{-5} \left(\frac{5x^{-4}y^2}{z^{-1}} \right)^3$$

$$e) \left(\frac{7x^{-3}y^3z^2}{2a^{-4}b^3c^{-2}} \right)^{-3} \left(\frac{a^{-4}b^{-2}c^4}{3x^{-5}y^{-1}z^{-3}} \right)^{-2}$$

Solución:

$$a) \left(\frac{8x^{-2}y^{-1}}{2xy^{-4}} \right)^{-3} = (4x^{-2-1}y^{-1-(-4)})^{-3} = (4x^{-3}y^3)^{-3} = 4^{-3}x^9y^{-9} = \frac{x^9}{64y^9}$$

$$b) \left(\frac{3bc^5}{a^2} \right)^{-2} \left(\frac{a^5b}{5c} \right)^3 = \left(\frac{3^{-2}b^{-2}c^{-10}}{a^{-4}} \right) \left(\frac{a^{15}b^3}{5^3c^3} \right) = \left(\frac{3^{-2}a^{15}bc^{-10}}{5^3a^{-4}c^3} \right) = \frac{3^{-2}a^{19}bc^{-13}}{5^3} = \frac{a^{19}b}{3^25^3c^{13}} = \frac{a^{19}b}{1125c^{13}}$$

$$c) \left(\frac{3a^{-2}}{b} \right)^2 \left(\frac{2a}{b^3c} \right)^1 \left(\frac{b^{-1}}{3a} \right)^{-2} = \left(\frac{3^2a^{-4}}{b^2} \right) \left(\frac{2^1a^{-1}}{b^{-3}c^{-1}} \right) \left(\frac{b^2}{3^{-2}a^{-2}} \right) = \frac{3^4a^{-3}c^1}{2^1b^{-3}} = \frac{81b^3c^1}{2a^3}$$

$$d) \left(\frac{x^2y^{-3}}{z^3} \right)^{-5} \left(\frac{5x^{-4}y^2}{z^{-1}} \right)^3 = \frac{x^{-10}y^{15}}{z^{-15}} \cdot \frac{5^3x^{-12}y^6}{z^{-3}} = \frac{5^3x^{-22}y^{21}}{z^{-18}} = \frac{5^3y^{21}z^{18}}{x^{22}} = \frac{125y^{21}z^{18}}{x^{22}}$$

$$e) \left(\frac{7x^{-3}y^5z^2}{2a^4b^3c^{-2}} \right)^{-3} \left(\frac{a^4b^{-2}c^4}{3x^{-5}y^{-1}z^{-3}} \right)^{-2} = \frac{7^{-3}x^9y^{-15}z^{-6}}{2^{-3}a^{12}b^{-9}c^6} \cdot \frac{a^8b^4c^{-8}}{3^{-2}x^{10}y^2z^6} = \frac{8b^{13}}{343a^4c^{14}xy^{11}z^{12}}$$

Simplifica las siguientes expresiones dejando exponentes positivos.

$$a) \left(\frac{3x}{y} \right)^2 \left(\frac{2y}{3x} \right)^3 =$$

$$b) \frac{(2x^3y^{-2})^2}{x^{-2}y^3} =$$

$$c) \frac{(2x^{-2}y^3z^{-4})^3 3^3x^3y^2z}{(3^2xyz^2)^{-2}} =$$

Resultado:

$$a) \frac{8y}{3x}$$

$$b) \frac{4x^8}{y^7}$$

$$c) \frac{17496y^{13}}{xz^7}$$



Basado en
competencias



Ejercicio
Módulo 1

2.3 Raíz enésima

Si a y b son dos números reales y n un número entero positivo, la raíz enésima de a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si y solo si} \quad b^n = a$$

En la que:

$\sqrt[n]{a}$ es la raíz enésima de a

$\sqrt{}$ es el radical

a es el subradical o radicando

n es el índice de la raíz

Si n es par, entonces a debe ser positivo ($a \geq 0$).

Si n es impar, entonces a puede ser cualquier número real $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

$$\sqrt{16} = 4 \quad \text{ya que} \quad 4^2 = 16$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{ya que} \quad 3^4 = 81$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{ya que} \quad 2^3 = 8$$

Las raíces cuadrada con n par tienen dos raíces: una positiva y una negativa. Por ejemplo $\sqrt{16}$ también es -4 ya que $(-4)^2 = 16$.

En general, se dice que calcular la raíz de un número consiste en obtener una cantidad que, multiplicada por sí misma el número de veces que indique el índice del radical, sea igual al subradical.

2.4 Leyes de los radicales

Si a y b son dos números reales positivos, m y n dos enteros positivos, entonces las leyes de los radicales son:

$$\text{a) } \sqrt[n]{a^m} = (a)^{\frac{m}{n}}$$

$$\text{b) } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\text{c) } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\text{d) } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

La ley 1 se emplea para expresar un radical como exponente racional y viceversa.

Ejemplos:

Escribir en forma exponencial o radical, según corresponda las expresiones indicadas:

a) $\sqrt[5]{x} = x^{1/5}$

b) $\sqrt[3]{y^2} = y^{2/3}$

c) $\sqrt[3]{z^{12}} = z^{12/3} = z^4$

d) $a^{3/2} = \sqrt{a^3}$

e) $y^{-1/3} = \frac{1}{y^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$



Ejercicio
Módulo 1



Basado en
competencias

a) $\sqrt[3]{xx^2} =$

b) $\sqrt[3]{x^{-6}} =$

c) $\sqrt[3]{x^{-2}} =$

d) $y^{4/6} =$

Solución:

a) x

b) $\frac{1}{x^2}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\sqrt[3]{y^2}$

3. Operaciones con expresiones algebraicas

3.1. Adición

La adición de dos o más expresiones algebraicas se realiza sumando los términos semejantes.

La adición de términos semejantes se obtiene sumando únicamente los coeficientes de dichos términos, permaneciendo igual las variables y los exponentes.

Ejemplo:

La suma de $5xy$ con $7xy$ es $12xy$, o bien:

$$5xy + 7xy = 12xy$$

La suma de dos o más expresiones algebraicas se puede realizar en forma horizontal o en forma vertical, como se muestra a continuación.

Ejemplo:

Efectúa la adición de las expresiones mostradas en cada inciso.

a) $(3x^3 + 5x^2 - 4x + 2) + (8x^3 + x^2 + 9x - 6) =$

b) $(14a^2b + 11ab - 7ab^2) + (13a^2b + 10ab - ab^2) =$

c) $(2m + 3n) + (5m - 6n) + (12n - 15m) =$

d) $(q^2r + r^2 + q) + (3q + 4q^2r + 2r) + (6q + 3r - 7) =$

e) $\left(-4x^2y + 3xy^2 - \frac{1}{2}\right) + \left(9xy^2 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{5}{3}\right) =$

Resultado:

- a) En este caso, efectuaremos la adición en forma horizontal. Se agrupan los términos semejantes y se operan los coeficientes (a la adición de términos semejantes también se le conoce como simplificar o reducir términos semejantes):

$$\begin{aligned} &= (3x^3 + 8x^3) + (5x^2 + x^2) + (-4x + 9x) + (2 - 6) \\ &= 11x^3 + 6x^2 + 5x - 4 \end{aligned}$$

- b) Realizaremos este caso en forma vertical, para ello se sitúan en una misma columna los términos semejantes y se reducen. Así entonces:

$$\begin{array}{r} 14a^2b + 11ab - 7ab^2 \\ 13a^2b + 10ab - ab^2 \\ \hline 27a^2b + 21ab - 8ab^2 \end{array}$$

- c) Agrupamos términos **semejantes en forma horizontal** y simplificamos:

$$\begin{aligned} &= (2m + 5m - 15m) + (3n - 6n + 12n) \\ &= -8m + 9n \end{aligned}$$

- d) Alineamos en forma vertical los términos semejantes y los reducimos:

$$\begin{array}{r} q^2r + r^2 + q \\ 4q^2r \quad + 3q + 2r \\ \quad + 6q + 3r - 7 \\ \hline 5q^2r + r^2 + 10q + 5r - 7 \end{array}$$

- e) Agrupamos términos semejantes en forma horizontal y simplificamos:

$$\begin{aligned} &= \left(-4x^2y - \frac{1}{4}x^2y\right) + \left(3xy^2 + 9xy^2\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right) \\ &= -\frac{17}{4}x^2y + 12xy^2 + \frac{7}{6} \end{aligned}$$



Ejercicio
Módulo 1

Efectúa la adición de las expresiones mostradas en cada inciso.

a) $(3x^2 + 2x - 3) + (5x^2 - 3x + 8) =$

b) $(4a^2b - 3ab + 2a^2 - 3b^2) + (2ab + 2a^2 + 3b^2 - 2a^2b) =$

c) $(5x + 2y) + (5x - 7y) + (14x - 11y) =$

d) $(q^2r^2 + r^2 + q^2) + (3q + 4q^2r^2 + 2r) + (6q^2 + 3r^2 + 7q) =$

e) $\left(7x^2y + \frac{2}{5}xy^2 - 3\right) + (5xy^2 - 4x^2y + 5) =$

Resultado :

a) $8x^2 - x + 5$

_) $2a^2b - ab + 4a^2$

c) $24x - 16y$

d) $5q^2r^2 + 4r^2 + 7q^2 + 10q + 2r$

e) $3x^2y + \frac{27}{5}xy^2 + 2$



3.2. Sustracción

La sustracción de expresiones algebraicas se transforma en adición al cambiar el signo de cada uno de los términos del sustraendo y, al igual que la adición, se puede realizar tanto horizontalmente como verticalmente.

Ejemplo:

Efectúa las siguientes sustracciones.

a) $(x^2 - 3x + 8) - (16x^2 - 18x + 15) =$

b) $(5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3) - (3x^4 + 4x^3 - 8x + 10) =$

c) $(5m^3n + 2m^2n^2 - 7mn^3 + 8m^3) - (6m^2n^2 - 2mn^3 + 11n^3 - 15m^3n) =$

d) $(9a^5b + 3a^4b^2 - a^3b^3) - (11a^5b - 14a^3b^3) + (2a^5b - 12a^4b^2 + 3a^3b^3) =$

Solución:

- a) La realizaremos en forma horizontal cambiando el signo a todos los términos del sustraendo:

$$= x^2 - 3x + 8 - 16x^2 + 18x - 15$$

Agrupamos términos semejantes y se reducen:

$$= (x^2 - 16x^2) + (-3x + 18x) + (8 - 15) \\ = -15x^2 + 15x - 7$$

- b) La realizaremos en forma vertical cambiando el signo a todos los términos del sustraendo y reduciendo los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3 \\ -3x^4 - 4x^3 + 8x - 10 \\ \hline 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 7x - 7 \end{array}$$

- c) La realizaremos en forma horizontal, cambiando el signo a todos los términos del sustraendo:

$$= 5m^3n + 2m^2n^2 - 7mn^3 + 8m^3 - 6m^2n^2 + 2mn^3 - 11n^3 + 15m^3n$$

Agrupamos términos semejantes y simplificamos:

$$= (5m^3n + 15m^3n) + (2m^2n^2 - 6m^2n^2) + (-7mn^3 + 2mn^3) + 8m^3 - 11n^3 \\ = 20m^3n - 4m^2n^2 - 5mn^3 + 8m^3 - 11n^3$$

- d) La realizaremos en forma vertical, cambiando el signo a todos los términos del sustraendo y reduciendo los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 9a^5b + 3a^4b^2 - a^3b^3 \\ -11a^5b + 14a^3b^3 \\ 2a^5b - 12a^4b^2 + 3a^3b^3 \\ \hline -9a^4b^2 + 16a^3b^3 \end{array}$$



Ejercicio
Módulo 1

Efectúa las siguientes sustracciones.

a) $(5x^4 - 6x^2 - 10x + 84) - (14x^4 + 13x^3 - 16x + 5) =$

b) $(9x^3 - 12x - 13) - (5x^3 - 2x^2 + 6) - (7x^3 + 8x^2 - 17x + 20) =$

c) $(m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - 4n^3) - (6n^3 - 2n^2m + 14nm^2 - 11m^3) =$

d) $(5a^5b + 2a^4b^2 - 8a^3b^3) - (19a^5b - 4a^3b^3 + a^4b^2) =$

Solución:

a) $-9x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 6x + 79$

b) $-3x^3 - 6x^2 + 5x + 1$

c) $12m^3 - 17m^2n + 5mn^2 - 10n^3$

d) $-14a^5b + a^4b^2 - 4a^3b^3$

3.3. Multiplicación

La multiplicación de expresiones algebraicas se presenta en tres casos de acuerdo al número de términos que contiene cada factor.

a) Multiplicación de monomios

Para obtener el producto de dos o más monomios, se multiplican los coeficientes (aplicando la regla de los signos de la multiplicación de números reales) y las literales se multiplican, aplicando las leyes de los exponentes.

Ejemplos:

Efectúa la multiplicación de los siguientes monomios.

a) $(6xy)(-4xy) =$

b) $(8x^2y^3)(2x^3y^2) =$

c) $\left(-\frac{1}{2}ab^5c^3\right)\left(\frac{2}{3}a^2b^4c\right) =$

d) $(5mn)(-7m^3n)(-3mn^5) =$

Solución:

a) $(6)(-4)xyxy =$

$-24x^2y^2$

Se multiplican coeficientes

Se aplica ley 1 de los exponentes



b) $(8)(2)(x^2x^3y^3y^2) =$

$$16x^5y^5$$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)aa^2b^5b^4c^3c =$
 $\left(\frac{1}{3}\right)a^3b^9c^4$

d) $(5)(-7)(-3)mm^3m nnn^5 =$

$$105m^5n^7$$

Efectúa la multiplicación de los siguientes monomios.

a) $(2x^2yz)(3xy^2z^3) =$

b) $(-2ab)(-3a^2b^3) =$

c) $\left(\frac{2}{3}ab^4c^2\right)\left(\frac{1}{5}a^2b^4c\right) =$

d) $(5r^3s^5)(-7r^2s^4)(6r^2s^3) =$



b) Multiplicación de monomio por polinomio

En este caso, se multiplica el monomio por cada término del polinomio (propiedad distributiva).

Ejemplos:

Efectúa las siguientes multiplicaciones.

a) $2x(x^2 + 5x - 4) =$

b) $5(3x - 2y + 6z) =$

c) $-2a^2(-5a + 2a^3) =$

d) $x(3x - 5) =$

e) $5a^2b^3(2a^3bc + 3a^2c - 4b^2c^2) =$

Resultado:

a) $(2x)(x^2) + (2x)(5x) + (2x)(-4) =$

$$2x^3 + 10x^2 - 8x$$

Se aplica la propiedad distributiva

Se multiplican los monomios

b) $(5)(3x) + (5)(-2y) + (5)(6z) =$

$$15x - 10y + 30z$$

c) $(-2a^2)(-5a) + (-2a^2)(2a^3) =$

$$10a^3 - 4a^5$$

d) $(x)(3x) + (x)(-5) =$

$$3x^2 - 5x$$

e) $(5a^2b^3)(2a^3bc) + (5a^2b^3)(3a^2c) + (5a^2b^3)(-4b^2c^2) =$

$$10a^5b^4c + 15a^4b^3c - 20a^2b^5c^2$$



Ejercicio
Módulo 1

Efectúa las siguientes multiplicaciones.

a) $3xy(2x^2 + 3xy - 5y^2) =$

b) $-2ab(a - 3ab + b) =$

c) $3x(5x - 8) =$

d) $7x(x^2 + 6x) =$

e) $a^2b^3c^2(3a^3bc + 5a^2bc - 4ab^2c^2) =$

c) Multiplicación de polinomios

La multiplicación de dos polinomios se efectúa multiplicando cada uno de los términos del primer polinomio por todos los términos del segundo polinomio, después, se reducen los términos semejantes y, al igual que la adición y sustracción, se puede efectuar tanto en forma horizontal como vertical. Cuando se tienen tres polinomios, se multiplican dos cualesquiera de ellos y el resultado se multiplica por el restante.

Ejemplo:

Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios.

a) $(3x + 2)(3x - 9) =$

b) $(5x - 3)(x^2 + x - 8) =$

c) $(4x - 2y)(x^2 - xy + 7y^2) =$

d) $(x^3 - 11x + 2)(x^2 + 3x - 4) =$

e) $(x - 2)(x - 3)(x + 5) =$

f) $(m^2 - 2mn + n^2)(m - n) + (m^2 - 6mn + n^2)(4m - 5n) =$

Solución:

a) Efectuaremos la multiplicación en forma horizontal:

$$\begin{aligned} &= 3x(3x - 9) + 2(3x - 9) \\ &= 3x(3x) + 3x(-9) + 2(3x) + 2(-9) \\ &= 9x^2 - 27x + 6x - 18 \\ &= 9x^2 - 21x - 18 \end{aligned}$$

b) Realizaremos la multiplicación en forma vertical, disponiendo los productos parciales de manera que queden en una misma columna los términos semejantes para reducirse después:

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 8 \\ \times \quad 5x - 3 \\ \hline 5x^3 + 5x^2 - 40x \\ -3x^2 - 3x + 24 \\ \hline 5x^3 + 2x^2 - 43x + 24 \end{array}$$

c) Efectuaremos la multiplicación en forma horizontal:

$$\begin{aligned} &= 4x(x^2 - xy + 7y^2) - 2y(x^2 - xy + 7y^2) \\ &= 4x(x^2) + 4x(-xy) + 4x(7y^2) - 2y(x^2) - 2y(-xy) - 2y(7y^2) \\ &= 4x^3 - 4x^2y + 28xy^2 - 2x^2y + 2xy^2 - 14y^3 \\ &= 4x^3 - 6x^2y + 30xy^2 - 14y^3 \end{aligned}$$

d) Efectuándola en forma vertical tenemos:

$$\begin{array}{r} x^3 \quad \quad - 11x \quad + 2 \\ \quad x^2 \quad + 3x \quad - 4 \\ \hline x^5 \quad \quad - 11x^3 \quad + 2x^2 \\ + 3x^4 \quad \quad - 33x^2 \quad + 6x \\ \quad - 4x^3 \quad \quad + 44x \quad - 8 \\ \hline x^5 + 3x^4 - 15x^3 - 31x^2 + 50x - 8 \end{array}$$

e) Multiplicamos los dos primeros polinomios y el producto resultante lo multiplicamos por el tercero:

$$\begin{array}{r} x \quad - 2 \\ x \quad - 3 \\ \hline x^2 \quad - 3x \\ \quad - 2x \quad + 6 \\ \hline x^2 \quad - 5x \quad + 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 \quad + 5x \quad + 6 \\ x \quad + 5 \\ \hline x^3 \quad - 5x^2 \quad + 6x \\ \quad + 5x^2 \quad - 25x \quad + 30 \\ \hline x^3 \quad \quad - 19x \quad + 30 \end{array}$$

f) Multiplicamos las parejas de factores y los productos los sumamos:

$$\begin{array}{r} m^2 \quad - 2mn \quad + n^2 \\ m \quad - n \\ \hline m^3 \quad - 2m^2n \quad + mn^2 \\ \quad - m^2n \quad + 2mn^2 \quad - n^3 \\ \hline m^3 \quad - 3m^2n \quad + 3mn^2 \quad - n^3 \end{array} \quad \begin{array}{r} m^2 \quad - 6mn \quad + n^2 \\ 4m \quad - 5n \\ \hline 4m^3 \quad - 24m^2n \quad + 4mn^2 \\ \quad - 5m^2n \quad + 30mn^2 \quad - 5n^3 \\ \hline 4m^3 \quad - 29m^2n \quad + 34mn^2 \quad - 5n^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} m^3 \quad - 3m^2n \quad + 3mn^2 \quad - n^3 \\ 4m^3 \quad - 29m^2n \quad + 34mn^2 \quad - 5n^3 \\ \hline 5m^3 \quad - 32m^2n \quad + 37mn^2 \quad - 6n^3 \end{array}$$



Ejercicio
Módulo 1

Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios.

a) $(3x + 2)(x + 5) =$

b) $(x - 2)(x^2 + 5x - 3) =$

c) $(y^2 - 3)(y^2 + 4y + 2) =$

d) $(y^2 - 3y - 1)(y^3 + 2y + 2) =$

e) $(m + k)(2m - k)(m - k) =$

f) $(2a^2 - 3ab + 5b^2)(a + b) + (a^2 + 5ab + b^2)(3a + 4b) =$

Resultado:

a) $3x^2 + 17x + 10$

b) $x^3 + 3x^2 - 13x + 6$

c) $y^4 + 4y^3 - y^2 - 12y - 6$

d) $y^5 - 3y^4 + y^3 - 4y^2 - 8y - 2$

e) $2m^3 - m^2k - 2mk^2 + k^3$

f) $5a^3 + 8a^2b - 15ab^2 + 9b^3$

3.4. División

La división de dos expresiones algebraicas se presenta en tres casos.

a) División de monomios

Al dividir monomios se aplica, en los coeficientes, la regla de los signos de la división de números reales y, en las literales, la ley 4 de las leyes de los exponentes.



Ejemplo:

Efectúa las siguientes divisiones de monomios.

a) $\frac{6x}{3} = 2x$

b) $\frac{m^3}{m} = m^2$

c) $\frac{8x^2y^3}{2xy} = 4xy^2$

d) $\frac{-30x^3y^2}{6x^2} = -5xy^2$

e) $\frac{-15a^3b^2}{-3a^2b^2} = 5a$

Efectúa las siguientes divisiones de monomios.

a) $\frac{12x}{4} =$

b) $\frac{b^5}{b} =$

c) $\frac{-12x^3y^2z}{3xy} =$

d) $\frac{12x^2y^5}{6y^2} =$

e) $\frac{-18a^3b^4c^2}{-6a^3b^2c^2} =$



b) División de un polinomio entre un monomio

Para obtener el cociente, cuando el divisor está formado por un solo término, se divide cada término del dividendo entre el divisor efectuando las divisiones resultantes de monomios.

Ejemplo:

Realiza las siguientes divisiones.

a) $\frac{10x + 15}{5} = \frac{10x}{5} + \frac{15}{5} = 2x + 3$

b) $\frac{x^4 + 2x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} = x^2 + 2$

c) $\frac{2a^2 + 4a^3 - 6a^5}{2a^2} = \frac{2a^2}{2a^2} + \frac{4a^3}{2a^2} - \frac{6a^5}{2a^2} = 1 + 2a - 3a^3$

d) $\frac{14x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 5x}{2x} = \frac{14x^5}{2x} - \frac{6x^3}{2x} + \frac{8x^2}{2x} - \frac{5x}{2x} = 7x^4 - 3x^2 + 4x - \frac{5}{2}$

e) $\frac{12m^4n^3 - 4m^3n^2 + 9m^2n - 5mn}{3mn} = \frac{12m^4n^3}{3mn} - \frac{4m^3n^2}{3mn} + \frac{9m^2n}{3mn} - \frac{5mn}{3mn} = 4m^3n^2 - \frac{4m^2n}{3} + 3m - \frac{5}{3}$



Realiza las siguientes divisiones.

a) $\frac{12x + 15}{3} =$

b) $\frac{a^5 + 3a^3}{a^2} =$

c) $\frac{4x^3 + 6x^2 - 8x}{2x} =$

d) $\frac{6x^4y - 9x^3y^2 + 12x^2y^3 - 6xy^4}{3xy} =$

e) $\frac{3m^3n^2 + 5m^2n - 6m^5n^2}{4m^2n} =$

c) División de un polinomio entre otro polinomio

En este caso se aplica un proceso conocido como algoritmo de la división, que consiste en los pasos que se indican a continuación:

1. El dividendo y el divisor se ordenan en forma decreciente respecto a las potencias de una misma variable. En caso de faltar algún término, se escribe el término faltante con coeficiente cero, o bien, se deja un espacio.
2. El primer término del dividendo se divide entre el primer término del divisor y así se obtiene el primer término del cociente.
3. El primer término del cociente se multiplica por cada término del divisor, y el producto se resta del dividendo (lo que equivale a cambiar el signo de los términos del producto). El resultado de dicha resta es el primer dividendo parcial que se complementa bajando uno o más términos del dividendo según se necesite.
4. Se divide el primer término del dividendo parcial entre el primer término del divisor para obtener el segundo término del cociente.



5. Se multiplica el segundo término del cociente por todo el divisor y el producto se resta del primer dividendo parcial. El resultado de la resta es el segundo dividendo parcial, que se complementa bajando uno o más términos del dividendo según se necesite.
6. Se continúa el procedimiento en la misma forma hasta obtener un residuo igual a cero (división exacta) o un dividendo parcial cuyo grado sea menor al del divisor (división inexacta).

Para comprobar la división:

7. Si el residuo es cero, el divisor se multiplica por el cociente obteniéndose como producto el dividendo.
8. Si existe residuo, éste se suma al producto del divisor por el cociente para obtener el dividendo.

Ejemplos:

Realiza las divisiones indicadas.

a) $(3a^2 - 10ab + 3b^2) \div (3a - b)$

b) $(4x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x - 7) \div (2x - 1)$

c) $(m^4 - n^4) \div (m + n)$

d) $(3x^3 - 5x^2y - 8xy^2 - 2y^3) \div (3x + y)$

Solución:

- a) Las potencias de la variable tanto en el dividendo como en el divisor ya están ordenadas en forma decreciente. Entonces, siguiendo el algoritmo de la división, la operación quedaría como sigue:

$$\begin{array}{r}
 \overline{a-3b} \\
 3a-b \overline{) 3a^2 - 10ab + 3b^2} \\
 \underline{-3a^2 + ab} \\
 0 - 9ab + 3b^2 \\
 \underline{9ab - 3b^2} \\
 0
 \end{array}$$

$$\frac{3a^2}{3a} = a$$

$$\frac{-9ab}{3a} = -3b$$

- b) Como en el inciso anterior las potencias de x ya están ordenadas en forma decreciente. La operación, entonces, quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r}
 \overline{2x^3 + 2x^2 - x + 1} \\
 2x-1 \overline{) 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x - 7} \\
 \underline{-4x^4 + 2x^3} \\
 0 + 4x^3 - 4x^2 \\
 \underline{-4x^3 + 2x^2} \\
 0 - 2x^2 + 3x \\
 \underline{+2x^2 - x} \\
 0 + 2x - 7 \\
 \underline{-2x + 1} \\
 -6
 \end{array}$$

$$\frac{4x^4}{2x} = 2x^3$$

$$\frac{4x^3}{2x} = 2x^2$$

$$\frac{-2x^2}{2x} = -x$$

$$\frac{2x}{2x} = 1$$

c) La disposición de la operación es de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}
 m + n \overline{) \begin{array}{r} m^3 - m^2n + mn^2 - n^3 \\ m^4 - n^4 \\ \hline -m^4 - m^3n \\ \hline 0 - m^3n \\ m^3n + m^2n^2 \\ \hline 0 m^2n^2 \\ - m^2n^2 - mn^3 \\ \hline 0 - mn^3 - n^4 \\ mn^3 + n^4 \\ \hline 0 \end{array} } \\
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{m^4}{m} &= m^3 \\
 \frac{-m^3n}{m} &= -m^2n \\
 \frac{m^2n^2}{m} &= mn^2 \\
 \frac{-mn^3}{m} &= -n^3
 \end{aligned}$$

d) En este caso, las potencias de x son las que están ordenadas en forma decreciente:

$$\begin{array}{r}
 3x + y \overline{) \begin{array}{r} x^2 - 2xy - 2y^2 \\ 3x^3 - 5x^2y - 8xy^2 - 2y^3 \\ \hline -3x^3 - x^2y \\ \hline 0 - 6x^2y - 8xy^2 \\ 6x^2y + 2xy^2 \\ \hline 0 - 6xy^2 - 2y^3 \\ 6xy^2 + 2y^3 \\ \hline 0 \end{array} } \\
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3x^3}{3x} &= x^2 \\
 \frac{-6x^2y}{3x} &= -2xy \\
 \frac{-6xy^2}{3x} &= -2y^2
 \end{aligned}$$



Realiza las divisiones indicadas:

a) $(20a^2 - 23ab + 6b^2) \div (4a - 3b) =$

b) $(5x^4 - 2x^3 - 15x^2 - 9) \div (x - 2) =$

c) $(x^2 - y^2) \div (x + y) =$

d) $(4x^3 - 4x^2y - 16xy^2 + 16y^3) \div (2x - 4y) =$

Solución:

- a) cociente $5a - 2b$ residuo: 0
 b) cociente $5x^3 + 8x^2 + x + 2$ residuo: -7
 c) cociente $x - y$ residuo: 0
 d) cociente $2x^2 + 2xy - 4y^2$ residuo: 0

3.5. Potenciación

Una expresión algebraica, elevada a una potencia entera y positiva, indica que se multiplica por sí misma las veces que indica el exponente.

Ejemplo:

Desarrolla las potencias:

- a) $(x + 2)^4 =$
 b) $(2c - 3d)^3 =$
 c) $(a - b + c - d)^2 =$

Solución:

- a) La potencia 4 indica que se debe efectuar el producto $(x + 2)(x + 2)(x + 2)(x + 2)$. El resultado se obtiene multiplicando término a término y simplificando.

$$\begin{array}{r}
 x+2 \\
 \hline
 x+2 \\
 +2x+4 \\
 \hline
 x^2+2x \\
 \hline
 x^2+4x+4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^2+4x+4 \\
 \hline
 x+2 \\
 2x^2+8x+8 \\
 \hline
 x^3+4x^2+4x \\
 \hline
 x^3+6x^2+12x+8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^3+6x^2+12x+8 \\
 \hline
 x+2 \\
 2x^3+12x^2+24x+16 \\
 \hline
 x^4+6x^3+12x^2+8x \\
 \hline
 x^4+8x^3+24x^2+32x+16
 \end{array}$$

- b) La potencia 3 indica que se debe efectuar el producto $(2c - 3d)(2c - 3d)(2c - 3d)$.

$$\begin{array}{r}
 2c - 3d \\
 \hline
 2c - 3d \\
 4c^2 - 6cd \\
 \hline
 -6cd + 9d^2 \\
 4c^2 - 12cd + 9d^2 \\
 \hline
 2c - 3d \\
 8c^3 - 24c^2d + 18cd^2 \\
 \hline
 -12c^2d + 36cd^2 - 27d^3 \\
 8c^3 - 36c^2d + 54cd^2 - 27d^3
 \end{array}$$

c) Efectuaremos el producto $(a - b + c - d)(a - b + c - d)$.

$$\begin{array}{rrrr}
 a & -b & +c & -d \\
 a & -b & +c & -d \\
 \hline
 a^2 & -ab & +ac & -ad \\
 & -ab & & +b^2 -bc +bd \\
 & & +ac & -bc +c^2 -cd \\
 & & & -ad +bd -cd +d^2 \\
 \hline
 a^2 & -2ab & +2ac & -2ad +b^2 -2bc +2bd +c^2 -2cd +d^2
 \end{array}$$



Ejercicio
Módulo 1

Desarrolla las potencias.

a) $(x + y)^3 =$

b) $(3m - 2n)^2 =$

c) $(x + y + z)^2 =$

Solución:

a) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

b) $9m^2 - 12mn + 4n^2$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

3.6. Radicación

Una expresión que contiene radicales está simplificada cuando dentro del radical no hay variables repetidas y, además, los exponentes de las variables y constantes del subradical son menores que el índice de la raíz.

Cuando alguna variable o constante del subradical se encuentra elevada a un exponente mayor al índice de la raíz, se descompone como el producto de dos potencias de la misma base, en la cual un exponente es el múltiplo más cercano y menor que el índice de la raíz y el otro es menor que el índice.

En los siguientes ejemplos aplicaremos lo anterior junto a las leyes de los radicales:

$$1. \sqrt[n]{a^m} = (a)^{\frac{m}{n}}$$

$$2. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$3. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$4. \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Ejemplo:

Simplifica las siguientes expresiones.

$$a) \sqrt[3]{x^{17}}$$

$$b) \sqrt{81x^8y^{-12}}$$

$$c) \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{40}b^{63}}}}$$

Solución:

- a) En este caso, descompondremos x^{17} como $x^{15}x^2$, ya que 15 es el múltiplo de 3 más cercano y menor a 17 y 2 es menor que el índice de la raíz. Posteriormente, aplicamos las leyes 2 y 1 de radicales para simplificar el radical:

$$\sqrt[3]{x^{17}} = \sqrt[3]{x^{15}x^2} = \sqrt[3]{x^{15}} \sqrt[3]{x^2} = x^{15/3} \sqrt[3]{x^2} = x^5 \sqrt[3]{x^2}$$

- b) Aquí descompondremos el 81 en factores primos, es decir, $81 = 3^4$; las potencias de x y y no es necesario descomponerlas ya que son múltiplos del índice del radical. Finalmente, aplicamos las leyes 2 y 1 de los radicales y la 7 de exponentes para simplificar el radical:

$$\sqrt{81x^8y^{-12}} = \sqrt{3^4x^8y^{-12}} = \sqrt{3^4} \sqrt{x^8} \sqrt{y^{-12}} = 3^{4/2} x^{8/2} y^{-12/2} = 3^2 x^4 y^{-6} = \frac{3^2 x^4}{y^6}$$

- c) Aquí aplicaremos la ley 4 de los radicales; después descomponemos tanto a a como a b en dos partes como en el inciso a) y, finalmente, aplicamos las leyes 2 y 1 de radicales:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{40}b^{63}}} &= \sqrt[3]{a^{30}a^{10}b^{60}b^3} = \sqrt[3]{a^{30}b^{60}a^{10}b^3} = \sqrt[3]{a^{30}b^{60}}\sqrt[3]{a^{10}b^3} \\ &= a^{30/30}b^{60/30}\sqrt[3]{a^{10}b^3} = ab^2\sqrt[3]{a^{10}b^3}\end{aligned}$$



Ejercicio
Módulo 1

Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\sqrt[5]{x^{11}} =$

b) $\sqrt[3]{8a^9b^6} =$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{15}y^{28}}} =$

Resultado:

a) $x^2\sqrt[5]{x}$

b) $2a^3b^2$

c) $xy^2\sqrt[12]{x^3y^4}$

Por otra parte, se dice que dos radicales son **semejantes** si después de que han sido simplificados constan del mismo subradical y el mismo índice y solo difieren en el coeficiente. Por ejemplo $2\sqrt[3]{5}$ y $-3\sqrt[3]{5}$ son radicales semejantes.

La **suma algebraica de radicales semejantes** se efectúa como la de términos semejantes, es decir, se suman únicamente sus coeficientes y el resultado se multiplica por el radical común.

Ejemplo:

Efectua las sumas indicadas.

a) $\sqrt{48} - 2\sqrt{3} + \sqrt{8} - 5\sqrt{50}$

b) $\sqrt[3]{27ab^3} - \sqrt[3]{64a^3b} - \sqrt[3]{216ab^3} + \sqrt[3]{27a^3b}$

Solución:

- a) Simplificamos los radicales descomponiendo los subradicales en sus factores primos, aplicando leyes 2 y 1 de radicales y sumando finalmente los radicales semejantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{48} - 2\sqrt{3} + \sqrt{8} - 5\sqrt{50} &= \\ \sqrt{2^4(3)} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2^3} - \sqrt{(2)5^2} &= \\ \sqrt{2^4}\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2^2} - \sqrt{5^2}\sqrt{2} &= \\ 2^{4/2}\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2^2}\sqrt{2} - 5^{2/2}\sqrt{2} &= \\ 2^2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2^{2/2}\sqrt{2} - 5\sqrt{2} &= \end{aligned}$$

$$4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} =$$

$$2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$$

b)

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{27ab^3} - \sqrt[3]{64a^3b} - \sqrt[3]{216ab^3} + \sqrt[3]{27a^3b} = \\ & \sqrt[3]{3^3ab^3} - \sqrt[3]{2^6a^3b} - \sqrt[3]{2^33^3ab^3} + \sqrt[3]{3^3a^3b} = \\ & \sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{b^3}\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2^6}\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{b^3}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b} = \\ & 3^{3/3}b^{3/3}\sqrt[3]{a} - 2^{6/3}a^{3/3}\sqrt[3]{b} - 2^{3/3}3^{3/3}b^{3/3}\sqrt[3]{a} + 3^{3/3}a^{3/3}\sqrt[3]{b} = \\ & 3b\sqrt[3]{a} - 2^2a\sqrt[3]{b} - 2(3)b\sqrt[3]{a} + 3a\sqrt[3]{b} = \\ & 3b\sqrt[3]{a} - 4a\sqrt[3]{b} - 6b\sqrt[3]{a} + 3a\sqrt[3]{b} = \\ & -3b\sqrt[3]{a} - a\sqrt[3]{b} \end{aligned}$$

Efectua las sumas indicadas.

a) $2\sqrt[3]{56} + 5\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{7} =$

b) $\sqrt{100xy^2} + \sqrt{49x^2y} - \sqrt{25xy^2} - \sqrt{9x^2y} =$

Resultado:

a) $3\sqrt[3]{7} + 7\sqrt[3]{3}$

b) $5y\sqrt{x} + 4x\sqrt{y}$

Para **multiplicar o dividir dos radicales** primero se reducen al mismo índice, en caso de que sea necesario, expresando el producto o cociente en un solo radical y luego se aplican las leyes correspondientes de los radicales.

Ejemplos:

Simplifica las expresiones.

a) $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{7} =$

b) $\sqrt{x}\sqrt{x} =$



$$c) \sqrt[4]{3x^5y^6z^2} \sqrt[4]{27x^3y^2z^{10}} =$$

$$d) \frac{\sqrt[5]{32x^{13}y^8z^9}}{\sqrt[5]{x^3y^{18}z^4}} =$$

$$e) \sqrt[3]{3a^4b} \frac{\sqrt[3]{9a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2b^8}} =$$

Solución:

- a) El *mcm* de los índices 3 y 2 es 6. Por tanto, convertiremos cada radical al índice 6:

$$\sqrt[3]{5} = 5^{1/3} = 5^{2/6} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt{7} = 7^{1/2} = 7^{3/6} = \sqrt[6]{7^3} = \sqrt[6]{343}$$

$$\sqrt[3]{5} \sqrt{7} = \sqrt[6]{25} \sqrt[6]{343} = \sqrt[6]{8575}$$

$$b) \sqrt{x} \sqrt{x} = \sqrt{xx} = \sqrt{x^2} = x^{2/2} = x \quad (\text{Estrictamente } \sqrt{x^2} = |x|)$$

- c) Se aplican las leyes correspondientes de los radicales y exponentes expresando el producto en un solo radical y se simplifica la expresión dividiendo el exponente entre el índice de la raíz:

$$\sqrt[4]{3x^5y^6z^2} \sqrt[4]{27x^3y^2z^{10}} = \sqrt[4]{(3x^5y^6z^2)(27x^3y^2z^{10})} = \sqrt[4]{81x^8y^8z^{12}} =$$

$$\sqrt[4]{3^4x^8y^8z^{12}} = 3x^2y^2z^3$$

- d) Se aplican las leyes correspondientes de los radicales y exponentes, expresando el cociente en un solo radical y se simplifica la expresión dividiendo el exponente entre el índice de la raíz:

$$\frac{\sqrt[5]{32x^{13}y^8z^9}}{\sqrt[5]{x^3y^{18}z^4}} = \sqrt[5]{\frac{32x^{13}y^8z^9}{x^3y^{18}z^4}} = \sqrt[5]{\frac{2^5x^{10}z^5}{y^{10}}} = \frac{2x^2z}{y^2}$$

- e) Se aplican las leyes correspondientes de los radicales y exponentes, expresando la operación en un solo radical y se descomponen los exponentes en múltiplos del índice de la raíz para simplificar la expresión:

$$\sqrt[3]{3a^4b} \frac{\sqrt[3]{9a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2b^8}} = \sqrt[3]{\frac{3a^4b(9a^2b^2)}{a^2b^8}} = \sqrt[3]{\frac{27a^6b^3}{a^2b^8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3a^4}{b^5}} = \sqrt[3]{\frac{3^3a^3a}{b^3b^2}} = \frac{3a}{b} \sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$$



Ejercicio
Módulo 1

Simplifica las expresiones.

$$a) \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{2} =$$

$$b) \sqrt{x+1} \sqrt{x+1} =$$

$$c) \sqrt[5]{25x^7y^8z^3} \sqrt[5]{125x^2y^4z^{11}} =$$



Basado en
competencias

$$d) \frac{\sqrt[3]{64x^{11}y^{21}z^4}}{\sqrt[3]{x^2y^{10}z^3}} =$$

$$e) \frac{\sqrt{3a^3b^2c^4}\sqrt{5a^4b^6c^3}}{\sqrt{ab^5c^2}} =$$

Resultado:

$$a) \sqrt[6]{72}$$

$$b) x+1$$

$$c) 5xy^2z^2 \sqrt[5]{x^4y^2z^4}$$

$$d) 4x^3y^3 \sqrt[3]{y^2z}$$

$$e) a^3bc^2\sqrt{15bc}$$

Por otra parte, racionalizar el numerador o denominador de una expresión algebraica que contenga radicales es el proceso por medio del cual se transforma ese numerador o denominador irracional en otro equivalente que no contenga radicales.

Se tienen dos casos de racionalización:

Racionalización de un monomio: si el numerador o denominador que se va a racionalizar es un monomio, se multiplica tanto al numerador y al denominador de la expresión original por ese mismo monomio y se simplifica la expresión.

Ejemplos:

Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones.

$$a) \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$b) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} =$$

$$c) \frac{a+3}{\sqrt{a}} =$$

Solución:

a) Se multiplica al numerador y denominador por $\sqrt{3}$ y se simplifica:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) Se multiplica al numerador y denominador por $\sqrt{2}$ y se simplifica:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

c) Se multiplica al numerador y denominador por $\sqrt{a}$ y se simplifica:

$$\frac{a+3}{\sqrt{a}} = \frac{(a+3)\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{(a+3)\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{(a+3)\sqrt{a}}{a}$$



Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} =$

c) $\frac{a}{\sqrt{a}} =$

Racionalización de un binomio: si el numerador o denominador que se va a racionalizar es un binomio, se multiplica al numerador y denominador de la fracción por el conjugado de ese binomio (dos binomios son conjugados cuando se diferencian en el signo de uno de ellos) y se simplifica.

Ejemplos:

Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones.

a) $\frac{x}{1-\sqrt{x}} =$

b) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} =$

c) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} =$

Solución:

a) Se multiplica al numerador y denominador por $(1+\sqrt{x})$, que sería el conjugado de $(1-\sqrt{x})$ y se efectúan operaciones (más adelante se verá que se puede aplicar un producto notable):

$$\frac{x}{1-\sqrt{x}} = \frac{x(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{x(1+\sqrt{x})}{1-x}$$

$1 - \sqrt{x}$	
$1 + \sqrt{x}$	
$1 + \sqrt{x}$	
$x - \sqrt{x} - x$	
1	$-x$

- b) Se multiplica al numerador y denominador por $(\sqrt{5} - \sqrt{2})$, que sería el conjugado de $(\sqrt{5} + \sqrt{2})$, y se efectúan operaciones:

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{5 - 2\sqrt{10} + 2}{5 - 2} = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$$

$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$
$\frac{5 + \sqrt{10}}{5 - \sqrt{10} - 2}$	$\frac{5 - \sqrt{10}}{5 - \sqrt{10} + 2}$
$\frac{5}{-2}$	$\frac{5 - 2\sqrt{10} + 2}{3}$

- c) Se multiplican al numerador y al denominador por $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$, se efectúan operaciones y se cancela el factor $(a - b)$:

$$\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(a - b)} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$	
$\frac{a - \sqrt{ab}}{a - \sqrt{ab} - b}$	
$\frac{a}{-b}$	

Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones.

a) $\frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$

b) $\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$

c) $\frac{3 - x}{\sqrt{3} - \sqrt{x}} =$

Resultado:

a) $\frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$

b) $\frac{23 + 4\sqrt{15}}{17}$

c) $\sqrt{3} + \sqrt{x}$



4. Productos notables

Reconocer los productos notables de una expresión algebraica, así como la factorización, que es el proceso inverso de los productos notables, es importante ya que simplifica el procedimiento al resolver una situación de aprendizaje en el entorno o contexto que se presente.

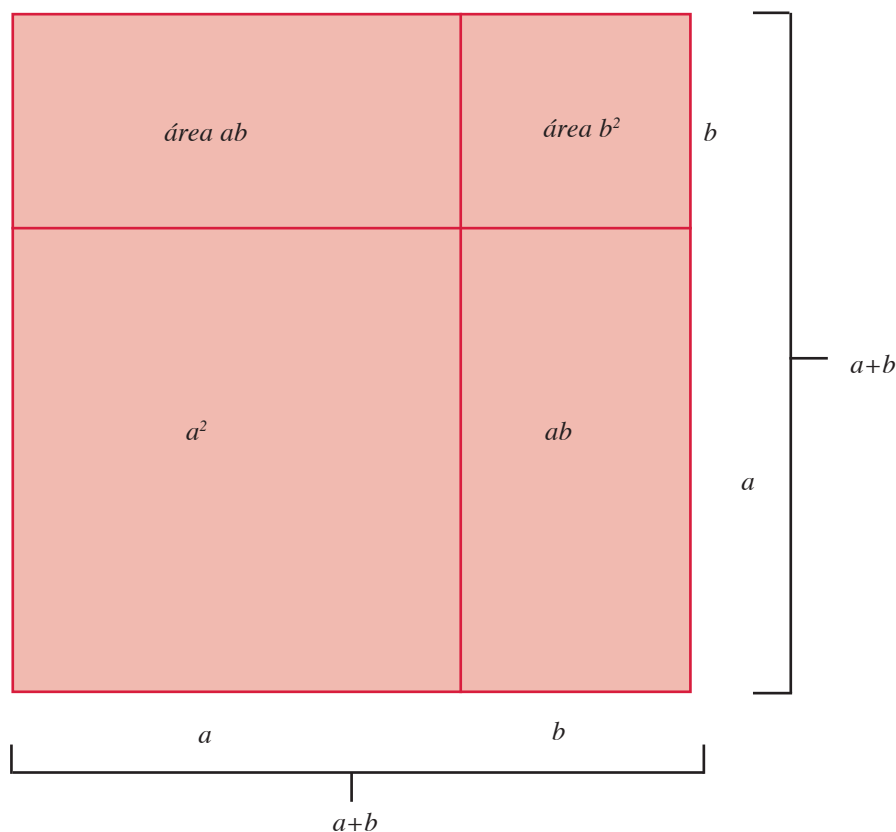
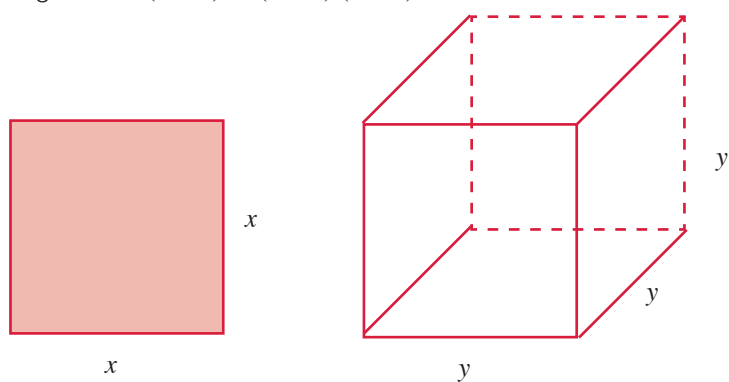
Con frecuencia, las expresiones algebraicas nos sirven para representar áreas o volúmenes, situaciones económicas, comportamiento de la naturaleza, entre otros.

Ejemplo:

El área de un cuadrado es: $x^2 = x \cdot x$

El volumen de un cubo es: $y^3 = y \cdot y \cdot y$

El área de la figura 1 es $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$



Algunas multiplicaciones entre polinomios pueden efectuarse a través de procesos simplificados (modelos) debido a la naturaleza de los polinomios involucrados; estos se llaman productos notables.

Los productos notables que manejaremos se muestran en la siguiente tabla:

Productos notables	
Binomio al cuadrado (suma)	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Binomio al cuadrado (diferencia)	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Binomios conjugados	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Binomio al cubo (suma)	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Binomio al cubo (diferencia)	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Producto denominado suma de cubos	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
Producto denominado diferencia de cubos	$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
Producto de binomios	$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$
Un número real por un binomio	$a(b + c) = ab + ac$

Estos productos se pueden comprobar por multiplicación directa. Por ejemplo, el primer **binomio al cuadrado** $(a + b)$ implica que lo que se encuentra en el interior del paréntesis debe multiplicarse por sí mismo, es decir:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\
 (a + b)^2 &= (a)(a + b) + (b)(a + b) \\
 (a + b)^2 &= a^2 + ab + ba + b^2 \\
 (a + b)^2 &= a^2 + ab + ab + b^2 \\
 (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

En palabras, este producto lo podemos enunciar así: si el binomio al cuadrado es una suma, entonces el producto es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término (este resultado sería un **trinomio cuadrado perfecto**).

Igualmente, el binomio al cuadrado que tiene la forma $(a - b)^2$ implica que lo que se encuentra dentro del paréntesis debe multiplicarse por sí mismo:

$$\begin{aligned}
 (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\
 (a - b)^2 &= (a)(a - b) + (-b)(a - b) \\
 (a - b)^2 &= a^2 - ab - ba + b^2 \\
 (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

En palabras, lo podemos enunciar así: si el binomio al cuadrado es una resta, entonces el producto es igual al cuadrado del primer término menos el doble del primer término por el segundo término más el cuadrado del segundo término (**trinomio cuadrado perfecto**).

Ejemplo:

Efectúa la operación $(2x + 3)^2$ aplicando el producto notable correspondiente.

Solución:

Empleando el producto $(a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ tenemos:

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2$$

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$



Ejercicio

Módulo 1

Realiza la operación $(2x + y)^2$ aplicando el producto notable correspondiente.

Resultado:

$$4x^2 + 4xy + y^2$$

Ejemplo:

Realiza la operación $(7x + 5)^2$ aplicando el producto notable correspondiente.

Solución:

$$(7x + 5)^2 = (7x)^2 + 2(7x)(5) + (5)^2$$

$$(7x + 5)^2 = 7^2x^2 + 14x(5) + 25$$

$$(7x + 5)^2 = 49x^2 + 70x + 25$$

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 7x + 5 \\ 7x + 5 \\ \hline +35x + 25 \\ \hline 49x^2 + 35x \\ \hline 49x^2 + 70x + 25 \end{array}$$



Ejercicio

Módulo 1

Efectúa la operación $(5x + 4)^2$ aplicando el producto notable correspondiente.

Resultado:

$$25x^2 + 40x + 16$$

Otro ejemplo de comprobación sería el caso de los **binomios conjugados** $(a + b)(a - b)$ de la siguiente manera:

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Por el resultado anterior, al producto de dos binomios conjugados se llama **diferencia de cuadrados**.

Los demás productos se comprueban igualmente por multiplicación directa.

Ejemplo:

Realiza la operación $(6x + 5y)(6x - 5y)$ aplicando el producto notable correspondiente.

Solución:

$$(6x + 5y)(6x - 5y) = (6x)^2 - (5y)^2$$

$$(6x + 5y)(6x - 5y) = 36x^2 - 25y^2$$

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 6x - 5y \\ 6x + 5y \\ \hline 30xy - 25y^2 \\ 36x^2 - 30xy \\ \hline 36x^2 - 25y^2 \end{array}$$

Realiza la operación $(3x + 2)(3x - 2)$ aplicando el producto notable correspondiente.

Resultado:

$$9x^2 - 4$$

Ejemplo:

Realizar la operación $(2m + 3)^3$ (aplicando el producto notable correspondiente)

Solución:

Utilizando el producto $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ tenemos:

$$(2m + 3)^3 = (2m)^3 + 3(2m)^2(3) + 3(2m)(3)^2 + (3)^3$$

$$(2m + 3)^3 = 2^3 m^3 + 3(4m^2)(3) + 6m(3^2) + 27$$

$$(2m + 3)^3 = 8m^3 + 36m^2 + 54m + 27$$

Realiza la operación $(x - 2y)^3$ aplicando el producto notable correspondiente.



Resultado:

$$x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

Ejemplo:

Realiza la operación $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$ aplicando el producto notable correspondiente.

Solución:

Empleando el producto $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ tenemos.

$$\begin{aligned}(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) &= (x)^3 + (2y)^3 \\(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) &= x^3 + 8y^3\end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{array}{r}x^2 - 2xy + 4y^2 \\x + 2y \\\hline 2x^2y - 4xy^2 + 8y^3 \\x^3 - 2x^2y + 4xy^2 \\\hline x^3 \qquad \qquad \qquad + 8y^3\end{array}$$

Realiza la operación $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$ aplicando el producto notable correspondiente.

Resultado:

$$27x^3 - y^3$$



5. Factorización

La factorización es un proceso que consiste en obtener los factores que al multiplicarse dan origen a la expresión original.

En Aritmética, los números se factorizan descomponiéndolos en sus factores primos.

Por ejemplo, la factorización de los números 88, 108 y 32 se realiza obteniendo sus factores primos:

$$\begin{array}{l|l} 88 & 2 \\ 44 & 2 \\ 22 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$88 = 2(2)(2)(11)$$

$$\begin{array}{c|c} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$108 = (2)(2)(3)(3)(3)$$

$$\begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$32 = (2)(2)(2)(2)(2)$$

En Álgebra, para factorizar alguna expresión se emplean los siguientes modelos matemáticos:

Factorización	
Factor común	$ab + ac = a(b + c)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b) = (a - b)^2$
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Polinomio cúbico perfecto	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
Polinomio cúbico perfecto	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencias de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Trinomio simple	$x^2 + x(a + b) + ab = (x + a)(x + b)$
Por agrupación de términos	$ab + ad + cb + cd = a(b + d) + c(b + d) = (b + d)(a + c)$

5.1 Factor común

Las expresiones algebraicas con factor común pueden tener alguna de las siguientes características, si no es que ambas: sus términos son divisibles entre un número común y cuentan con una letra presente en cada uno de los términos del polinomio.

Ejemplo:

Factoriza $18x^3 - 45x^2 + 27x$ aplicando factor común.

Solución:

El polinomio tiene coeficientes 18, -45 y 27; entonces:

18	-45	27	2
9	-45	27	3
3	-15	9	3
1	-5	3	3
1	-5	1	5
1	-1	1	

Estos números dividen a los tres números al mismo tiempo.

Máximo común divisor: $3(3) = 9$

En cada término se presenta la variable x . Colocaremos entonces a la izquierda del paréntesis, así como el 9. La factorización queda:

$$18x^3 - 45x^2 + 27x = (9x)(2x^2 - 5x + 3)$$

Nota: la parte literal del factor común se toma con el menor exponente y los términos del segundo factor se obtienen dividiendo los términos de la expresión original entre el factor común.

Ejemplo:

Factoriza $12x^3y + 9x^2y^2 - 6xy^3$ aplicando factor común.

Solución:

El máximo común divisor de los coeficientes es el 3 y las letras presentes con su menor exponente en todos los términos son x y y , por tanto la factorización quedará como:

$$12x^3y + 9x^2y^2 - 6xy^3 = (3xy)(4x^2 + 3xy - 2y^2)$$

La factorización se puede comprobar multiplicando los factores obtenidos:

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 3xy - 2y^2 \\ 3xy \\ \hline 12x^3y + 9x^2y^2 - 6xy^3 \end{array}$$



Ejercicio
Módulo 1

Factoriza $3m^2n + 3m^3n + 6mn$ aplicando factor común.

Resultado:

$$(3mn)(m + m^2 + 2)$$

5.2 Agrupación

En este caso se busca asociar parejas que tengan un factor común de tal manera que al extraerlo quede un binomio común en dichas parejas

Ejemplo:

Factoriza la expresión $2ax + 3ay + 2bx + 3by$ aplicando agrupación.

Solución:

Agrupando por parejas tenemos

$$(2ax + 3ay) + (2bx + 3by) =$$



Obteniendo el factor común en cada pareja:

$$2x(a+b) + 3y(a+b)$$

Finalmente tomando como factor común $(a+b)$ la factorización quedará como:

$$2ax + 3ay + 2bx + 3by = (2x + 3y)(a + b)$$

Factoriza $10xa - 10xb + 5ya - 5yb$ aplicando agrupación.



Ejercicio
Módulo 1

5.3 Diferencia de cuadrados

Ejemplo:

Factoriza $144x^2 - 121b^2$ aplicando diferencia de cuadrados.

Solución:

La expresión se puede escribir como:

$$144x^2 - 121b^2 = (12x)^2 - (11b)^2$$

Empleando la expresión $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ la factorización quedará como:

$$144x^2 - 121 = (12x + 11b)(12x - 11b)$$

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 12x + 11b \\ 12x - 11b \\ \hline -132xb - 121b^2 \\ 144x^2 + 132xb \\ \hline 144x^2 \qquad -121b^2 \end{array}$$

Ejemplo:

Factoriza $x^2 - 10\,000$ aplicando diferencia de cuadrados.

Solución:

$$\begin{aligned} x^2 - 10\,000 &= (x)^2 - (100)^2 \\ &= (x + 100)(x - 100) \end{aligned}$$

La factorización de la expresión es:

$$x^2 - 10\,000 = (x + 100)(x - 100)$$

Comprobación

$$\begin{array}{r} x + 100 \\ x - 100 \\ \hline -100x - 10000 \\ x^2 + 100x \\ \hline x^2 \qquad -10000 \end{array}$$



Ejercicio
Módulo 1

Factoriza $4x^2 - 9$ aplicando diferencia de cuadrados.

Resultado:

$$(2x + 3)(2x - 3)$$



Ejercicio
Módulo 1

Factoriza la expresión $x^2 - 4$ aplicando diferencia de cuadrados.

Resultado:

$$(x - 2)(x + 2)$$



5.4 Diferencia de cubos

Ejemplo:

Factoriza la siguiente expresión $125x^3 - 64$.

Solución:

La expresión se puede escribir como:

$$125x^3 - 64 = (5x)^3 - (4)^3$$

Empleando diferencia de cubos $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ tenemos

$$\begin{aligned} &= (5x)^3 - (4)^3 = (5x - 4)[(5x)^2 + (5x)(4) + (4)^2] \\ &= (5x - 4)(25x^2 + 20x + 16) \end{aligned}$$

Por tanto la factorización es: $125x^3 - 64 = (5x - 4)(25x^2 + 20x + 16)$

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 25x^2 + 20x + 16 \\ \underline{5x - 4} \\ -100x^2 - 80x - 64 \\ \underline{125x^3 + 100x^2 + 80x} \\ 125x^3 \qquad \qquad \qquad - 64 \end{array}$$



Ejercicio
Módulo 1

Factoriza la siguiente expresión $x^6 - 27y^9$.

Resultado:

$$(x^2 - 3y^3)(x^4 + 3x^2y^3 + 9y^6)$$

5.5 Suma de cubos

Ejemplo:

Factoriza la siguiente expresión $8x^3 + 343y^3$.

Solución:

Aplicando suma de cubos:

$$\begin{aligned} 8x^3 + 343y^3 &= (2x)^3 + (7y)^3 = (2x + 7y)[(2x)^2 - (2x)(7y) + (7y)^2] \\ &= (2x + 7y)(4x^2 - 14xy + 49y^2) \end{aligned}$$

La factorización es $8x^3 + 343y^3 = (2x)^3 + (7y)^3 = (2x + 7y)(4x^2 - 14xy + 49y^2)$

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 14xy + 49y^2 \\ \underline{2x + 7y} \\ 28x^2y - 98xy^2 + 343y^3 \\ \underline{8x^3 - 28x^2y + 98xy^2} \\ 8x^3 \qquad \qquad \qquad + 343y^3 \end{array}$$

Factorizar la siguiente expresión $27x^9 + y^6$.

Resultado:

$$(3x^3 + y^2)(9x^6 - 3x^3y^2 + y^4)$$



Ejercicio
Módulo 1



Ejercicio
Módulo 1

5.6 Trinomio simple

Ejemplo:

Factorizar el trinomio $x^2 + 5x + 6$.

Solución:

Al aplicar $x^2 + x(a + b) + ab = (x + a)(x + b)$ para la factorización requerida, se deben obtener dos números que multiplicados den 6 y sumados den 5.

¿Qué parejas de números cumplen con esta doble condición?
Los números que cumplen son el número 2 y el número 3.

Por lo tanto, la factorización es $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.



Ejercicio
Módulo 1

Factoriza el trinomio $x^2 + 3x + 2$.

Resultado:

$$(x + 2)(x + 1)$$

Ejemplo:

Factoriza el trinomio $x^2 - x - 12$.

Solución:

Al aplicar $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ para la factorización requerida, se deben obtener dos números que multiplicados den (-12) y sumados den (-1) .

¿Qué parejas de números cumplen con esta doble condición?
Los números que cumplen son el número (-4) y el número 3.

Por tanto la factorización queda como: $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$



Ejercicio
Módulo 1

Factorizar el trinomio $x^2 - 3x - 10$

Resultado:

$$(x - 5)(x + 2)$$

5.7 Trinomio general

El procedimiento para factorizar un trinomio general de la forma $abx^2 + (ad + bc)x + cd$ es el siguiente:

1. Buscar dos expresiones que al multiplicarlas resulten el término cuadrático
2. Buscar otras dos expresiones que al multiplicarlas resulten el término independiente
3. Con las cuatro expresiones anteriores, se realiza la suma de los productos cruzados de dichas expresiones y el resultado debe ser el término lineal
4. Si las cuatro cantidades cumplen con las tres condiciones anteriores, entonces los factores del trinomio son de la forma $(ax+b)(cx+d)$

Ejemplo

Factoriza el trinomio $14x^2 + 25x + 6$.

Solución:

Buscamos dos términos que al multiplicarlos den $14x^2$, en este caso serían $7x$ y $2x$

Buscamos dos números que multiplicados den 6, en este caso serían 2 y 3

Realizamos la suma de los productos cruzados de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl}
 7x & \nearrow & 3 \\
 & \times & \\
 2x & \searrow & 2 \\
 \hline
 & & = 6x \\
 & & = 14x \\
 & & \hline
 & & = 20x
 \end{array}$$

Esta combinación no resulta el término lineal pero si intercambiamos los números 2 y 3 obtendremos $25x$

$$\begin{array}{rcl}
 7x & \nearrow & 2 \\
 & \times & \\
 2x & \searrow & 3 \\
 \hline
 & & = 4x \\
 & & = 21x \\
 & & \hline
 & & = 25x
 \end{array}$$

Por tanto la factorización pedida es:

$$14x^2 + 25x + 6 = (7x + 2)(2x + 3)$$

Factoriza el trinomio $20x^2 + 61x + 36$.

Solución

$$(5x + 4)(4x + 9)$$



Ejercicio
Módulo 1

6. Expresiones algebraicas racionales

6.1 Definición

Una **expresión algebraica racional**, es una fracción en la que el numerador y el denominador son: expresiones algebraicas, por ejemplo:

$$\frac{5}{x-1}, \quad \frac{x-1}{x^2+x+9}, \quad \frac{x^2-5x+6}{x+2}$$

6.2 Clasificación de expresiones algebraicas racionales

Las expresiones algebraicas racionales se clasifican en simples y compuestas.

Son **simples** cuando el numerador y denominador son polinomios, por ejemplo:

$$\frac{x-x}{x-1}, \quad \frac{w-2}{w^2-2w+1}, \quad \frac{2a^2+7a+3}{4a^2-1}$$

Cuando el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, una expresión algebraica simple se subclasifica como **propia**, por ejemplo, la segunda expresión de las anteriores; y, se subclasifica como **impropia**, si el grado del polinomio del numerador es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador como en la primera y tercera expresión.

Son fracciones **compuestas** cuando contienen una o más expresiones algebraicas racionales simples en el numerador, denominador o en ambos, por ejemplo:

$$\frac{\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x}}{x}, \quad \frac{\frac{a^2-1}{2a+5}}{3a-3}, \quad \frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x-y}{y}}, \quad \frac{\frac{2x^2+6x}{x^3-x}}{\frac{2x+6}{5x^2-5x}}, \quad \frac{\frac{x^2-x-6}{3x^2-7x+2}}{\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+3x-2}}$$

6.3 Operaciones con expresiones algebraicas racionales

Es posible realizar operaciones como la adición, sustracción, multiplicación y división con expresiones algebraicas racionales de manera similar a las que se hacen con números racionales

a) Multiplicación y división

Para multiplicar dos o más expresiones algebraicas racionales, se multiplican directamente numerador por numerador y denominador por denominador y de ser posible se simplifica la fracción resultante factorizando (si es posible) los polinomios resultantes y reduciendo los factores comunes. En esta operación se sugiere dejar primeramente indicadas las multiplicaciones, porque puede ser más sencilla la simplificación.

Una expresión algebraica racional está **simplificada** cuando se ha transformado en una fracción simple que no tiene factores comunes

Para dividir dos o más expresiones algebraicas racionales, se multiplica el numerador de la primera expresión por el denominador de la segunda; este producto corresponderá al numerador de la fracción resultante y después se multiplica el denominador de la primera por el numerador de la segunda cuyo producto corresponderá al denominador de la fracción



resultante. Efectuado lo anterior, de ser posible se factorizan los productos resultantes y se reducen los factores comunes.

Ejemplo:

Efectúa y simplifica la siguiente operación con expresiones algebraicas a través de los productos notables y la factorización.

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} \cdot \frac{x^3 + x^2}{x + 2} =$$

Solución:

Efectuamos la operación multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador y se simplifica la fracción factorizando las expresiones y cancelando los factores comunes

$$\begin{aligned} & \frac{(x^2 - x - 6)(x^3 + x^2)}{(x^2 - 3x)(x + 2)} = \\ & = \frac{(x - 3)(x + 2)(x^2)(x + 1)}{(x)(x - 3)(x + 2)} \quad \text{cancelamos } (x - 3), (x + 2) \text{ y una } x \\ & = x(x + 1) \end{aligned}$$

Ejemplo:

Desarrolla y simplifica la siguiente operación con expresiones algebraicas a través de los productos notables y la factorización.

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} \div \frac{x - 3}{3x + 9} =$$

Solución:

Efectuamos la división multiplicando el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, siendo este producto el numerador de la fracción resultante y el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda, siendo este producto el denominador de la fracción resultante

$$\frac{(x^2 - 9)(3x + 9)}{(x^2 + 6x + 9)(x - 3)} =$$

Factorizamos las expresiones aplicando diferencia de cuadrados, factor común y trinomio simple (que también es un trinomio cuadrado perfecto)

$$\frac{(x + 3)(x - 3)(3)(x + 3)}{(x + 3)(x + 3)(x - 3)} = \text{Cancelamos factores comunes y el resultado es: } = 3$$

Desarrolla y simplifica la siguiente operación con expresiones algebraicas a través de los productos notables y la factorización.

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 6x + 9} \div \frac{3x + 3}{6x - 18} =$$



Ejercicio
Módulo 1

Solución:

$$\frac{2(x+1)}{x-3}$$

b) Adición y sustracción

Para realizar la adición o sustracción de varias expresiones algebraicas racionales con diferente denominador se procede como en Aritmética, es decir, se determina primeramente el mínimo común múltiplo de los denominadores (que será el denominador de la fracción resultante) y se divide éste por cada denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo. Después se efectúan operaciones en el numerador y se reducen términos semejantes para, por último, simplificar la fracción resultante factorizando (si es posible) y reduciendo factores comunes. En caso de que se tengan denominadores iguales simplemente se suman directamente los numeradores dejando el mismo denominador y se simplifica la fracción que quede.

Ejemplo:

Desarrolla y simplifica la siguiente operación con expresiones algebraicas a través de los productos notables y la factorización.

$$\frac{7}{5x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x} =$$

Solución:

Primeramente calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores factorizándolos

$5x = (5)(x)$	$(5)(x)$	$(2)(x)$	(x)	x
Factores $x = (x)$	(5)	(2)	1	(5)
$2x = (2)(x)$	1	(2)	1	(2)
	1	1	1	

$mcm(x)(5)(2) = 10x$

Ahora dividiendo el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada fracción

$$\frac{10x}{5x} = 2 \qquad \frac{10x}{x} = 10 \qquad \frac{10x}{2x} = 5$$

Multiplicando estos resultados por su respectivo numerador tenemos

$$\frac{7}{5x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{(2)(7) - (5)(1)}{10x} = \frac{14 - 20 + 5}{10x} = \frac{19 - 20}{10x} = \frac{-1}{10x}$$

El resultado de la operación es: $\frac{7}{5x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{-1}{10x}$



Ejercicio
Módulo 1

Desarrolla y simplifica la siguiente operación con expresiones algebraicas.

$$\frac{2}{3x} - \frac{1}{x} + \frac{9}{2x} =$$

Solución:

$$\frac{25}{6x}$$

Ejemplo:

Desarrolla y simplifica la siguiente operación con expresiones algebraicas a través de los productos notables y la factorización.

$$\frac{4x}{x^2 - 4} + \frac{x}{x + 2} =$$

Solución:

Primero se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores de la siguiente manera:
Factorizando los denominadores

$$\begin{array}{lcl} x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) & (x + 2) (x - 2) & (x + 2) \\ x + 2 = (x + 2) & (x - 2) & 1 \\ & 1 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} (x + 2) \\ (x - 2) \end{array} \right.$$

$$mcm (x + 2) (x - 2)$$

La operación se efectúa como en la suma de fracciones numéricas, se divide el *mcm* entre cada denominador y el resultado se multiplica por el respectivo numerador

$$\frac{4x}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{x}{x + 2} = \frac{(1)(4x) + (x - 2)(x)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{4x + x^2 - 2x}{(x + 2)(x - 2)} =$$

$$\frac{x^2 + 2x}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{(x)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{x}{x - 2}$$

El resultado es: $\frac{x}{x - 2}$

Ejemplo:

Desarrolla y simplifica la siguiente operación con expresiones algebraicas a través de los productos notables y la factorización.

$$\frac{8x}{x^2 - 1} - \frac{4}{x + 1} =$$

Solución:

El mínimo común múltiplo es *mcm* $(x + 1) (x - 1)$.

$$\begin{array}{l} (x^2 - 1) = (x)^2 - (1)^2 = (x - 1)(x + 1) \\ x + 1 = (x + 1) \end{array}$$

Ahora dividiendo el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada fracción

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = (1)(1) = 1$$

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)} = (x - 1)$$

$$(x - 1)(4) = 4x - 4$$

Simplificando y factorizando

$$\frac{8x}{x^2-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{(1)(8x) - (4)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{8x-4x-4}{(x-1)(x+1)} = \frac{4x-4}{(x-1)(x+1)} =$$

$$\frac{(4)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{4}{x-1}$$



Ejercicio
Módulo 1

Desarrolla y simplifica la siguiente operación con expresiones algebraicas a través de los productos notables y la factorización.

$$\frac{6x}{x^2-9} + \frac{x}{x+3}$$

Solución:

$$\frac{x}{x-3}$$



7. Problemas de aplicación

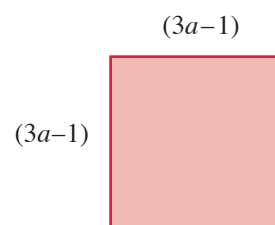
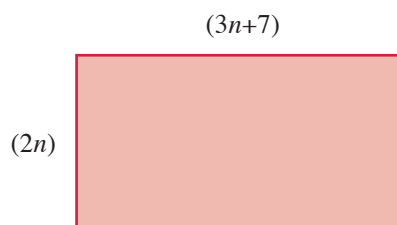
Ejemplo:

Resuelve el siguiente problema.

Se planea construir losetas de diferentes tamaños. Sus lados estarán representados en función de una letra (variable) para poder modificar sus dimensiones. Las formas son un rectángulo y un cuadrado respectivamente.

Calcula el área y el perímetro de cada loseta e indica los factores que, multiplicados entre sí, dan el polinomio original, y la clasificación de la expresión algebraica resultante de acuerdo al número de términos y su grado absoluto. Expresa el resultado en una tabla.

Solución:



Cálculo de áreas

Área del cuadrado: $= (\text{lado})(\text{lado})$

$$A = (3a - 1)(3a - 1) = (3a - 1)^2$$

Aplicando producto notable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + (-b)^2$

$$A = (3a - 1)^2 = (3a)^2 - 2(3a)(-1) + (-1)^2$$

$$= (3a - 1)^2 = 9a^2 - 6a + 1$$

El área del cuadrado en función a la variable es $A = 9a^2 - 6a + 1$

Área del rectángulo: $= (\text{lado})(\text{lado})$

Sustitución: $A = (3n + 7)(2n)$

$$A = 6n^2 + 14n$$

El área del rectángulo en función a la variable es $A = 6n^2 + 14n$

Cálculo de perímetros.

Perímetro del rectángulo: $P = 2 \text{ lado largo} + 2 \text{ lado corto}$

$$P = 2(3n + 7) + 2(2n)$$

$$P = 6n + 14 + 4n$$

$$P = 10n + 14$$

El perímetro del rectángulo en función de la variable es $P = 10n + 14$

Perímetro del cuadrado: $P = (4)(\text{lado})$

$$P = 4(3a - 1)$$

$$P = 12a - 4$$

El perímetro del cuadrado en función de la variable $P = 12a - 4$

Tabla de resultados

Figura	Perímetro	Clasificación número de términos	Grado absoluto	Área	Factores
Rectángulo	$P = 10n + 14$	Binomio	Primero	$A = 6n^2 + 14n$	$A = (3n + 7)(2n)$
Cuadrado	$P = 12a - 4$	Binomio	Primero	$A = 9a^2 - 6a + 1$	$(3a - 1)(3a - 1)$

Ejemplo:

Resuelve el siguiente problema

La altura de un triángulo es 5 metros más grande que la base y su área es de 75 m². ¿Cuál es la expresión algebraica con la cual se obtiene el valor de x ?

Solución:

Datos

Base: x

Altura: $x + 5$

Fórmula

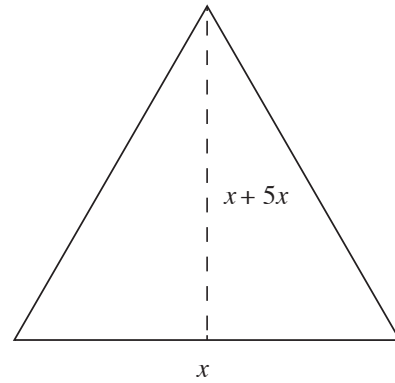
$$\text{Área} = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$$

Sustitución

$$\frac{x(x + 5)}{2} = 75$$

$$x^2 + 5x = 150$$

La expresión algebraica con la cual se obtiene el valor de x es $x^2 + 5x - 150$.



Ejercicio
Módulo 1

Obtén el perímetro y el área de un hexágono cuyo lado mide $6x$ metros.

$$A = \frac{(\text{perímetro})(\text{apotema})}{2}$$

Solución:

$$18x^2\sqrt{6}$$

Obtén el perímetro y el área de una circunferencia cuyo diámetro mide $2x + 4$ metros.



Ejercicio
Módulo 1

Ejercicios adicionales:

I. Escribe el grado relativo y absoluto de los siguientes términos, así como su coeficiente.

a) $2xy^3$ $\begin{cases} \text{Grado relativo: } x = \\ \text{Grado absoluto} = \\ \text{Coeficiente} = \end{cases}$ $y =$

b) $\frac{2}{3}x^4$ $\begin{cases} \text{Grado relativo: } x = \\ \text{Grado absoluto} = \\ \text{Coeficiente} = \end{cases}$

c) $-2x^3y$ $\begin{cases} \text{Grado relativo: } x = \\ \text{Grado absoluto} = \\ \text{Coeficiente} = \end{cases}$ $y =$

d) $\frac{4}{7}x^2yz^3$ $\begin{cases} \text{Grado relativo: } x = \\ \text{Grado absoluto} = \\ \text{Coeficiente} = \end{cases}$ $y =$ $z =$



Ejercicio
Módulo 1

$$e) 2^4x^3y^5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Grado relativo: } x = \\ \text{Grado absoluto} = \\ \text{Coeficiente} = \end{array} \right. \quad y =$$

II. Identifica el grado de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $2x+3y$ _____

b) $4x^2 - 5y + 6$ _____

c) $6x^5y + 4xy$ _____

d) $2x^2 + 12xy + 2y^2 + 4x + 4y - 5$ _____

e) $x^3 + 2x^2y + 3x^2y^2 + y^3$ _____

III. Aplicando las propiedades de los exponentes, simplifica sin exponentes negativos las siguientes expresiones.

a) $(2x^2yz)(3xy^5) =$

b) $\frac{(3x^2y^{-3})^{-1}}{(2x^{-2}y^2)^{-2}} =$

c) $\frac{(3^2x^2y^3)^2a^4b^9}{3^2x^3(yab^2)^2} =$

d) $\left(\frac{2^{-1}a^2x^{-3}}{3^2b^{-1}y^{-3}}\right)^2 \left(\frac{2^2a^{-1}x^{-3}}{3^{-1}b^2y^3}\right)^{-3} =$

Resultado:

a) $6x^3y^6z$

b) $\frac{2^2y^7}{3x^6}$

c) $3^2xy^4a^2b^5$

d) $\frac{a^7b^8x^3y^{15}}{2^83^7}$

IV. Realiza y simplifica las operaciones indicadas

a) $x^2 - 5 - 3x + 2x^2 + 7 - (2x^2 + 4x + 6) =$

b) $x^2 - 2 + 7 - 3x + 2x^2 - (3x - 8) =$

c) $6x^2 + 2xy + 3 + 5(2xy - x^3 + y^2 - 2) - 3(2y^2 - x^3 + 6xy) =$



Basado en
competencias



d) $7x^2 + 3xy + 4 + 6(3xy - x^2 + 2y^2 - 1) - 5(3y^2 - x^2) =$

e) $(3x - 2y)(2x^2 - 5xy - y^2) =$

f) $(5x - 2y)(3x^2 - xy - 2y^2) =$

g) $(5a - 4)(1 + 6a) + (a^2 - 9a + 3)(a - 2) =$

h) $(3x^2 - 2xy + y^2) - 2x(x - 3y) + 3y(2x - y) =$

i) $(m - 4)(m - 1)(m + 2) =$

j) $(a^2 - 3ab + b^2)(3a - 2b) + (a^2 + 2ab + b^2)(7a - 4b) =$

k) $(x^2 - 3xy + y^2)(2x - 3y) + (x^2 + 2xy + y^2)(3x - 7y) =$

l) $(x^3 - 3x^2 + x + 2) \div (x + 2) =$

m) $(3x^3 - 5x^2 + 4x - 2) \div (x - 1) =$

n) $(2x^3 - 7x^2 + 8x - 3) \div (2x - 3) =$

o) $(3x^3 - 5x^2y - 8xy^2 - 3y^3) \div (3x + y) =$

Resultado:

a) $x^2 - 7x - 4$

b) $3x^2 - 6x + 13$

c) $-2x^3 + 6x^2 - y^2 - 6xy - 7$

d) $6x^2 + 21xy - 3y^2 - 2$

e) $6x^3 - 19x^2y + 7xy^2 + 2y^3$

f) $15x^3 - 11x^2y - 8xy^2 + 4y^3$

g) $a^3 + 19a^2 + 2a - 10$

h) $x^2 + 10xy - 2y^2$

i) $m^3 - 3m^2 - 6m + 8$

j) $10a^3 - a^2b + 8ab^2 - 6b^3$

k) $5x^3 - 10x^2y - 10y^3$

l) $\text{cociente} = x^2 - x - 1 \quad \text{residuo} = 0$

m) $\text{cociente} = 3x^2 - 2x + 2 \quad \text{residuo} = 0$

n) $\text{cociente} = x^2 - 2x + 1 \quad \text{residuo} = 0$

o) $\text{cociente} = x^2 - 2xy - 2y^2 \quad \text{residuo} = -y^3$



Ejercicio
Módulo 1

V. Aplicando las propiedades de los radicales simplifica las siguientes expresiones

a) $\sqrt{25x^{10}y^6} =$

b) $\sqrt[4]{32a^9b^{11}} =$

c) $\sqrt{12a^5b^7c} =$

d) $\frac{\sqrt{72x^7y^2}}{\sqrt{2xy}} =$

e) $\sqrt[3]{121a^5b^4c^3} \sqrt[3]{44a^7b^6c} =$

f) $\frac{\sqrt[3]{54a^6b^2}}{\sqrt[3]{2ab^5}} =$

g) $\frac{\sqrt{3x^3y}\sqrt{6x^7y^5z}}{\sqrt{2x^4yz^5}} =$

h) $\sqrt[3]{48} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[6]{36} =$

i) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt[4]{25} + 2\sqrt[6]{125} =$

j) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{2}} =$

Resultado:

a) $5x^5y^3$

b) $2a^2b^2\sqrt[4]{2ab^3}$

c) $2a^2b^3\sqrt{3abc}$

d) $6x^3\sqrt{y}$

e) $11a^4b^3c\sqrt[3]{4bc}$

f) $\frac{3a}{b}\sqrt[3]{a^2}$

g) $\frac{3x^3y^2\sqrt{y}}{z^2}$

h) $\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2}$



Ejercicio
Módulo 1

i) $2\sqrt{5}$

j) $\sqrt[12]{32}$

VI. Racionaliza cada denominador y simplifica.

a) $\frac{12}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$

b) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{x} + 2}$

d) $\frac{2x - 3y}{\sqrt{2x} - \sqrt{3y}} =$

e) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

f) $\frac{x - 2y}{\sqrt{x} - \sqrt{2y}} =$

g) $\frac{a - 2b}{\sqrt{2a} - \sqrt{b}} =$

h) $\frac{2 - \sqrt{6}}{5 + 2\sqrt{6}} =$

i) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$

Resultado:

a) $6(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

b) $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y}$

c) $\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

d) $\sqrt{2x} + \sqrt{3y}$

e) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$

f) $\sqrt{x} + \sqrt{2y}$

g) $\frac{(a - 2b)(\sqrt{2a} + \sqrt{b})}{2a - b}$



Ejercicio
Módulo 1

h) $22 - 9\sqrt{6}$

i) $5 + 2\sqrt{6}$

VII. Racionaliza cada numerador y simplifica.

a) $\frac{2 + \sqrt{x}}{3y} =$

b) $\frac{\sqrt{6} - 5x}{4x} =$

Resultado:

a) $\frac{4 - x}{3y(2 - \sqrt{x})}$

b) $\frac{6 - 25x^2}{4x(\sqrt{6} + 5x)}$

VIII. Desarrolla y simplifica aplicando productos notables.

a) $(x - 4)^2 =$

b) $(2x^2 + 3y)^2 =$

c) $(5x^2 - 3y)^2 =$

d) $(2a - b)^3 =$

e) $(3 + x)(3 - x) =$

f) $\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{3}b\right) =$

g) $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2) =$

h) $(2x + xy)(4x^2 - 2x^2y + x^2y^2) =$

i) $(2x - 4y)(4x^2 + 8xy + 16xy^2) =$

j) $(x + 6)(x - 8) =$

k) $(2x + 3)(x - 5) =$

l) $(3x - 2)(5x + 3) =$

Resultado:

a) $x^2 - 8x + 16$

b) $4x^4 + 12x^2y + 9y^2$



Basado en
competencias



Ejercicio
Módulo 1

- c) $25x^4 - 30x^2y + 9y^2$
- d) $8x^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$
- e) $9 - x^2$
- f) $\frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{9}b^2$
- g) $8a^3 + 27b^3$
- h) $8x^3 + x^3y^3$
- i) $8x^3 - 64y^3$
- j) $x^2 - 2x - 48$
- k) $2x^2 - 7x - 15$
- l) $15x^2 - x - 6$

IX. Factoriza las siguientes expresiones.

- a) $9x^2 - 6x =$
- b) $3x^2y + 6x^5y^4 - 15x^4y^5 =$
- c) $10ax - 20bx + 6ay - 12by =$
- d) $40az - 50aw - 12bz + 15bw =$
- e) $20xh - 35xk + 12yh - 21yk =$
- f) $16a^2x^4 - 25b^4y^2 =$
- g) $z^2 + 9z + 14 =$
- h) $x^2 + x - 6 =$
- i) $4x^2 + 12xy + 9y^2 =$
- j) $6a^2 + 11a - 10 =$
- k) $4x^2 - 14xy + 12y^2 =$
- l) $2x^2 + 3xy - 2y^2 =$
- m) $9a^2 - 30ab + 25b^2 =$
- n) $2x^2 - x - 21 =$
- o) $3x^2 + x - 1 =$



Resultado:

- a) $3x(3x - 2)$
- b) $3x^2y(1 + 2x^3y^3 - 5x^2y^4)$
- c) $(a - 2b)(10x + 6y)$
- d) $(4z - 5w)(10 - 3b)$
- e) $(4h - 7k)(5x + 3y)$
- f) $(4ax^2 + 5b^2y)(4ax^2 - 5b^2y)$
- g) $(z + 2)(z + 7)$
- h) $(x - 2)(x + 3)$
- i) $(2x + 3y)^2$
- j) $(3a - 2)(2a + 5)$
- k) $2(2x - 3y)(x - 2y)$
- l) $(2x - y)(x + 2y)$
- m) $(3a - 5b)^2$
- n) $(2x + 7)(x - 3)$
- o) $(3x - 1)(x + 1)$

X. Efectua las siguientes operaciones con expresiones racionales

- a) $\frac{6}{3x^2 - 2x} + \frac{5}{3x - 2} - \frac{2}{x^2} =$
- b) $\frac{2x + 5}{x^2 + 6x + 9} + \frac{x}{x^2 - 9} + \frac{1}{x - 3} =$
- c) $\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} =$
- d) $\frac{2 - x - 3x^2}{6x^2 - x - 2} =$
- e) $\frac{(x^2 + 8x + 16)(x - 5)}{(x^2 - 5x)(x^2 - 16)}$
- f) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \times \frac{2x - 2}{x - 3} =$
- g) $\frac{x + 2}{2x - 3} \div \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 3x} =$

Resultado:

a) $\frac{5x^2 + 4}{(3x - 2)x^2}$

b) $\frac{4x^2 + 8x - 6}{(x + 3)(x + 3)(x - 3)}$

c) $\frac{(3x + 1)}{(x + 2)}$

d) $\frac{-(x + 1)}{(2x + 1)}$

e) $\frac{(x + 4)}{x(x - 4)}$

f) $\frac{2(x - 3)}{(x + 1)}$

g) $\frac{x}{x - 2}$



Módulo 2

Ecuación lineal



Competencias genéricas y atributos¹

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
 - 1.1. Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
 - 4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
 - 4.5. Maneja las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para poder obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
 - 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
 - 5.2. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
 - 5.6. Utiliza las TIC para procesar e interpretar información.
8. Participa y colabora de una manera efectiva en equipos diversos.

¹Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).

- 8.1. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.



Competencias disciplinares básicas y extendidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las TIC.



Introducción

En este módulo sobre ecuaciones y desigualdades vamos a resear diferentes aspectos en los que examinaremos estas operaciones matemáticas de una manera sencilla.

Es a partir de la segunda mitad del siglo XVII donde surge el desarrollo de esta importante disciplina de las ciencias exactas, se destacan en esta época los matemáticos como Isaac Newton, Galileo Galilei, Sócrates y Descartes, entre otros más.

El dominio de los métodos para discutir y resolver un sistema de ecuaciones lineales permitirá al alumnado afrontar el planteamiento y resolución de problemas diversos, para comprender su importancia y aplicación en la vida cotidiana.

Las desigualdades son de vital importancia en áreas del conocimiento relacionadas con programación lineal, economía y planeación de la producción, entre otras.

La secuencia didáctica se debe organizar teniendo en cuenta los conocimientos previos que se requieren para trabajar desigualdades, indicando problemas contextualizados.

1. Datos de una situación problema

Desde tiempos antiguos, ha sido difícil representar “simbólicamente” el lenguaje común. En el siglo XVII, René Descartes le dio un gran impulso al lenguaje matemático. Simplificó y completó la estructura simbólica del Álgebra adoptando las primeras letras del abecedario para indicar cantidades conocidas o constantes y las últimas letras para las cantidades desconocidas, incógnitas o variables.

1.1 Datos, símbolos matemáticos, variables y constantes

Dato, del latín *datum*, –“lo que se da”–, se refiere a una representación mediante símbolos numéricos, alfabéticos o de otra clase con una característica en particular.

Símbolo es la representación de una idea.

Constante es una cantidad cuyo valor no cambia (números), algunas constantes se representan mediante una literal que pueden ser letras del abecedario o letras griegas.

Ejemplos:

$c = 300\,000 \text{ km/s}$ Es el valor de la constante de la velocidad de la luz.

$\pi = 3.14159265359\dots$ Es el valor del semiperímetro de una circunferencia unitaria.

Variable es una literal que representa cantidades desconocidas en un problema expresado en lenguaje común. Como este tipo de literales pueden tomar diferentes valores de acuerdo a las condiciones del problema, también se les denomina incógnitas y se les representa por letras del abecedario o letras griegas.

Ejemplo:

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Es la edad actual de Juan	x
Es la magnitud del ángulo de un triángulo	θ

2. Definición de ecuación lineal

Una **ecuación** es una igualdad algebraica en la que aparecen una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que sólo es verdadera o se verifica para determinados valores de las incógnitas, las cuales se representan por las últimas letras del alfabeto x, y, z . El grado de una ecuación está dado por el exponente mayor de la incógnita.

Una **ecuación lineal** es aquella en que todas las incógnitas (variables) que contiene tienen exponente igual a 1.

Resolver una ecuación es hallar el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la igualdad.

Las ecuaciones lineales de primer grado son del tipo $ax + b = 0$, con $a \neq 0$ o cualquier otra ecuación en la que al operar, trasponer términos y simplificar adoptan esa expresión.



Comprobar que el valor de $x = 5$ cumple con la ecuación $5x = 8x - 15$

Resultado:

$$x = 5$$

3. Propiedades de igualdades

1ª. Propiedad reflexiva o idéntica: toda cantidad es **idéntica** a sí misma.

Ejemplos:

$$a = a; \quad x + y = x + y$$

2ª. Propiedad simétrica o recíproca. Se pueden permutar los miembros de una igualdad, sin que esta se altere.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{Si } x &= y, \text{ entonces } y = x \\ \text{Si } x + 5 &= 8, \text{ entonces } 8 = x + 5 \end{aligned}$$

3ª. Propiedad transitiva: si dos cantidades son iguales a una tercera cantidad, entonces son iguales entre sí.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{Si } a &= b \text{ y } b = c, \text{ entonces } a = c \\ \text{Si } x + 2 &= 6 \text{ y } 6 = y + z, \text{ entonces } x + 2 = y + z \end{aligned}$$

4ª. En una igualdad toda cantidad puede ser sustituida por su igual.

Ejemplo:

$$\text{Si } x + 2 = 6 \text{ y } x = 4, \text{ entonces } 4 + 2 = 6$$

5ª. Se pueden efectuar las mismas operaciones en los miembros una igualdad, sin que esta se altere.

Ejemplos:

Suma y resta:

$$\begin{aligned} \text{Dada la igualdad } a &= b \\ \text{Entonces } a + c &= b + c \text{ y } a - c = b - c \end{aligned}$$

Multiplicación y división

$$\begin{aligned} \text{Dada la igualdad } a &= b \\ \text{Entonces } ac &= bc \text{ y } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}, \text{ con } c \neq 0 \end{aligned}$$

Potencia y raíz

Si $a = b$

Entonces $a^2 = b^2$ y $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

6ª. Dos o más igualdades pueden **sumarse** miembro a miembro, de lo cual resulta una nueva igualdad.

Ejemplos:

Si $a = b$ y $c = d$

Entonces $a + c = b + d$

7ª. Dos o más igualdades pueden **restarse** miembro a miembro, de lo cual resulta una nueva igualdad.

Ejemplos:

Si $a = b$ y $c = d$

Entonces $a - c = b - d$

Solución

Resolver una ecuación lineal es obtener el valor de la incógnita que cumpla con la igualdad, para ello se deben de aplicar las siguientes reglas:

- Realiza las operaciones indicadas en cada miembro de la igualdad.
- Realiza la trasposición de términos, reuniendo en un miembro de la igualdad todos los términos que contengan la variable (incógnita) y en el otro miembro las cantidades conocidas.
- Reduce los términos semejantes en cada miembro de la igualdad.
- Despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Ejemplo:

Resuelve la ecuación.

$$3x - 5 = x + 3$$

Solución:

Restando x a los dos miembros de la ecuación	$3x - 5 - x = x + 3 - x$
Simplificando	$2x - 5 = 3$
Sumando 5 a los dos miembros de la ecuación	$2x - 5 + 5 = 3 + 5$
Simplificando	$2x = 8$
Multiplicando por $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(8)$
Finalmente el valor de x es	$x = 4$



Ejercicio
Módulo 2

Resolver la ecuación
 $-16x + 1 = -65x + 36$

Resultado:

$$x = \frac{5}{7}$$

Ejemplo: resuelve. $5x = 8x - 15$

Solución:

Restando $8x$ a los dos miembros de la igualdad

$$\begin{aligned} 5x - 8x &= 8x - 15 - 8x \\ -3x &= -15 \end{aligned}$$

Multiplicando por (-1) a ambos miembros de la igualdad: $(-1)(-3x) = (-1)(-15)$

Dividiendo entre 3 a los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{3}{3}x = \frac{15}{3}$$

Finalmente el valor de x es:

$$x = 5$$

Ejemplo: resuelve.

$$4x + 1 = 2$$

Restando 1 a los dos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} 4x + 1 - 1 &= 2 - 1 \\ 4x &= 1 \end{aligned}$$

Dividiendo entre 4 a los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{4}{4}x = \frac{1}{4}$$

Finalmente el valor de x es:

$$x = \frac{1}{4}$$

Ejemplo: resuelve.

$$y - 5 = 3y - 25$$

Solución:

Sumando $-3y$ a los dos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} y - 5 - y &= 3y - 25 - y \\ -5 &= 2y - 25 \end{aligned}$$

Sumando 25 a los dos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} -5 + 25 &= 2y - 25 + 25 \\ 20 &= 2y \end{aligned}$$

Dividiendo entre 2 a los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{20}{2} = \frac{2}{2}y$$

Finalmente el valor de y es:

$$y = 10$$



Basado en
competencias

Ejemplo: resuelve.

$$5x + 6 = 10x + 5$$

Solución:

Invirtiendo los dos miembros de la ecuación se tiene:

$$10x + 5 = 5x + 6$$

Restando $-5x$ a los dos miembros de la ecuación

$$10x + 5 - 5x = 5x + 6 - 5x$$

Simplificando los términos:

$$5x + 5 = 6$$

Restando -5 a los dos miembros de la igualdad:

$$5x + 5 - 5 = 6 - 5$$

Simplificando:

$$5x = 1$$

Dividiendo entre 5 a los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{5}{5}x = \frac{1}{5}$$

Finalmente el valor de x es:

$$x = \frac{1}{5}$$

Ejemplo: resuelve.

$$9y - 11 = -10 + 12y$$

Solución

Invirtiendo los dos miembros de la ecuación se tiene:

$$-10 + 12y = 9y - 11$$

Restando $9y$ a los dos miembros de la ecuación:

$$-10 + 12y - 9y = 9y - 11 - 9y$$

Simplificando:

$$-10 + 3y = -11$$

Sumando $+10$ a los dos miembros de la igualdad:

$$-10 + 3y + 10 = -11 + 10$$

Simplificando:

$$3y = -1$$

Dividiendo entre 3 a los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{3}{3}y = \frac{-1}{3}$$

Finalmente el valor de y es:

$$y = -\frac{1}{3}$$

Ejemplo:

$$2x - [x - (x - 50)] = x - (800 - 3x)$$

De acuerdo a la jerarquía de operaciones se quitan paréntesis y posteriormente se quita el corchete, se aplica regla de signos:

$$2x - [x - x + 50] = x - 800 + 3x$$

$$2x - x + x - 50 = x - 800 + 3x$$

Se reducen términos semejantes:

$$2x - 50 = 4x - 800$$

Invirtiendo los dos miembros de la ecuación se tiene:

$$4x - 800 = 2x - 50$$

Restando a los dos miembros de la ecuación $2x$:

$$4x - 800 - 2x = 2x - 50 - 2x$$

Simplificando:

$$2x - 800 = -50$$

Sumando 800 a los dos miembros de la igualdad:

$$2x - 800 + 800 = -50 + 800$$

Simplificando términos

$$2x = 750$$

Dividiendo entre 2 a los dos miembros de la igualdad: $\frac{2}{2}x = \frac{750}{2}$

Finalmente el valor de x es: $x = 375$

Ejemplo:

$$5(x - 3) - (x - 1) = (x + 3) - 10$$

De acuerdo a la jerarquía de operaciones se quitan paréntesis, se aplica regla de signos:

Efectuando los productos $5(x - 3) - (x - 1) = (x + 3) - 10$

Se reducen términos semejantes: $4x - 14 = x - 7$

Restando x a los dos miembros de la ecuación: $4x - 14 - x = x - 7 - x$

Simplificando: $3x - 14 = -7$

Sumando 14 a los dos miembros de la igualdad: $3x - 14 + 14 = -7 + 14$

Simplificando términos: $3x = 7$

Dividiendo entre 3 a los dos miembros de la igualdad: $\frac{3}{3}x = \frac{7}{3}$

Finalmente el valor de x es: $x = \frac{7}{3}$

M2

Basado en competencias



Ejercicio
Módulo 2

Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $x - \frac{13x}{12} = \frac{5x}{18} + \frac{13}{12}$

sol $x = -3$

b) $3x - 4 = 5 + 3\left(\frac{x}{5} - 1\right)$

sol $x = \frac{5}{2}$

c) $2 - 4\left(\frac{2x}{7} + \frac{1}{7}\right) = \frac{3}{2} - x$

sol $x = -\frac{1}{2}$

d) $5x - 3\left(3 - \frac{x}{4}\right) = \frac{7x}{2} - 3$

sol $x = \frac{8}{3}$

e) $5\left(\frac{2x}{3} - \frac{3x}{5}\right) + 1 = 2x - 2(x - 1)$

sol $x = 3$

f) $\frac{2x}{3} - 4\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{15}$

sol $x = \frac{9}{2}$

g) $1 - \frac{2}{3}(x - 3) = 2 - \frac{1}{4}(3x - 4)$

sol $x = 0$

h) $\frac{1}{2} - \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right)$

sol $x = -\frac{13}{12}$

i) $\frac{2x}{3} - 5\left(\frac{x}{12} + \frac{1}{4}\right) = 3 - 2\left(1 - \frac{x}{6}\right)$

sol $x = -27$

4. Solución y representación gráfica de una ecuación lineal

La solución de una ecuación lineal es el conjunto de números reales que satisfacen los valores de las dos variables en la igualdad; es una ecuación lineal recta llamada función lineal.

Gráfica la siguiente función lineal y escribe donde se interseca con los ejes.

Ejemplo:

Resuelve la siguiente ecuación lineal y graficarla.

$$2x - 3y = 6$$

Solución:

Si $x = 0$, entonces la ecuación queda como:

$$2(0) - 3y = 6$$

$$-3y = 6$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad entre -3 se obtiene:

$$-\frac{3}{-3}y = \frac{6}{-3}$$

$$y = -2$$

Por lo tanto, una solución es $(x, y) = (0, -2)$

Como $x \in \mathbb{R}$, entonces x puede tomar cualquier valor real y determinar otra solución, de tal manera que si hacemos que $x = 3$, entonces lo sustituimos en la ecuación $2(3) - 3y = 6$

$$6 - 3y = 6$$

$$3y = -6$$

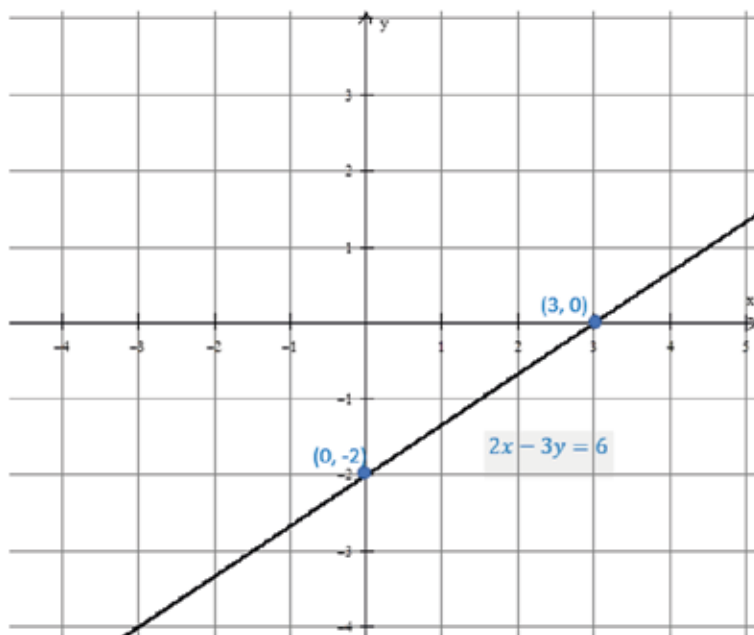
Dividiendo a los dos miembros de la igualdad entre 3 se obtiene:

$$\frac{3}{3}y = \frac{-6}{3}$$

$$y = -2$$

Por lo tanto, la otra solución es $(x, y) = (3, 0)$

La gráfica de la ecuación es la recta que pasa por los puntos $(0, -2)$ y $(3, 0)$:



Gráfica de la ecuación lineal

$$2x - 3y = 6$$



Ejercicio
Módulo 2

Gráfica la siguiente función lineal y escribe donde se interseca con los ejes.

$$-7x - 4y = 0$$

M2

Basado en
competencias

Resultado:

Intersecciones con eje x y eje y en:

$(0,0)$ y un punto (x,y) en $\left(2, -\frac{7}{2}\right)$

Ejemplo:

Gráfica la siguiente función lineal y escribe donde se interseca con los ejes. $2x - 3y - 12 = 0$

Solución:

Dando el valor para $x = 0$ y $y = 0$, esto implica que la gráfica debe intersectar a los dos ejes (*eje x y eje y*).

Si $x = 0$, entonces la ecuación queda como:

$$2(0) - 3y - 12 = 0$$

$$-3y - 12 = 0$$

Sumando 12 en ambos miembros de la igualdad:

$$-3y - 12 + 12 = 12$$

$$-3y = 12$$

Dividiendo a los dos miembros de la igualdad por -3 se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{-3}{-3}y &= \frac{12}{-3} \\ y &= -4\end{aligned}$$

Por lo tanto, una solución es la intersección con el eje y es A (0,-4)

Ahora, si $y = 0$ la ecuación queda como:

$$\begin{aligned}2x - 3(0) - 12 &= 0 \\ 2x - 12 &= 0\end{aligned}$$

Sumando 12 en ambos miembros de la igualdad

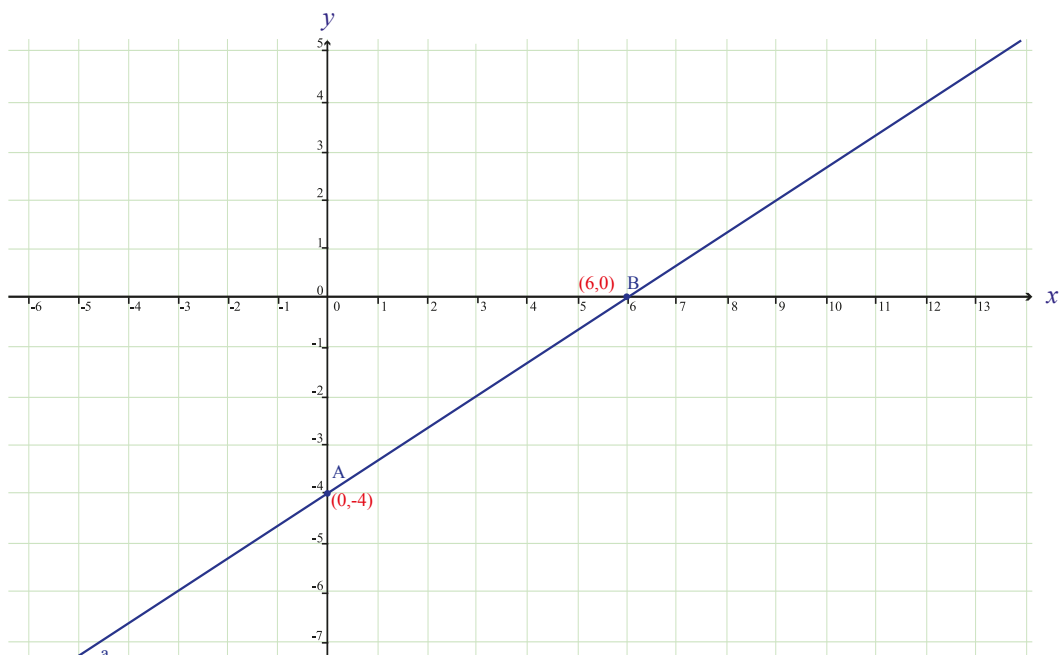
$$\begin{aligned}2x - 12 + 12 &= 12 \\ 2x &= 12\end{aligned}$$

Dividiendo a los dos miembros de la igualdad entre 2 se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{2}{2}x &= \frac{12}{2} \\ x &= 6\end{aligned}$$

Por lo tanto, otra solución posible es la intersección con el eje x es B (6,0)

La gráfica de la función es la recta que pasa por los puntos $(6,0)$ y $(0,-4)$:



Gráfica de la ecuación lineal $2x - 3y - 12 = 0$



Ejercicio
Módulo 2

Grafica la siguiente función lineal y escribe donde se intersecta con los ejes.
 $-5x + 2y + 20 = 0$

M2

Basado en
competencias

Resultado:

Intersecciones con eje x el punto $(4,0)$ y eje y el punto (x,y) en $(0,-10)$

Ejemplo:

Gráfica la siguiente función lineal y escribe donde se intersecta con los ejes.

$$2x - y - 3 = 0$$

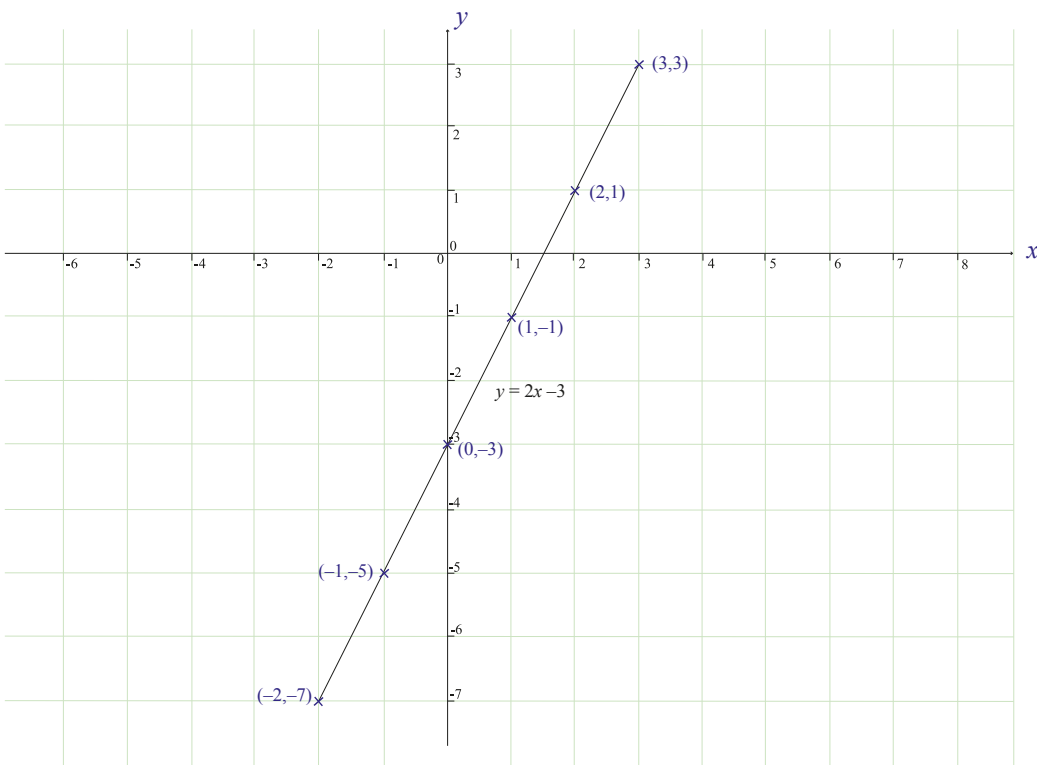
Solución

Para obtener algunas de las parejas ordenadas que constituyen la función, se asignan los valores enteros en el dominio de la función en la regla de correspondencia y se registran en una tabla para facilitar el procedimiento. A este procedimiento se le conoce como **tabulación**.

x	$y = 2(x) - 3$	(x, y)
-2	$2(-2) - 3 = -4 - 3 = -7$	$(-2, -7)$
-1	$2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$	$(-1, -5)$
0	$2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$	$(1, -1)$

x	$y = 2(x) - 3$	(x, y)
2	$2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$	$(2, 1)$
3	$2(3) - 3 = 6 - 3 = 3$	$(3, 3)$

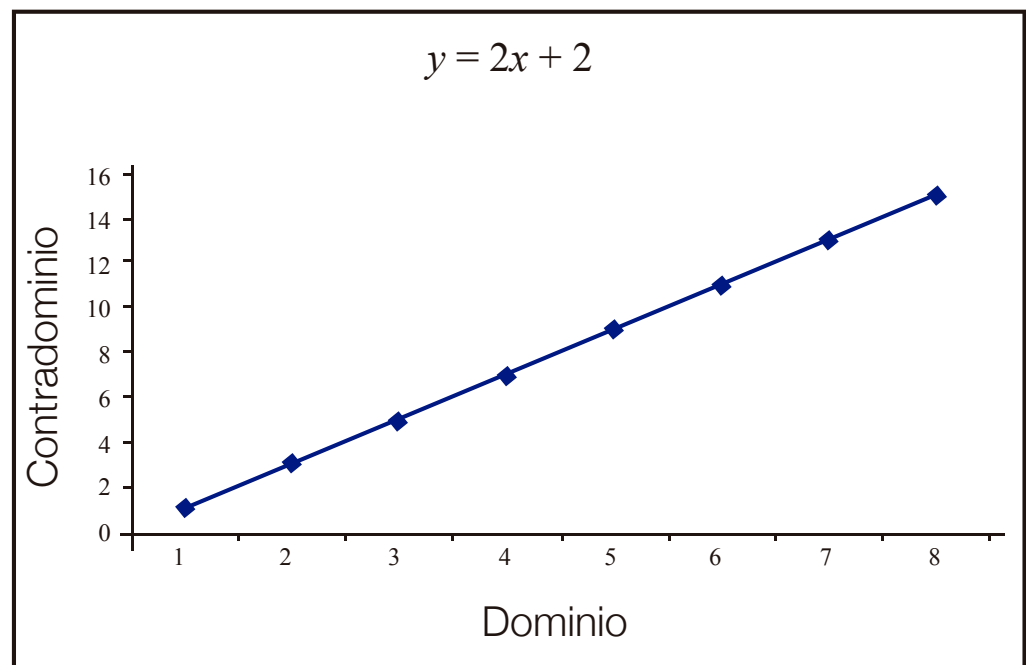
Estos puntos se colocan en el plano cartesiano marcando con una x en su lugar de acuerdo con las coordenadas (x, y) , en seguida se unen estos puntos con una línea continua debido a que los valores del dominio son todos los números reales entre -2 y 3 .



Gráfica de la función $2x - y - 3 = 0$

Graficar la función lineal $2x - y + 2 = 0$

x	$y = 2x + 2$
1	4
3	8
5	12
7	16
9	20
11	24
13	28
15	32



M2

Basado en
competencias

Construye la gráfica de la siguiente función:

$$2x - y + 1 = 0$$

5. Desigualdad lineal

Una **desigualdad** es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra. Resolver una desigualdad consiste en obtener todos los valores de la variable que la satisfagan.

Relaciones de orden. Para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$

$a < b$	"a es menor que b"
$a > b$	"a es mayor que b"
$a \leq b$	"a es menor o igual que b"
$a \geq b$	"a es mayor o igual que b"
$a > 0$	"a es un número positivo"
$a < 0$	"a es un número negativo"

Ejemplo:

$5 > 3$	se lee:	5 es mayor que 3
$4 > 7$	se lee:	4 es mayor que 7
$a + b \geq 0$	se lee:	a más b es mayor o igual a cero
$x \leq 3$	se lee:	x es menor o igual a 3
$7 < x < 8$	se lee:	x es mayor que 7 pero menor que 8
$x < -2$ o $x > 2$	se lee:	x es menor que -2 o mayor que 2

Nota: cada símbolo de desigualdad se abre hacia el valor mayor y apunta hacia el más pequeño.

Una **desigualdad lineal** en una variable es aquella que posee más de un elemento en su conjunto solución.

Por ejemplo: el conjunto solución de la desigualdad $4x - 5 > 2x + 3$ es $\{x \mid x > 4\}$.

5.1 Propiedades sobre desigualdades

Para operar con desigualdades se deben considerar las siguientes propiedades:

- Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$ (el signo de desigualdad no cambia)
- Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ (el signo de desigualdad no cambia)
- Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ (el signo de desigualdad cambia)

- Si $a > b$ entonces $b < a$
- Si $a > b$ entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (el signo de desigualdad cambia)
- Si $a > -b$ entonces $-a < b$ y si $a < -b$ entonces $-a > b$
- Si $a < b$ entonces $-a > -b$

5.2 Intervalos

Un **intervalo** es un conjunto de números reales que cumplen con ciertas propiedades de las desigualdades.

Existen dos tipos de intervalos.

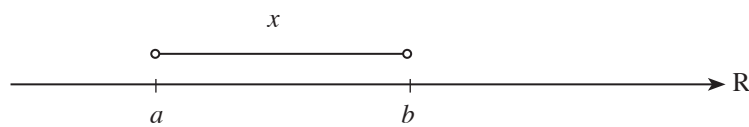
5.2.1. Intervalo de longitud finita

Es el conjunto de números reales comprendidos entre dos extremos $a, b \in \mathbb{R}$, donde $a \leq b$.

a) Intervalo abierto: es aquel que no incluye a los extremos.

Notación: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

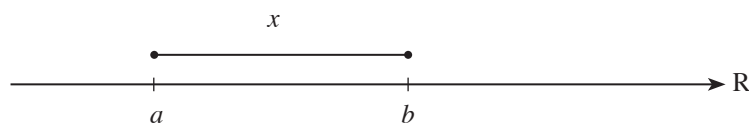
Gráficamente:



b) Intervalo cerrado: es aquel que sí incluye a sus extremos.

Notación: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

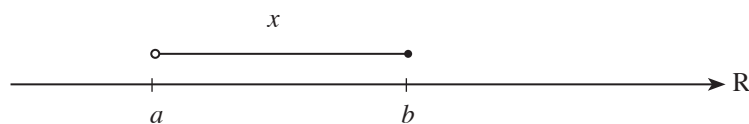
Gráficamente:



c) Intervalo semiabierto o semicerrado: es aquel que incluye sólo a uno de sus extremos.

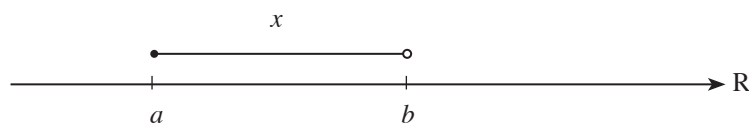
c¹) Notación: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

Gráficamente:



c²) Notación: $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$

Gráficamente:

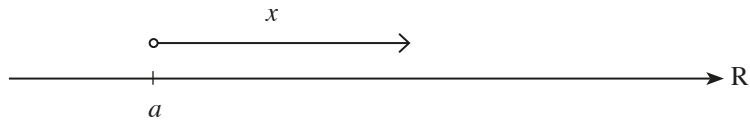


5.2.2. Intervalos de longitud infinita

Es el conjunto de números reales acotados cuando más por un sólo extremo $a \in \mathbb{R}$.

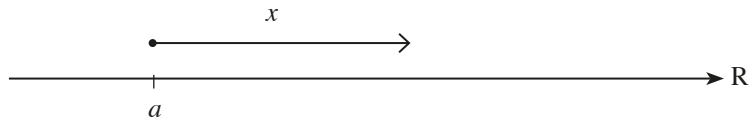
a) $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$

Gráficamente:



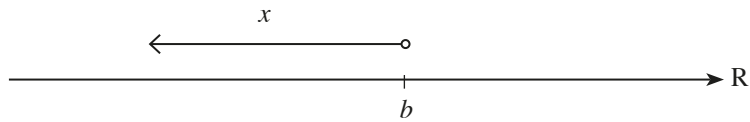
b) $[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$

Gráficamente:



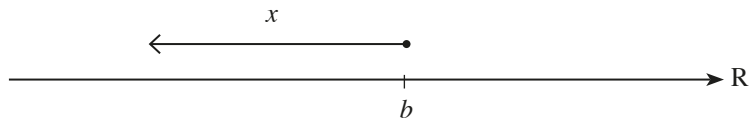
c) $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$

Gráficamente:



d) $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$

Gráficamente:



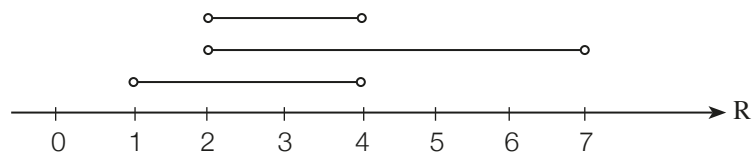
e) $(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

Ejemplo.

Resuelve las siguientes operaciones con intervalos, escribiendo el resultado como intervalos y represéntalos sobre una recta numérica.

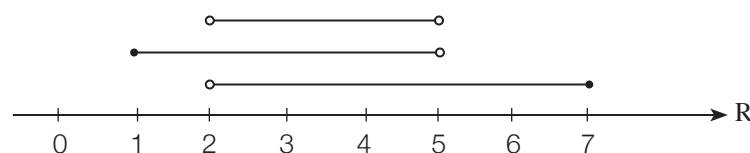
a) $(1,4) \cap (2,7) = (2,4)$

Gráficamente:



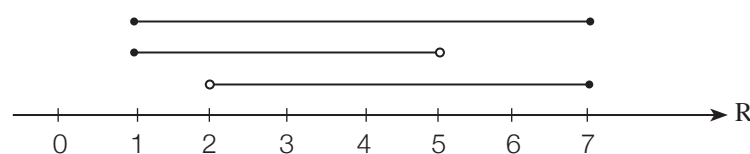
b) $(2,7) \cap (1,5) = (2,5)$

Gráficamente:



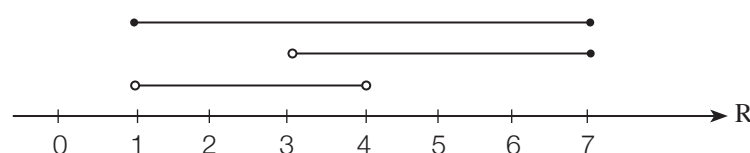
c) $(2,7] \cup [1,5) = [1,7]$

Gráficamente:



d) $(1,4) \cup (3,7] = (1,7]$

Gráficamente:



6. Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad en la que existe una o más incógnitas y sólo se satisface para determinados valores de las incógnitas. Resolver una inecuación consiste en obtener los valores de las incógnitas que la satisfacen.

6.1 Desigualdad condicional.

Es aquella que se cumple para algunos valores de la variable incluida.

Ejemplos:

$$\begin{array}{ll} 8x + 3 < 4x - 17 & \text{se cumple para } x < -5 \\ 3x - 8 \geq x + 20 & \text{se cumple para } x \geq 14 \end{array}$$

6.2 Desigualdad absoluta.

Es la que se cumple para cualquier valor de la variable contenida.

Ejemplo:

$$6x < 6x + 3$$

$$2(x + 6) > 2(x + 1)$$

Por consiguiente, una desigualdad absoluta se cumple para cualquier valor de la variable y una desigualdad condicional está limitada a un intervalo definido de valores.

Ejemplos:

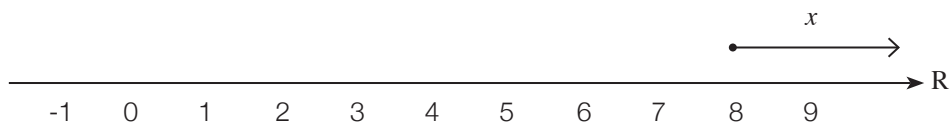
Obtén el conjunto solución de las desigualdades indicadas y represéntalo gráficamente.

a) $x - 3 > 5$

Solución:

Sumando 3 en ambos lados se tiene: $x - 3 + 3 > 5 + 3$
de donde, $x > 8$

Gráficamente:



b) $2x + 6 \leq 4x - 2$

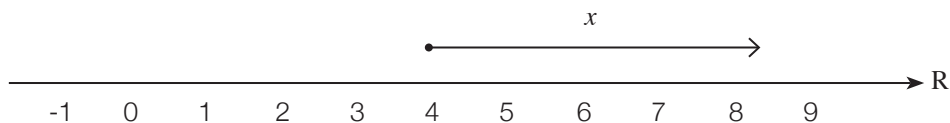
Solución:

Restando $4x$ y 6 en ambos lados se tiene: $2x + 6 - 4x - 6 \leq 4x - 2 - 4x - 6$
De donde, $-2x \leq -8$

Y usando la propiedad $-a \leq -b \Rightarrow a > b$
 $2x > 8$

Por lo que dividiendo ambos lados de la desigualdad entre 2 se tiene
 $x > 4$

Gráficamente:



Obtén el conjunto solución de las desigualdades propuestas y represéntalo gráficamente:

1) $3 + 8x > -3 + 6x$

2) $6 - 4x < 14 + 4x$

3) $6x - \frac{2}{3} \leq 4x + \frac{4}{3}$

4) $-4x + \frac{4}{3} > -\frac{3}{2}x - 2$

Ejemplo:

El gerente de una fábrica ensambladora de motores para automóvil debe decidir si deberán producir sus propios bujes, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a \$280.00 cada uno. La fabricación de los bujes incrementaría los costos generales de la empresa en \$3 800 al mes y el costo de material y de mano de obra será de \$5.60 por cada buje. ¿Cuántos bujes deberá ensamblar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios bujes?

Solución

Si x es el número de bujes utilizados por la empresa al mes, entonces el costo de adquirir x bujes a \$280 cada uno es de $280x$ pesos. El costo de fabricar x bujes es de \$5.60 por buje más costos generales de \$3 800 al mes, de modo que el costo total es $CT = 5.60x + 3800$

Para justificar la fabricación de los bujes, debe cumplirse la desigualdad:

Costo de adquisición > costo de fabricación

$$280x > 5.60x + 3800$$

$$280x - 5.60x > 3800$$

$$274.4x > 3800$$

$$x > 13.848$$

En consecuencia, la empresa debe ensamblar al menos 14 bujes al mes para justificar el fabricarlos.



Ejercicio
Módulo 2

Una empresa fabricante de zapatos tiene un precio unitario de venta de \$300 y un costo unitario de \$185. Si los costos fijos son de \$600 000 al año, determinar el número mínimo de pares de zapatos que deben ser vendidos para que la empresa tenga utilidades.

7. Valor absoluto

En la recta numérica, la distancia de un número a hasta cero se denomina valor absoluto del número y se representa colocando líneas verticales entre un número: el valor absoluto de 5 es 5

$$|5| = 5$$

El valor absoluto de -5 es 5

$$|-5| = 5$$

Expresemos ahora los resultados en la recta numérica:



Si el número es positivo, su distancia al origen es el mismo:

$$|x| = x$$

Si el número es negativo:

$$|-x| = x$$

El valor absoluto de cero es cero:

$$|0| = 0$$

Ejemplo:

$$\left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

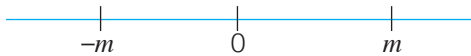
$$-|-9| = -9$$

$$|-67665| = 67665$$

Recordemos que “el valor absoluto de un número real es el valor que tiene el número cuando prescinde del signo”.

7.1 Propiedades del valor absoluto

- La igualdad $|x| = m$ con $m \geq 0$ solo la satisface $x = m$ y $x = -m$ ya que son los únicos puntos cuya distancia al origen es exactamente m .



$$x = m$$

$$x = -m$$

- La desigualdad $|x| = m$ con $m < 0$ no tiene solución.
- Si $|x| \leq m$ y $m > 0$, entonces $-m \leq x \leq m$.

Los puntos que satisfacen la desigualdad son aquellos cuya distancia al origen es menor o igual a m ; son además los que se encuentran a la izquierda de m y a la derecha de $-m$.

$$\text{Si } |x| \geq m, \text{ entonces } x \geq m \text{ o } x \leq -m$$

Los puntos que satisfacen son aquellos cuya distancia es mayor o igual a m ; son los que están a la derecha de m , y los que se encuentran a la izquierda de $-m$.

Ejemplo:

$$|5x + 2| = 12$$

La desigualdad se satisface si se cumple $5x + 2 = 12$ y $5x + 2 = -12$

$$5x + 2 = 12$$

$$5x = 12 - 2$$

$$5x = 10$$

$$x = \frac{10}{5}$$

$$x = 2$$

$$5x + 2 = -12$$

$$5x = -12 - 2$$

$$5x = -14$$

$$x = -\frac{14}{5}$$

Los valores que cumplen la ecuación son:

$$x = 2$$

$$x = -\frac{14}{5}$$

Comprobación:

Con

$$x = 2$$

$$|5x + 2| = 12$$

$$|5(2) + 2| = 12$$

$$|10 + 2| = 12$$

$$|12| = 12$$

Con

$$x = -\frac{14}{5}$$

$$|5(-\frac{14}{5}) + 2| = 12$$

$$|-14 + 2| = 12$$

$$|-12| = 12$$

7.2 Valor absoluto en las desigualdades

Algunas desigualdades incluyen el valor absoluto y los símbolos $<$ y $>$ de la forma siguiente:

$$|x| < b \text{ significa } -b < x < b$$

Se lee así: el valor absoluto de x es menor a b , lo que significa que el valor de x es mayor que $-b$ y menor que b .

$$|x| > b \text{ significa } x < -b \text{ y } x > b$$

Se lee así: x es menor que $-b$ $\wedge$ x es mayor que b .

Ejemplo:

$$|x| < 8 \text{ significa } -8 < x < 8$$

$$|x| > 2 \text{ significa } x < -2 \text{ y } x > 2$$

Ejemplo:

$$\left| \frac{x}{3} + 5 \right| < 7$$

En este ejemplo es el caso que $|x| < b$

La desigualdad se satisface únicamente si se cumple:

$$-7 < \frac{x}{3} + 5 < 7$$

Observa el sentido de la desigualdad

$$-7 < \frac{x}{3} + 5$$

$$-7 - 5 < \frac{x}{3}$$

$$3(-12) < x$$

$$-36 < x$$

$$x > -36$$

$$\frac{x}{3} + 5 < 7$$

$$\frac{x}{3} < 7 - 5$$

$$x < 2(3)$$

$$x < 6$$

Los valores que satisfacen la desigualdad son:

$$x < 6 \quad y \quad x > -36 \quad \text{que se expresa: } -36 < x < 6$$



Ejemplo:

$$|7x - 1| \geq 4x + 3$$

La desigualdad $|7x - 1| \geq 4x + 3$ es equivalente a las desigualdades:

$$7x - 1 \geq 4x + 3$$

$$7x - 1 \leq -(4x + 3)$$

$$7x - 1 \geq 4x + 3$$

$$7x - 4x \geq 1 + 3$$

$$3x \geq 4$$

$$x \geq \frac{4}{3}$$

$$7x - 1 \leq -(4x + 3)$$

$$7x - 1 \leq -4x - 3$$

$$7x + 4x \leq -3 + 1$$

$$11x \leq -2$$

$$x \leq -\frac{2}{11}$$

Los valores que satisfacen la desigualdad son:

$$x \leq -\frac{2}{11} \quad y \quad x \geq \frac{4}{3}$$

Realiza la gráfica con tu docente:



Ejercicio
Módulo 2

Resuelve la ecuación $|3x + 6| = 9$.

Solución:

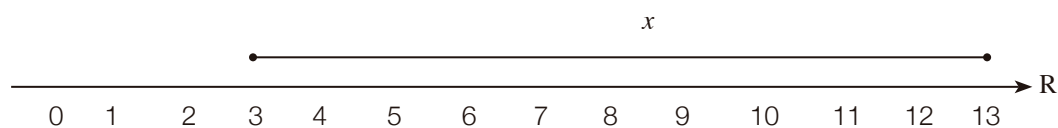
$$x = 5 \text{ y } x = -1$$

Resolver la inecuación $|x - 8| \leq 5$

Solución:

$$3 \leq x \leq 13$$

Gráficamente:

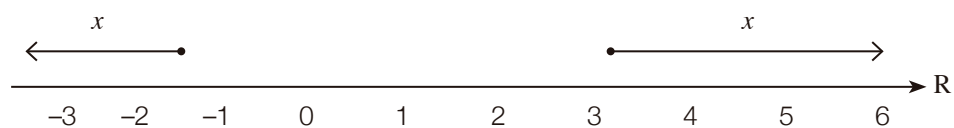


Resuelve la inecuación $|3 - 4x| - 9 \geq 0$.

Solución:

$$x \leq -\frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x \geq 3$$

Gráficamente:



8. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una expresión de la forma $ax + by = c$ donde a y b son los coeficientes de x y y (incógnitas) y c es un valor constante. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas será de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

8.1 Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables

Para resolver algebraicamente un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas pueden utilizarse los siguientes métodos: de sustitución, de igualación y de suma y resta.

8.1.1. Método de suma y resta

El método de suma y resta consiste en igualar los coeficientes de una de las variables para eliminarla a través de una suma o resta.

Para aplicar este método hay que recordar que si multiplicamos todos los términos de una ecuación lineal con dos incógnitas por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación lineal equivalente a la dada que tiene las mismas soluciones. Esto quiere decir que, por ejemplo, las ecuaciones $x + 3y = -1$, $2x + 6y = -2$ y $5x + 15y = -5$ tienen las mismas soluciones; la segunda ecuación es igual a la primera multiplicada por 2 y la tercera ecuación es igual a la primera multiplicada por 5.

Por lo anterior, el método de reducción o de suma y resta consiste en llevar a cabo los siguientes pasos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

1. Se elige la incógnita más apropiada para eliminarla.
2. Se multiplica una o las dos ecuaciones por un número o números tales que la incógnita que queremos eliminar aparezca en las dos ecuaciones con el mismo coeficiente, pero cambiado de signo.
3. Se suman los términos semejantes en las dos ecuaciones con lo que desaparecerá una de las incógnitas.
4. Se resuelve la ecuación resultante y se obtiene el valor de la incógnita.
5. Se sustituye este valor en una de las ecuaciones iniciales y se calcula la otra incógnita.
6. Se comprueba el resultado sustituyendo los valores de x y y en las dos ecuaciones para ver si cumplen.

Ejemplo:

Escribir el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{cases} 4x + 6y = -3 \dots (1) \\ 5x + 7y = -2 \dots (2) \end{cases}$$

Se multiplican los dos miembros de la primera ecuación por 5 y los dos miembros de la segunda ecuación por -4 ; esto da como resultado que los coeficientes de x sean iguales y de signo contrario:

$$\begin{array}{rcl} 5(4x + 6y = -3) & 20x + 30y = -15 \\ -4(5x + 7y = -2) & -20x - 28y = 8 \end{array}$$

Sumando algebraicamente ambas ecuaciones resulta:

$$\begin{array}{r} 20x + 30y = -15 \\ -20x - 28y = 8 \\ \hline + 2y = -7 \end{array}$$

Resolviendo la ecuación, tenemos: $y = -\frac{7}{2}$

Sustituyendo el valor $y = -\frac{7}{2}$ en cualquiera de las ecuaciones originales, para nuestro caso elegimos la primera.

$$\begin{array}{rcl} 4x + 6(-7/2) & = & -3 \\ 4x - 21 & = & -3 \\ 4x & = & -3 + 21 \\ x & = & 18/4 \\ x & = & 9/2 \end{array}$$

Su comprobación es:

$$\begin{array}{rcl} 5(9/2) + 7(-7/2) & = & -2 \\ 45/2 - 49/2 & = & -2 \\ -4/2 & = & -2 \\ -2 & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4(9/2) + 6(-7/2) & = & -3 \\ 18 - 21 & = & -3 \\ -3 & = & -3 \end{array}$$

Por lo tanto, los valores que satisfacen al sistema son:

$$x = 9/2, y = -7/2$$



Ejercicio
Módulo 2

Escribir el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \dots (1) \\ 3x + 2y = 2 \dots (2) \end{cases}$$

Resultado:
 $x = 0, y = 1$



Basado en
competencias

8.1.2. Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una variable de una ecuación y sustituirla en la otra ecuación. Por ejemplo:

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, la que sea más fácil.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de primer grado con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de una de las incógnitas. Este valor se sustituye en la ecuación despejada al principio para obtener el valor de la otra incógnita.
4. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.
5. Comprobamos los resultados sustituyendo los valores de x y y en las dos ecuaciones para ver si se cumplen.

Ejemplo:

Escribir el sistema de sistema de ecuaciones como:

$$\begin{cases} x + 6y = -3 \dots (1) \\ x + 7y = -2 \dots (2) \end{cases}$$

Solución:

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, para nuestro caso sería de la primera ecuación.

$$x = -3 - 6y$$

Se sustituye la expresión $x = -3 - 6y$ en la otra ecuación, obteniendo una nueva ecuación de primer grado con una sola incógnita:

$$\begin{aligned} x + 7y &= -2 \\ (-3 - 6y) + 7y &= -2 \end{aligned}$$

Se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de la incógnita (y).

$$\begin{aligned} -6y + 7y &= -2 + 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Este valor $y = 1$ se sustituye en la primera ecuación para obtener el valor de la otra incógnita:

$$\begin{aligned} x + 6y &= -3 \\ x + 6(1) &= -3 \\ x + 6 &= -3 \\ x &= -3 - 6 \\ x &= -9 \end{aligned}$$

Comprobación: se sustituyen los valores obtenidos $x = -9 \wedge y = 1$ en las ecuaciones iniciales.

Primera ecuación:

$$\begin{aligned} x + 6y &= -3 \\ -9 + 6(1) &= -3 \\ -9 + 6 &= -3 \\ -3 &= -3 \end{aligned}$$

Segunda ecuación:

$$\begin{aligned}x + 7y &= -2 \\-9 + 7(1) &= -2 \\-9 + 7 &= -2 \\-2 &= -2\end{aligned}$$

Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema, que es el punto $(-9, 1)$.



Ejercicio
Módulo 2

Escribir el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

Resultado:

$$x = 6, y = -1$$

8.1.3. Método de igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma variable en ambas ecuaciones e igualarlas entre sí. Por ejemplo:

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Se igualan las dos expresiones resultantes, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de una de las incógnitas.
4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.
6. Se comprueba el resultado sustituyendo los valores de x y y en las dos ecuaciones para ver si se cumplen.

Ejemplo:

escribir el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{cases} x + 6y = -3 \dots (1) \\ x + 7y = -2 \dots (2) \end{cases}$$

Solución:

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$x = -3 - 6y$$

$$x = -2 - 7y$$

Se igualan las dos expresiones resultantes, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita:

$$-3 - 6y = -2 - 7y$$

Se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de una de las incógnitas:

$$-6y + 7y = -2 + 3$$

$$y = 1$$

El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita:

$$x + 6(1) = -3$$

$$x + 6 = -3$$

$$x = -3 - 6$$

$$x = -9$$

Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema que es el punto $(-9, 1)$.

Escribir el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

Resultado:

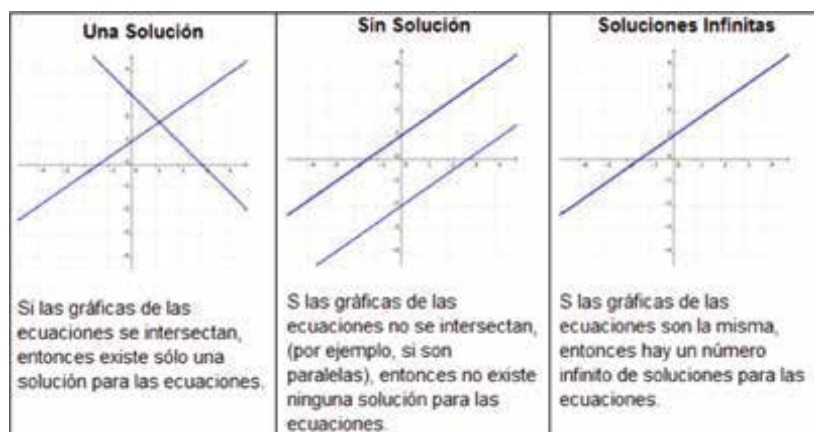
$$x = 5, y = -3$$



8.1.4. Método gráfico

El proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el método gráfico se lleva a cabo de la siguiente manera:

- Se despeja la incógnita y en ambas ecuaciones.
- Se construye, para cada una de las dos funciones de primer grado obtenidas, la tabla de valores correspondientes.
- Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados.
- En este último paso hay tres posibilidades:
 - Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas x y y . Se denomina sistema compatible determinado.
 - Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. Se denomina sistema compatible indeterminado.
 - Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución. Se denomina incompatible.



Ejemplo:

Escribir el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{cases} x + y = 600 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Solución:

Para resolver el sistema por el método gráfico, despejamos la incógnita y en ambas ecuaciones y entonces obtenemos:

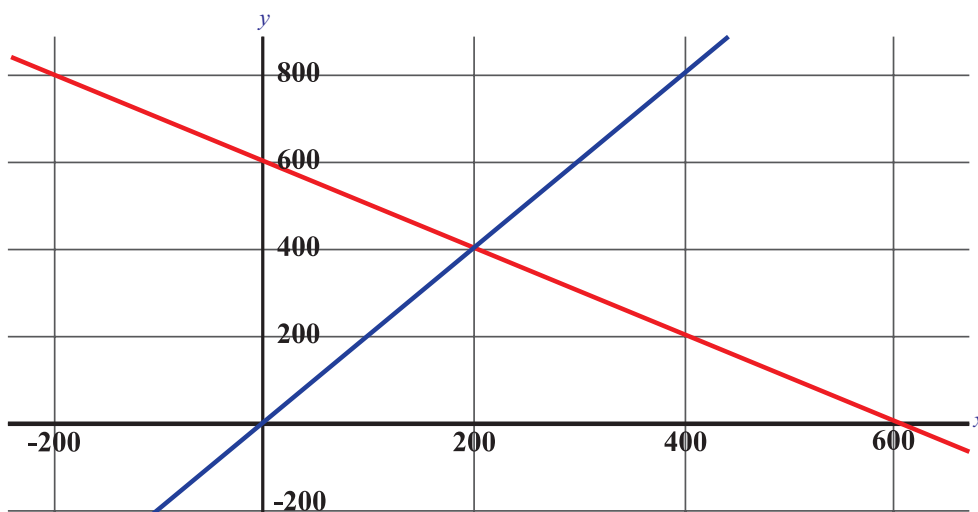
$$y = -x + 600$$

$$y = 2x$$

Para poder representar ambas rectas, se deben calcular los valores a través de una tabla:

$y = -x + 600$		$y = 2x$	
x	y	x	y
200	400	100	200
600	0	200	400

Graficar los valores:



Si observamos la gráfica, notaremos que las dos rectas se cortan en el punto, la solución del sistema es $x = 100$ y $y = 400$ que es el punto $(200, 400)$.

Ejercicios:

Cambiar el sistema de ecuaciones como:

1.
$$\begin{cases} -4x - 3y = 29 \\ -8x - 5y = 59 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 5x - 7y = -41 \\ x - y = -15 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 7x + 3y = 6 \\ -10x + 5y = -3 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} -2x - 3y = -11 \\ 7x + 7y = 21 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 6x + 9y = -57 \\ -5x - 5y = 30 \end{cases}$$

Solución:

1. $x = -8, y = 1$

2. $x = -32, y = 17$

3. $x = 3/5, y = 3/5$

4. $x = -2, y = 5$

5. $x = 1, y = -7$

$$6. \begin{cases} -9x + 3y = 66 \\ 7x + 4y = -83 \end{cases}$$

$$6. \quad x = -9, y = -5$$

$$7. \begin{cases} 4x + 7y = -26 \\ -x + 9y = -15 \end{cases}$$

$$7. \quad x = -3, y = -2$$

$$8. \begin{cases} -9x + 8y = 162 \\ -4x - 2y = 22 \end{cases}$$

$$8. \quad x = -10, y = 9$$

$$9. \begin{cases} -6x - 8y = -102 \\ -3x - 5y = -57 \end{cases}$$

$$9. \quad x = 9, y = 6$$

$$10. \begin{cases} -6x + 7y = -20 \\ -7x - y = 50 \end{cases}$$

$$10. \quad x = -6, y = -8$$

9. Problemas de aplicación

Los métodos para obtener la solución de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas permiten llevar a cabo el planteamiento y la resolución de situaciones problema en el mundo real, que es donde radica su importancia. A continuación se ejemplifican situaciones problema que involucran ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

Ejemplo:

Una parcela rectangular tiene un perímetro de 240 m, si mide el triple de largo que de ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela?

Solución:

Llamamos x al ancho de la parcela y y al largo.

El largo es el triple del ancho: $y = 3x$

El perímetro es: $2x + 2y = 240$

Dividiendo entre 2: $x + y = 120$

El sistema de ecuaciones es:

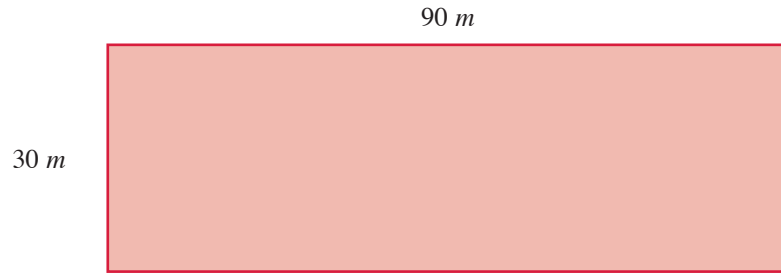
$$\begin{aligned} y &= 3x \\ x + y &= 120 \end{aligned}$$

Resolviendo por el método de sustitución:

$$\begin{aligned} x + 3x &= 120 \\ 4x &= 120 \\ x &= 120/4 \\ x &= 30 \text{ m} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= 3x \\ y &= 3(30 \text{ m}) \\ y &= 90 \text{ m} \end{aligned}$$



Ejemplo:

Carmela tiene el triple de años que su hija María. Ambas edades suman 60 años. ¿Qué edad tiene cada una de ellas?

Solución:

Si María tiene x años, entonces Carmela tiene $3x$ años (el triple de la edad de su hija).

La suma de las dos edades es 60 años. Entonces: edad de María + edad de Carmela = 60. Matemáticamente se tendría:

$$x + 3x = 60$$

Resolviendo la ecuación resultante:

$$4x = 60$$

$$x = \frac{60}{4}$$

$$x = 15$$

Entonces, María tiene 15 años (recuerda que x representa la edad de María), y su mamá Carmela tiene: $(3)(15) = 45$ años, porque la mamá equivale a $3x$.

Por lo tanto, lo anterior cumple con la condición de que, al sumar las edades, obtengamos 60:

$$15 + 45 = 60$$



María tiene 15 años
y su mamá 45
Fuente: Shutterstock

Ejercicios adicionales:

Resolver las siguientes ecuaciones lineales

a) $x + 1 = 3$

b) $6x - 7 = 2x + 5$

c) $\frac{2(13 + 2x)}{4x + 1} = \frac{3}{4}$

d) $\frac{3 + 5x}{5} = \frac{4 - x}{7}$

e) $4x - 3 = -12x + 5$

f) $6x + 2 - 3x = 7x + 4$

g) $4(2y + 5) = 3(5y - 2)$

h) $\frac{4 - x}{2} - \frac{5x}{3} = 1$

i) $1.5x - 0.7 = 0.4(3 - 5x)$

j) $6x + 12x - 3 - 7x + 4 = 0$

k) $3x - \left(\frac{2x}{5}\right) = \left(\frac{x}{10}\right) - \frac{7}{4}$

l) $\frac{2x - 1}{3} - \frac{x + 13}{24} = 3x + \frac{5(x + 1)}{8}$

m) $\frac{2}{3}\left(\frac{x + 1}{5}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{x - 6}{3}\right)$

n) $\frac{4}{3} + \frac{x}{4} = 2x - 17$

o) $\frac{1}{5}(x - 2) - (2x - 3) = \frac{2}{3}(4x + 1) - \frac{1}{6}(2x - 7)$

Resultado:

a) $x = 2$

b) $x = 3$

c) $x = \frac{-101}{4}$

d) $x = -\frac{1}{40}$

e) $x = \frac{1}{2}$

f) $x = -\frac{1}{2}$

g) $y = \frac{26}{7}$

- h) $x = \frac{6}{13}$
- i) $x = \frac{19}{35}$
- j) $x = -\frac{1}{11}$
- k) $x = -\frac{7}{10}$
- l) $x = -\frac{1}{2}$
- m) $x = 14$
- n) $x = \frac{220}{21}$
- o) $x = \frac{23}{124}$

Escribir los sistemas de ecuaciones como:

- a)
$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -2x + 4y = -12 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 6x + 5y = 1 \end{cases}$$
- e)
$$\begin{cases} -2x + 3y = 14 \\ 3x - y = -14 \end{cases}$$
- f)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -6x + 12y = 1 \end{cases}$$
- g)
$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$$



Basado en
competencias

$$\text{h)} \quad \begin{cases} -2x + 4y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$\text{i)} \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -3x + y = -10 \end{cases}$$

$$\text{j)} \quad \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$$

$$\text{k)} \quad \begin{cases} 5x + 6y = 20 \\ 4x - 3y = -23 \end{cases}$$

$$\text{l)} \quad \begin{cases} x - \frac{3x+4}{7} = \frac{y+2}{3} \\ 2y - \frac{5x+4}{11} = \frac{x+24}{2} \end{cases}$$

$$\text{m)} \quad \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = -\frac{2}{7} \\ \frac{8x+y-1}{x-y-2} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{n)} \quad \begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5 \\ 3y - \frac{x}{14} = 26 \end{cases}$$

$$\text{o)} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 1 \\ \frac{1}{8}y - \frac{5}{6}x = 2 \end{cases}$$

Resultado:

$$\text{a)} \quad x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}$$

$$\text{b)} \quad x = 0, y = -3$$

$$\text{c)} \quad x = 0, y = 3$$

$$\text{d)} \quad x = -\frac{1}{4}, y = \frac{1}{2}$$

$$\text{e)} \quad x = -4, y = 2$$

f) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$

g) $x = 3, y = -2$

h) $x = \frac{51}{2}, y = \frac{29}{2}$

i) $x = 3, y = -1$

j) No tiene solución

k) $x = -2, y = 5$

l) $x = 8, y = 10$

m) $x = -5, y = 9$

n) $x = 14, y = 9$

l) $x = -3, y = -4$

1. El costo total de 5 libros de texto y 4 lapiceros es de \$32; el costo total de otros 6 libros de texto iguales y 3 lapiceros es de \$33. Hallar el costo de cada artículo.
2. Hallar dos números tales que la suma de sus recíprocos sea 5, y que la diferencia de sus recíprocos sea 1.
3. Si a los dos términos de una fracción se añade 3, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$, y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$. Hallar la fracción.
4. Se tienen \$120 en 33 billetes de a \$5 y de a \$2. ¿Cuántos billetes son de \$5 y cuántos de \$2?
5. María y su hija Sara tienen en la actualidad 56 años entre las dos. Si dentro de 18 años Sara tendrá 5 años más que la mitad de la edad de su madre, ¿qué edad tiene actualmente cada una?
6. Una parcela rectangular tiene un perímetro de 240 m, si mide el triple de largo que de ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela?
7. Jorge tiene en su cartera billetes de 10€ y 20€, en total tiene 24 billetes y 440€. ¿Cuántos billetes tiene de cada tipo?
8. En un examen de 100 preguntas Ana ha dejado sin contestar 9 y ha obtenido 574 puntos. Si por cada respuesta correcta se suman 10 puntos y por cada respuesta incorrecta se restan 2 puntos, ¿cuántas ha contestado bien y cuántas mal?
9. En un curso hay 70 alumnos matriculados. En el último examen de Matemáticas han aprobado 39 alumnos, el 70% de las chicas y el 50% de los chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en el curso?
10. Al dividir un número entre otro el cociente es 2 y el resto es 2. Si la diferencia entre el dividendo y el divisor es 59, ¿de qué números se trata?
11. Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. En total hay 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?



12. Encuentra dos números sabiendo que la mitad de su suma es 218 y el doble de su diferencia 116.
13. Un ejercicio realizado en clase consta de 16 preguntas. El profesor suma 5 puntos por cada solución correcta y resta 3 puntos por cada pregunta no contestada o mal contestada. Si un alumno ha obtenido 32 puntos en el ejercicio, ¿cuántas preguntas ha contestado correctamente?
14. Halla dos números naturales cuya suma sea 140 y al dividir el mayor entre el menor se obtenga 2 de cociente y 14 de residuo.
15. Hace tres años la edad de Juan era el doble que la de su hermana Julia. Dentro de 7 años, la edad de Juan será de $\frac{4}{3}$ de los años que tenga Julia. ¿Qué edad tienen actualmente cada uno?
16. Raquel ha pagado \$55.72 por una camiseta y un pantalón que costaban \$70 entre los dos. Si en la camiseta han hecho un 18% de descuento y en el pantalón un 22 %, ¿cuál es el precio original de cada artículo?
17. Un comerciante compró 35 juegos de un tipo y 25 juegos de otro pagando por ellos \$1220. Con la venta de los primeros ganó un 25% y con los segundos perdió un 5% de tal manera que recibió \$170 de ganancia sobre el precio de compra. Calcula el precio de compra de cada tipo de juego.
18. Hallar dos números tales a los que si les agregamos 7 unidades los resultados estén en la relación 3 a 2, pero si les restamos cinco unidades la razón de estas diferencias es $\frac{5}{2}$.
19. La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?
20. Se tienen 120 euros en 33 billetes de 5 euros y de 2 euros. ¿Cuántos billetes son de 5 euros y cuántos son de 2?
21. Hace 8 años la edad de Mateo era el triple de la de Pedro y, dentro de 4 años, la edad de Pedro será $\frac{5}{9}$ de la de Mateo. ¿Cuáles son las edades actuales de Mateo y Pedro?
22. La suma de las edades de tres hermanos es 160. La suma de la edad del mayor y el mediano dividida entre cuatro es igual a la edad del menor menos 20. Si restamos la edad del menor a la del mayor, dividimos el resultado entre dos y luego sumamos la edad del mediano el resultado es 57. Hallar las edades de los tres hermanos.

Respuestas: Libros de texto \$4, lapiceros \$3
 1er número= $\frac{1}{3}$, 2º número= $\frac{1}{2}$
 Fracción = $\frac{5}{13}$
 18 billetes de \$5, 15 billetes de \$2
 María 40 años, Sara 16 años
 Ancho = 30 m, largo = 90 m
 4 billetes de 10 €, 20 billetes de 20 €
 63 contestadas bien, 28 contestadas mal
 20 chicas, 50 chicos
 Números 62 y 3

Resultado:

11. 13 habitaciones sencillas y 37 dobles.
12. Los números son 189 y 247.
13. El alumno ha contestado bien a 10 cuestiones, y no ha contestado o ha contestado mal 6.
14. Los números son 98 y 42.
15. La edad de Juan es 13 años y la de Julia 8 años.
16. El precio original de la camiseta es de \$28.00 y el del pantalón \$42.00.
17. El precio de compra de cada tipo de juego es de \$22.00 y \$18.00.
18. Los números son 20 y 11.

19. Los números son 3 y 6, por lo tanto el número es 36.
20. Hay 15 billetes de 2 euros y 18 billetes de 5 euros.
21. Mateo tiene 32 años y Pedro tiene 16 años.
22. Edad del hermano mayor 62 años; edad del hermano de en medio 50 años y edad del hermano menor 48 años.





Módulo 3

Ecuación cuadrática



Competencias genéricas y atributos¹

1. Se conoce y se valora a sí mismo, aborda problemas o retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
 - 1.1. Enfrenta las dificultades que se le presentan, es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
 - 4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
 - 4.5. Maneja las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para poder obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
 - 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
 - 5.2. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
 - 5.6. Utiliza las TIC para procesar e interpretar información.

¹Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).

8. Participa y colabora de una manera efectiva en equipos diversos.

8.1. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

8.2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.



Competencias disciplinares básicas y extendidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las TIC.



Introducción

¿Qué son las ecuaciones cuadráticas?

Las ecuaciones cuadráticas, también conocidas como ecuaciones de segundo grado, es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2.

Ecuación completa: son ecuaciones de la fórmula " $ax^2 + bx + c = 0$ ", que tienen un término en x^2 , un término en x y un término independiente.

Así pues, con base en estos y otros estudios, se han estructurado varios métodos para resolver ecuaciones cuadráticas, entre los que figuran: el método de factorización, completar un trinomio cuadrado perfecto y por fórmula general, que tratamos en este módulo.

1. Concepto de ecuación cuadrática

Toda ecuación cuadrática tiene dos raíces, que corresponden a los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación. Resolver una ecuación cuadrática consiste en obtener los valores de sus raíces.

1.1. Definición de ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a , b y c son números reales y $a \neq 0$.

Ejemplo

$$5x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$7x^2 - 4x + 9 = 0$$

Ecuaciones completas: son ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con un término en x^2 , un término en x y un término independiente.

Ejemplo

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$1x^2 + 4x = -7$$

Ecuaciones incompletas: son ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$, que carecen del término en x o de la forma $ax^2 + bx = 0$, que carecen del término independiente.

Ejemplo

$$1x^2 - 16 = 0$$

$$3x^2 - 9x = 0$$

2. Métodos para la solución de ecuaciones cuadráticas con una variable

2.1. Método de factorización

Se utilizan procesos algebraicos como factor común, diferencia de cuadrados y factorización de un trinomio cuadrático.

Los dos primeros procesos se emplean en ecuaciones de las formas $ax^2 + bx = 0$ y $ax^2 + c = 0$, el tercero en ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

2.1.1 Ecuaciones completas

Para resolver una ecuación de segundo grado completa por factorización se debe colocar primero en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Si $a = 1$, se tendrá que $x^2 + bx + c = 0$ y para factorizar se buscarán dos números que multiplicados den c y sumados den b .

Ejemplo:

Resuelve la ecuación por factorización

$$x^2 - x - 20 = 0$$

Buscando dos números que multiplicados den -20 y sumados resulte -1	-5; 4
Factorizando el trinomio simple	$(x - 5)(x + 4) = 0$
Igualando con cero cada uno de los factores	$x - 5 = 0$ $x + 4 = 0$
Despejando x se obtienen las dos soluciones de la ecuación	Primera solución: $x_1 = -4$ Segunda solución: $x_2 = 5$

Ejercicio:

Resuelve la ecuación

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



Basado en competencias

Resultado:

Primera solución $x_1 = 1$

Segunda solución $x_2 = 2$

Si en la ecuación cuadrática $a \neq 1$, se procede como se muestra a continuación:

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación cuadrática

$$6x^2 - 7x - 3 = 0$$

Multiplicando el coeficiente del término cuadrático por el término independiente se obtiene	$(6)(-3) = -18$
Por lo que necesitamos dos números cuyo producto es	-18
Y que al sumarse algebraicamente se obtenga el coeficiente del término lineal que es	-7
Los dos números son	-9 y 2
Porque	$(-9)(2) = -18$ y $-9 + 2 = -7$

Sustituyendo los dos valores obtenidos en la ecuación original se obtiene	$6x^2 - 9x + 2x - 3 = 0$
Aplicando el método de agrupación de términos semejantes	$\underbrace{6x^2 - 9x}_{\text{factorizando}} + \underbrace{2x - 3}_{\text{factorizando}} = 0$
Al factorizar los dos primeros términos, encontramos que tienen en común y los dos últimos no tienen ningún elemento, por ello consideramos como factor común el que es común a cualquier término	$3x(2x - 3) + 1(2x - 3) = 0$
Factorizando el binomio común	$(2x - 3)(3x + 1) = 0$
Igualando cada factor a cero	$(2x - 3) = 0$ $(3x + 1) = 0$
Despejando del primer factor	$2x - 3 = 0$ $2x = 3 \quad x = \frac{3}{2}$
Despejando del segundo factor	$3x + 1 = 0$ $3x = -1 \quad x = -\frac{1}{3}$
Se obtienen las dos soluciones de la ecuación	$x_1 = -\frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{3}{2}$

Resuelve la ecuación

$$20x^2 + 7x - 6 = 0$$

Resultado:

Primera solución: $x = -\frac{3}{4}$

Segunda solución: $x = \frac{2}{5}$

2.1.2 Ecuaciones incompletas

Si en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $c = 0$, entonces se tiene una ecuación cuadrática incompleta sin término independiente de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, una de cuyas soluciones siempre será cero.

Es decir:

$ax^2 + bx = 0$ Se factoriza una x por ser factor común de ambos términos.

$x(ax + b) = 0$



Igualando a cero los factores:

$$x = 0 \text{ y } ax + b = 0$$

Primera solución $x = 0$

Segunda solución $x = -\frac{b}{a}$

Ejemplo:

Obtener las raíces de la ecuación

$$4x^2 + 16x = 0$$

Utilizando factor común	$x(4x + 16) = 0$
Igualando con cero cada uno de los factores	$x = 0 \quad 4x + 16 = 0$
Despejando x del segundo factor	$4x = -16$ $x = -4$
Se obtienen las dos soluciones de la ecuación	Primera solución: $x = 0$ Segunda solución: $x = -4$



Resuelve la ecuación

$$x^2 - 4x = 0$$

Resultado:

Primera solución: $x = 0$

Segunda solución: $x = 4$

Si en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $b = 0$, entonces se tiene una ecuación cuadrática incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$. Para este caso $c < 0$, pues de lo contrario se tendrían raíces imaginarias.

Ejemplo:

Obtén las raíces de la ecuación

$$x^2 - 9 = 0$$

Utilizando $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	$(x + 3)(x - 3) = 0$
Igualando con cero cada uno de los factores	$x + 3 = 0 \quad x - 3 = 0$
Despejando de ambos factores, se obtienen las dos soluciones de la ecuación	Primera solución: $x = -3$ Segunda solución: $x = 3$



Resolver la ecuación

$$3x^2 - 9 = 0$$

Resultado:

Primera solución: $x_2 = \sqrt{3}$

Segunda solución: $x_1 = -\sqrt{3}$

2.2. Trinomio cuadrado perfecto

Si se tiene una expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

El procedimiento de completar cuadrados consiste en cambiar una expresión de la forma $x^2 + bx$ a otra dada como $(x + h)^2$.

Lo cual se realiza sumando $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ de la siguiente manera:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Decimos que se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x a la expresión dada.

Ejemplo:

Resuelve la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$, completando el trinomio cuadrado perfecto.

Transponiendo el término independiente al segundo miembro, tenemos	$x^2 + 3x = -2$
Sumando $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ a los dos miembros de la igualdad, para completar el trinomio	$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2$
Completando el trinomio cuadrado	$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - 2$ $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
Obteniendo raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad	$\sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$
Se obtienen las expresiones	$x + \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{2} \quad x = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

Despejando a la variable se tiene	$x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2}$ $x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{2}$
Se obtienen las dos soluciones de la ecuación	Primera solución: $x = -1$ Segunda solución: $x = -2$



Resuelve la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ completando el trinomio cuadrado perfecto.

Resultado:

Primera solución: $x = 3$

Segunda solución: $x = -2$

Ejemplo:

Resuelve la ecuación $2x^2 - 4x - 6 = 0$, completando el trinomio cuadrado perfecto.

Dividiendo a la ecuación por el coeficiente de x^2	$\frac{2x^2}{2} - \frac{4x}{2} - \frac{6}{2} = \frac{0}{2}$
Se obtiene una ecuación en la forma	$x^2 - 2x - 3 = 0$
Transponiendo el término independiente al segundo miembro tenemos	$x^2 - 2x = 3$
Sumando $\left(\frac{2}{2}\right)^2$ a los dos miembros de la igualdad	$x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3$
Completando el trinomio cuadrado	$x^2 - 2x + (1)^2 = (1)^2 + 3$ $(x - 1)^2 = 1 + 3$ $(x - 1)^2 = 4$
Obteniendo raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad	$\sqrt{(x - 1)^2} = \pm\sqrt{4}$
Se obtiene la expresión	$x - 1 = \pm 2$
Despejando a la variable x se tiene	$x = 1 \pm 2$
Se obtienen las dos soluciones de la ecuación	Primera solución: $x = 3$ Segunda solución: $x = -1$



Resuelve la ecuación $2x^2 + 2x - 12 = 0$ completando el trinomio cuadrado perfecto.

Resultado:

Primera solución: $x = 2$

Segunda solución: $x = -3$

2.3. Método de fórmula general

Partiendo de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la deducción de la fórmula general se obtiene con el siguiente procedimiento, completando un trinomio cuadrado perfecto

Dividiendo la ecuación entre a para que el coeficiente de x^2 sea 1 tenemos	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
Transponiendo el término independiente	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
Completando el cuadrado para $x^2 + \frac{b}{a}x$, sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x en ambos miembros de la igualdad	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$
Se puede entonces escribir como	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
Si $b^2 - 4ac \geq 0$, entonces	$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
Despejando a x	$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
La expresión $\pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ se puede ver como	$\frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Por lo que	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

La expresión $b^2 - 4ac$, que está dentro del radical, se denomina **discriminante** de la ecuación cuadrática y de acuerdo a su valor es posible determinar la naturaleza de sus raíces, esto es:

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales diferentes.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene raíces imaginarias.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos raíces reales e iguales.

Ejemplo:

Resuelve la siguiente ecuación por fórmula general.

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Identificando los coeficientes	$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$
Sustituyendo en la fórmula general	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$
Realizando operaciones	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$ $x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} \quad x = \frac{-3 \pm 1}{2}$
Despejando la variable x	$x_1 = \frac{-3 + 1}{2}$ $x_2 = \frac{-3 - 1}{2}$
Por lo que las soluciones son	Primera solución: $x = -1$ Segunda solución: $x = -2$



Ejercicio
Módulo 3

Resuelve la siguiente ecuación por fórmula general.

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Resultado:

$$x = -1$$

$$x = 5$$

Ejemplo:

Resuelve la siguiente ecuación por fórmula general $4x^2 - 7x - 2 = 0$.

Identificando los coeficientes	$\begin{cases} a = 4 \\ b = -7 \\ c = -2 \end{cases}$
Sustituyendo en la fórmula general	$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(4)(-2)}}{2(4)}$
Realizando operaciones	$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{8}$ $x = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{8}$ $x = \frac{7 \pm 9}{8}$
Despejando la variable x	Primera solución: $x = \frac{7+9}{8}$ Segunda solución: $x = \frac{7-9}{8}$
Por lo que las soluciones son	Primera solución: $x = 2$ Segunda solución: $x = -\frac{1}{4}$

Resuelve la ecuación por fórmula general $(x + 8)^2 = -x^2 - 5x + 9$.



Resultado:

$$x = -5$$

$$x = -\frac{11}{2}$$

3. Representación gráfica de una ecuación cuadrática

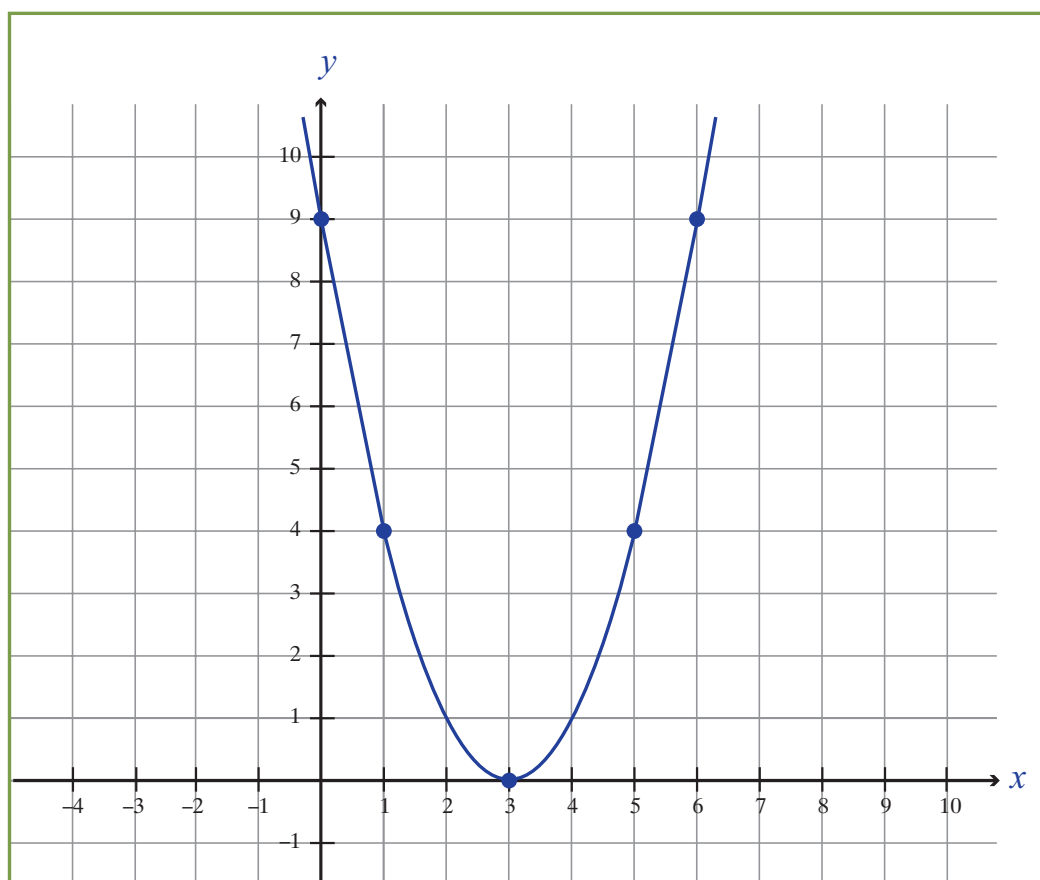
Toda ecuación de segundo grado en una variable representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje y .
Las soluciones de la ecuación cuadrática representan gráficamente los puntos donde la parábola corta al eje x .

Ejemplo:

Representa gráficamente las ecuaciones dadas e indica el valor de sus raíces:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

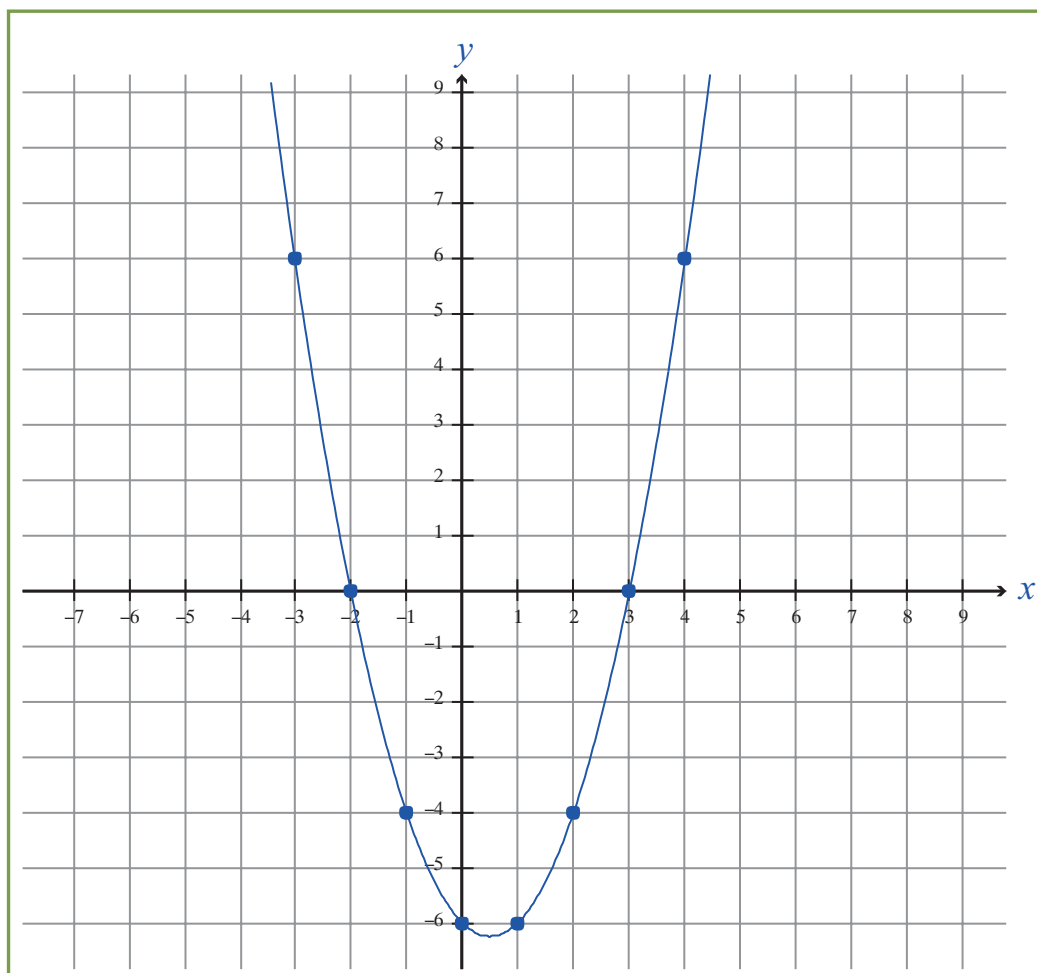
x	$y = x^2 - 6x + 9$
-1	16
0	9
1	4
2	1
3	0
4	1
5	4
6	9



En esta ecuación la parábola toca al eje x en el valor 3, lo cual significa que las soluciones de la ecuación cuadrática que la generaron son $x = 3$ (dos raíces reales e iguales).

a) $x^2 - x - 6 = 0$

x	$y = x^2 - x - 6$
-3	6
-2	0
-1	-4
0	-6
1	-6
2	-4
3	0
4	6

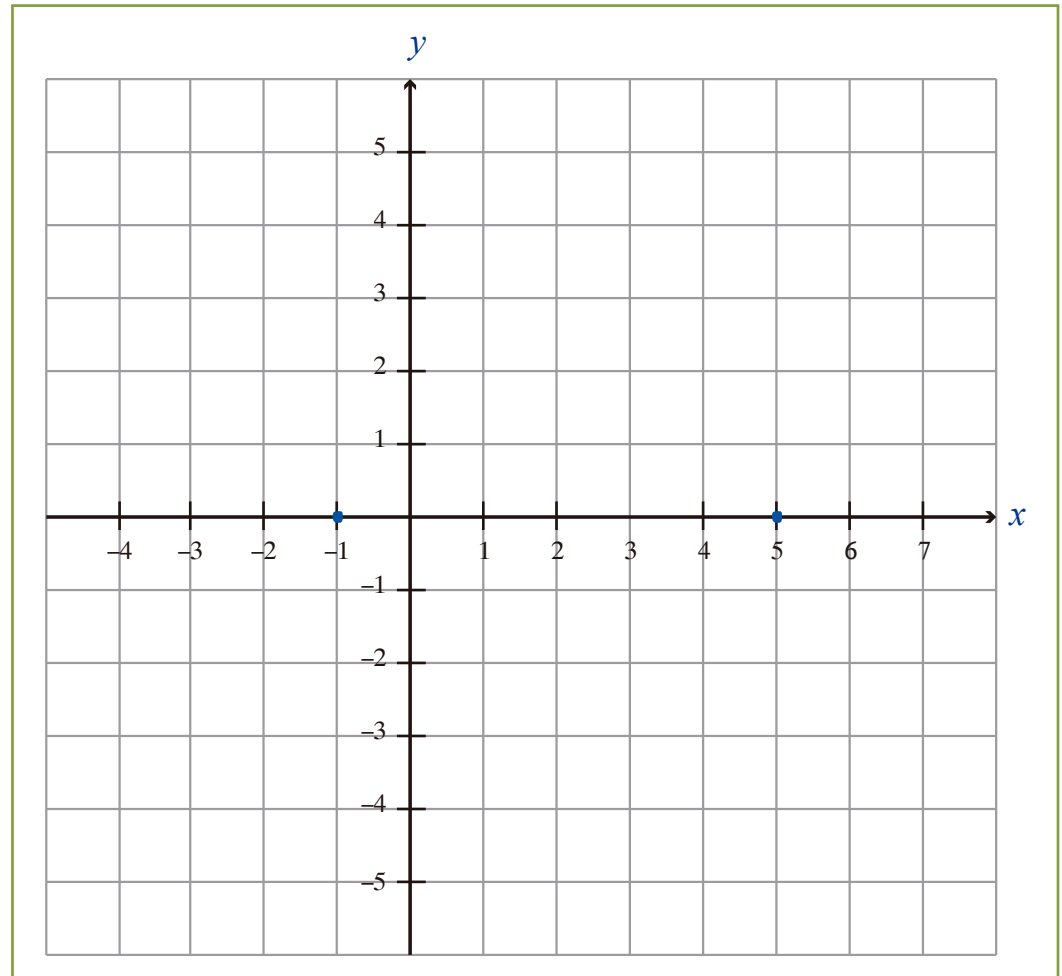


En este caso las raíces cortan al eje x en 3 y en -2 , lo cual significa que son las dos soluciones de la ecuación cuadrática (dos raíces reales diferentes).



Ejercicio
Módulo 3

Obtén el valor de las raíces de la ecuación $y = x^2 - 4x - 5$ por el método gráfico.



Resultado:

$$x = 5$$

$$x = -1$$



Basado en
competencias

4. Desigualdad cuadrática

Las propiedades de las desigualdades se abordaron en el módulo 2 de este libro de texto.

En la asignatura de Cálculo Diferencial estudiarás el tema de funciones, en el que se incluyen dos conceptos muy importantes: dominio y rango. Por ejemplo: $f(x) = \sqrt{3x-4}$ será la solución de la desigualdad $3x-4 \geq 0$. Después de ver este módulo, podrás resolver este tipo de desigualdades.

En las matemáticas una desigualdad señala que un número real es mayor o menor a otro. Dados los números reales a y b decimos que a es menor que b si, en la recta numérica, a queda a la izquierda de b .



La figura anterior se expresa $a < b$. el símbolo $<$ se lee “es menor que”. Otra forma de expresar este concepto es $b > a$. el símbolo $>$ se lee “es mayor que”.

Si los signos de dos desigualdades apuntan hacia la misma dirección se dice que son del mismo sentido. Si los signos apuntan en direcciones contrarias son de sentido opuesto.

Una desigualdad incluye dos expresiones algebraicas o numéricas relacionadas con alguno de los símbolos: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

4.1 Solución y representación gráfica de una desigualdad cuadrática

Ejemplo:

$$x^2 - x - 6 < 0$$

Para obtener las raíces de esta desigualdad, el primer miembro se iguala a cero y se obtienen las raíces:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Por medio de un proceso de factorización se tiene:

$$(x+2)(x-3) = 0$$

Igualando a cero cada factor y despejando a x se tienen las raíces:

$$x+2 = 0$$

$$x = -2$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Ahora debemos comprobar si las dos raíces son parte de la solución de la desigualdad. Para ello, sustituiremos en la desigualdad las raíces. Si la desigualdad se cumple, el valor que

sustituimos forma parte de la solución y por ende si la desigualdad no se cumple, el valor no formará parte de la solución.

$$x^2 - x - 6 < 0$$

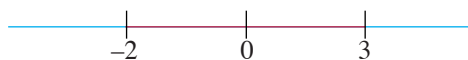
Para $x = -2$

$$\begin{aligned} (-2)^2 - (-2) - 6 &< 0 \\ 4 + 2 - 6 &< 0 \\ 0 &< 0 \end{aligned}$$

Para $x = -3$

$$\begin{aligned} (3)^2 - (3) - 6 &< 0 \\ 9 - 9 &< 0 \\ 0 &< 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los números -2 y 3 quedan excluidos de la solución, pero dividen la recta numérica en tres regiones.



Ahora hay que probar en cada una de ellas:

Para la región $x < -2$

Sea $x = -3$

Sustituimos en

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &< 0 \\ (-3)^2 - (-3) - 6 &< 0 \\ 9 + 3 - 6 &< 0 \\ 6 &< 0 \end{aligned}$$

Para la región $x < -2$ no hay solución.

Para la región $-2 < x < 3$

Sea $x = 0$

Sustituimos en

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &< 0 \\ (0)^2 - (0) - 6 &< 0 \\ 0 + 0 - 6 &< 0 \\ -6 &< 0 \end{aligned}$$

Para la región $-2 < x < 3$ los valores de x en el intervalo de -2 a 3 , sí son parte de la solución.

Para la región $x > 3$

Sea $x = 5$

Sustituimos en

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &< 0 \\ (5)^2 - (5) - 6 &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25 - 5 - 6 &< 0 \\ 14 &< 0 \end{aligned}$$

Para la región $x < 3$ no hay solución.

La solución está en $-2 < x < 3$.

Gráficamente se expresa así:



En algunas regiones no hay solución debido a que la desigualdad no se cumple. Por ejemplo, $6 < 0$ es falso; por lo tanto, no se cumple la desigualdad.

La comprobación se hace mentalmente asignando a la variable x , en la desigualdad inicial, cualquier valor mayor a -2 y menor a 3 .

Resuelve las siguientes desigualdades.

- a) $2x^2 - x > 1$
- b) $x^2 - 6x > 7$
- c) $3x^2 - 2x - 5 < 0$
- d) $5x^2 + 10 < 0$



5. Valor absoluto

Las propiedades del valor absoluto se abordaron en el módulo 2 de este libro de texto.

Ejemplo:

$$|x^2 - 15| = 2$$

La desigualdad se satisface si se cumple $x^2 - 15 = 2$ y $x^2 - 15 = -2$

$$\begin{aligned} x^2 - 15 &= 2 \\ x^2 &= 2 + 15 \\ x &= \pm\sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 15 &= -2 \\ x^2 &= -2 + 15 \\ x &= \pm\sqrt{13} \end{aligned}$$

Tomamos los signos positivos de las raíces porque al obtener el cuadrado de una raíz negativa su resultado es positivo.

Comprobación:

$$\begin{aligned} \text{Con } x &= \sqrt{17} \\ |x^2 - 15| &= |(\sqrt{17}^2) - 15| = |17 - 15| = |2| = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Con } x &= \sqrt{13} \\ |x^2 - 15| &= |(\sqrt{13}^2) - 15| = |13 - 15| = |-2| = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$2x^2 - x \leq -5x + 16$$

$$2x^2 - x + 5x \leq 16$$

$$2x^2 + 4x \leq 16 \quad \text{Dividimos entre 2}$$

$$x^2 + 2x \leq 8$$

Para que el primer miembro sea un cuadrado perfecto, sumamos a cada miembro el cuadrado de la mitad del coeficiente de x , que es 1:

$$x^2 + 2x + 1 \leq 8 + 1$$

$$(x + 1)^2 \leq 9$$

$$x + 1 \leq \sqrt{9}$$

$$|x + 1| \leq 3$$

Resolvemos esta última desigualdad aplicando las propiedades del valor absoluto.

La desigualdad $|x + 1| \leq 3$ es equivalente a las desigualdades:

$$x + 1 \leq 3 \quad \text{y} \quad x + 1 \geq -3$$

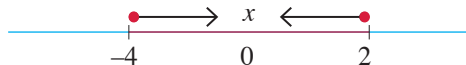
$$x + 1 \leq 3 \quad x \leq 3 - 1$$

$$x \leq 2 \quad x \geq -4$$

Los valores que satisfacen la desigualdad son: $x \leq 2$ o $x \geq -4$

Gráficamente:

$$-4 \leq x \leq 2$$



6. Problemas de aplicación

Ejemplos:

Resuelve las siguientes situaciones problema.

a) ¿Cuál es el número natural cuyo cuadrado más su triple es igual a 40?

Solución:

Si x es el número, el cuadrado más su triple es $x^2 + 3x$; por lo tanto, la expresión que representa el problema es:

$$x^2 + 3x = 40$$

Si igualamos a cero:

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

Factorizando la expresión (dos números cuyo producto es -40 y que al restarse dan 3 son 8 y 5):

$$(x + 8)(x - 5) = 0$$

Igualando a cero los factores y despejando la variable se obtiene:

$$(x + 8) = 0 \quad (x - 5) = 0$$

$$x = -8 \quad x = 5$$

Como -8 no es número natural, la solución es 5 .

b) Obtener la base y la altura de un rectángulo cuya superficie es de 14 m^2 y el perímetro es de 18 m .

Solución:

Si x es la longitud de la base, el perímetro es dos veces la altura más la base y vale 18 la altura, se puede representar como $9 - x$. Por lo tanto, la expresión que representa el problema es:

$$x(9 - x) = 14$$

Si se efectúan las operaciones se obtiene:

$$-x^2 + 9x = 14$$

Si igualamos a cero y multiplicamos toda la expresión por -1 :

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

Factorizando la expresión (dos números cuyo producto es 14 y que al sumarse dan -9 son -7 y -2):

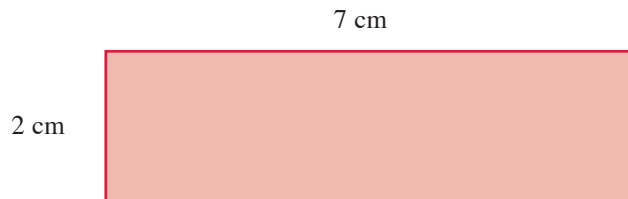
$$(x - 7)(x - 2) = 0$$

Igualando a cero los factores y despejando la variable se obtiene:

$$x - 7 = 0 \quad x - 2 = 0$$

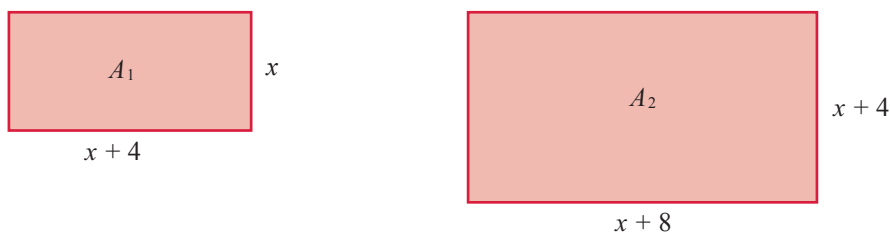
$$x = 7 \quad x = 2$$

Si la longitud de la base es 7 m la longitud de altura es $9 - x = 2 \text{ m}$. Y viceversa si la longitud de la base es 2 m la longitud de altura es $9 - 2 = 7 \text{ m}$. Que representa el mismo rectángulo.



c) La longitud de una sala excede a su ancho en 4 m . Si cada dimensión se aumenta en 4 m el área será doble. Obtén las dimensiones de la sala

Solución:



De las figuras se observa que:

$$A_1 = x(x + 4)$$

$$A_2 = (x + 8)(x + 4)$$

Como $A_2 = 2A_1$

Entonces:

$$(x + 8)(x + 4) = 2x(x + 4)$$

Desarrollando se tiene:

$$x^2 + 4x + 8x + 32 = 2x^2 + 8x$$

Agrupando, simplificando y ordenando:

$$x^2 - 4x - 32 = 0$$

Resolviendo la ecuación por factorización:

$$(x + 4)(x - 8) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad x = -4 \quad (\text{Se descarta por ser negativa})$$

$$x - 8 = 0 \quad x = 8$$

Por lo tanto, las dimensiones de la sala son: $x = 8\text{m}$ y $x + 4 = 12\text{m}$

- d) Ángel es dos años mayor que Benito y la suma de los cuadrados de sus edades es 130. Obtén ambas edades.

Solución:

Considerando que x representa la edad de Ángel, $x - 2$ es la edad de Benito.

De acuerdo al enunciado, se tiene:

$$x^2 + (x - 2)^2 = 130$$

Desarrollando simplificando y ordenando:

$$x^2 - 2x - 63 = 0$$

Por lo que factorizando se tiene:

$$(x - 9)(x + 7) = 0$$

De donde:

$$x - 9 = 0 \quad x = 9$$

$$x + 7 = 0 \quad x = -7 \quad (\text{Se descarta, dado que no hay edades negativas})$$

Por lo tanto: edad de Ángel es 9 años y edad de Benito es 7 años.



Ejercicios adicionales:

Resuelve las siguientes ecuaciones por factorización.

- a) $(x - 2)^2 + 2 = x$
- b) $2x^2 + 6x - 56 = 0$
- c) $4x^2 + 16x + 15 = 0$
- d) $13x^2 - 5x = 0$
- e) $5y^2 - 30y = 0$
- f) $16x^2 - 25 = 0$
- g) $120z^2 - 500z = 0$

Resuelve las siguientes ecuaciones por el método de completar el trinomio cuadrado.

- h) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
- i) $x(x + 25) = 5x + 21$
- j) $x^2 + 8x - 48 = 0$
- k) $x^2 - 6x + 8 = 0$

Resuelve las siguientes ecuaciones empleando la fórmula general.

- l) $x^2 + 11x + 24 = 0$
- m) $3x^2 - 4x - 1 = 0$
- n) $9w^2 + 6w + 1 = 0$
- o) $\frac{2x - 3}{3x + 2} = \frac{x - 3}{x + 1}$

Resuelve las siguientes ecuaciones empleando el método gráfico.

- p) $x^2 - 11x + 30 = 0$
- q) $3x^2 - 4x + 1 = 0$
- r) $x^2 + 6x + 9 = 0$

Resuelve las siguientes situaciones problema. Escribe la expresión que plantea el problema.

- s) ¿Cuál es el número negativo cuyo cuadrado más el doble de su consecutivo es 5?
- t) Hallar dos números impares consecutivos tales que su producto sea 143.
- u) Hallar dos números sabiendo que su suma es $\frac{11}{3}$ y su producto es 2.
- v) Hallar las longitudes de un rectángulo cuya superficie es de 154 m^2 . Si el largo supera al ancho en 15 m.

- w) Una empresa paga por salarios \$120 000 entre varios obreros que cobran el mismo sueldo. Si los obreros fuesen dos más, cada uno recibiría \$2 000 menos. ¿Cuál es el número de obreros?

Resultado:

- a) $x_1 = -1; x_2 = 6$
 b) $x_1 = 4; x_2 = -7$
 c) $x_1 = -\frac{3}{2}; x_2 = -\frac{5}{2}$
 d) $x_1 = 0; x_2 = \frac{5}{3}$
 e) $y_1 = 0; y_2 = 6$
 f) $x_1 = \frac{5}{4}; x_2 = -\frac{5}{4}$
 g) $z_1 = 5; z_2 = -5$
 h) $x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{3}$
 i) $x_1 = 1; x_2 = -21$
 j) $x_1 = 4; x_2 = -12$
 k) $x_1 = 2; x_2 = 4$
 l) $x_1 = -3; x_2 = -8$
 m) $x_1 = 1.54; x_2 = -0.64$
 n) $w_1 = w_2 = -\frac{1}{3}$
 o) $x_1 = 6.46; x_2 = -0.46$
 p) $x_1 = 5; x_2 = 6$
 q) $x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{3}$
 r) $x_1 = x_2 = -3$
 s) $(-x^2) + 2(x + 1) = 5; x = -3$
 t) $x(x + 1) = 143; x = 11 \vee x = 13$
 u) $x\left(\frac{11}{3} - x\right) = 2; x = \frac{2}{3} \vee x = 3$
 v) $x(x + 15) = 154; x = 22 \vee x = 7$
 w) $(x + 2)\left(\frac{120000}{x} - 2000\right) = 120000; x = 10$





Módulo 4

Funciones



Competencias genéricas y atributos¹

1. Se conoce y se valora así mismo, aborda problemas o retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
 - 1.1. Enfrenta las dificultades que se le presentan, es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.
 - 4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
 - 4.5. Maneja las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para poder obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
 - 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos, contribuye al alcance de un objetivo.

¹Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).

- 5.2. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- 5.6. Utiliza las TIC para procesar e interpretar información.
- 8. Participa y colabora de una manera efectiva en equipos diversos.
- 8.1. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- 8.2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.



Competencias disciplinares básicas y extendidas

- 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.

M4

Basado en
competencias



Introducción

Para algunas aplicaciones de la vida real y otras áreas de las matemáticas, así como en la física o economía, uno de los conceptos más importantes es el de función, en la medida de que se puede aplicar en numerosas situaciones de la vida cotidiana. Así, pueden utilizarse para determinar las relaciones que existen entre magnitudes o para calcular su valor en función de otras que son interdependientes.

Cabe señalar que, desde hace años, la ciencia permitió observar la relación compartida entre ciertos fenómenos. Por ejemplo, el volumen de un gas a temperatura constante está relacionado con la presión; la fuerza de atracción entre dos cuerpos depende de su masa y la distancia que les separa; el capital final de una inversión se emparenta con el capital invertido y el tiempo que dure esa inversión, etc.

Estas aplicaciones serán útiles para el docente y para el alumno en el momento de tratar las diferentes funciones.

1. Funciones

Para poder definir una función es necesario conocer los conceptos de relación, conjunto y producto cartesiano.

Relación

Una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Ejemplo:

Samuel es padre de Irma (Samuel, Irma).

Del ejemplo anterior, se puede decir matemáticamente

$$S \rightarrow I$$

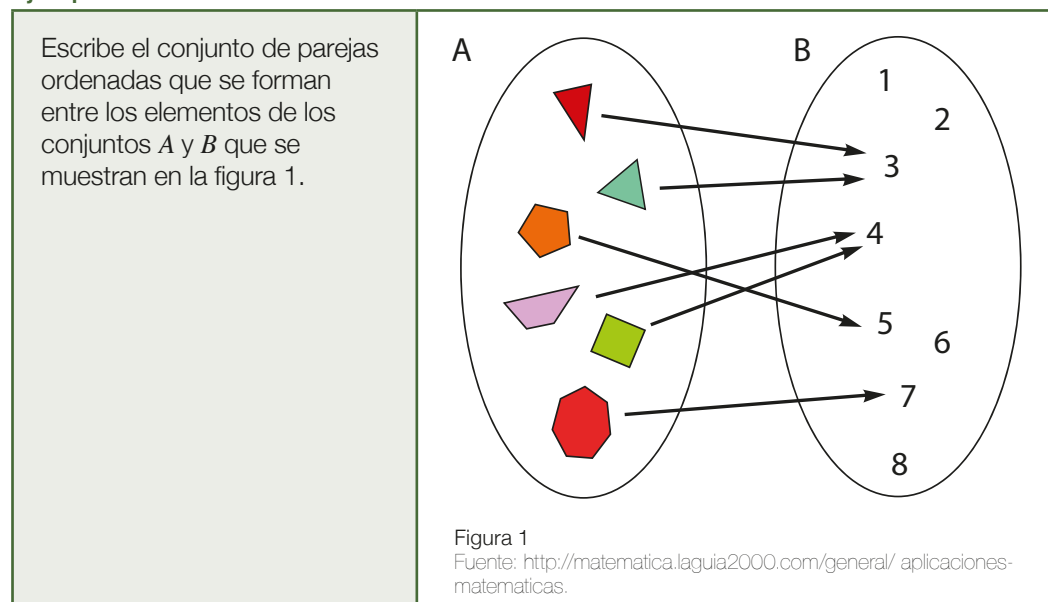
Por lo tanto, se define que una relación matemática, es la regla de correspondencia que hay entre todos o algunos elementos de un primer conjunto con uno o más elementos de un segundo conjunto.

También una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ (ver más adelante).

Ejemplos:

- El costo del alquiler diario de un coche está asociado con el número de kilómetros recorridos.
- La altura que alcanza una pelota de golf está asociada con la fuerza con la que fue golpeada.
- El nombre de un polígono está asociado con el número de sus lados.

Ejemplo:



Solución:

La relación R_1 se escribe como el conjunto de parejas ordenadas entre los elementos del conjunto A de figuras geométricas relacionadas con los elementos del conjunto B que indican el número de lados de cada figura, de la siguiente forma:

$$R_1 = \{(\text{triángulo isósceles}, 3), (\text{triángulo equilátero}, 3), (\text{cuadrilátero}, 4), (\text{cuadrado}, 4), (\text{pentágono}, 5), (\text{heptágono}, 7)\}.$$

Observa que algunos elementos del conjunto B no tienen figura correspondiente en el conjunto A , por lo que no se incluyen en la relación R_1 .



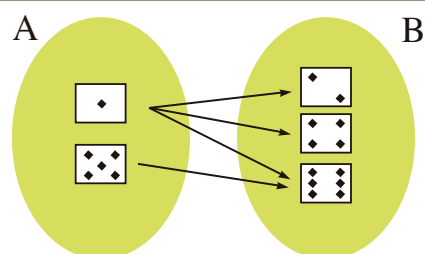
Ejercicio

Módulo 4

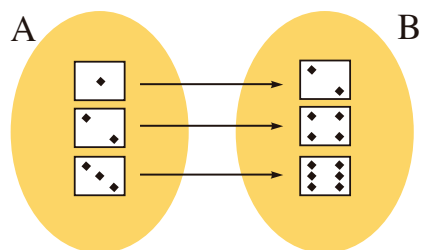
De la figura 2:

Escribe las parejas que cumplen con la relación R_2 $a < b$ entre los conjuntos A y B .

Escribe las parejas que cumplen con la relación R_3 b es el doble de a .



A menor que B
RELACIÓN



A mitad de B
FUNCIÓN

Figura 2

Fuente: <http://www.escolar.com/matem/02relac.htm>.

Ejemplo:

Para la siguiente relación R_4 , escribe ¿cuál es la correspondencia entre los elementos de los dos conjuntos? y ¿cuáles son los conjuntos que relaciona?

$$R_4 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36)\}$$

Solución:

Los conjuntos son:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$$

La relación R_4 corresponde a " b es el cuadrado de a ".



Ejercicio

Módulo 4

Dada la relación R_5 , escribe ¿cuál es la correspondencia entre los elementos de los dos conjuntos? y escribe los elementos de cada conjunto:

$$R_5 = \{(-2, -6), (-1, -3), (0, 0), (1, 3), (2, 6), (3, 9)\}$$

atemáticas, específicamente

1.1 Producto cartesiano

La noción de **producto cartesiano** se emplea en el ámbito de las matemáticas, específicamente en el campo del álgebra. El producto cartesiano revela una relación de orden entre dos conjuntos, constituyéndose como un tercer conjunto.

Dados dos conjuntos A y B , el **producto cartesiano** $A \times B$, que se lee “A cruz B”, se define como el conjunto de parejas ordenadas (a, b) tales que $a \in A$, $b \in B$ y que en notación de conjuntos se escribe como:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ejemplo:

Dados los siguientes conjuntos: $A = \{5, 14, 15, 20\}$; $B = \{5, 6, 8, 12, 15\}$ y $C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Obtén los productos cartesianos $A \times B$, $C \times B$

Solución:

Para el producto cartesiano $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ formamos las parejas con los primeros elementos de A y los segundos elementos de B .

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (5, 5), (5, 6), (5, 8), (5, 12), (5, 15), \\ & (14, 5), (14, 6), (14, 8), (14, 12), (14, 15), \\ & (15, 5), (15, 6), (15, 8), (15, 12), (15, 15), \\ & (20, 5), (20, 6), (20, 8), (20, 12), (20, 15) \} \end{aligned}$$

Para el producto cartesiano $C \times B = \{(c, b) \mid c \in C, b \in B\}$ formamos las parejas con los primeros elementos de C y los segundos elementos de B , donde $B = \{5, 6, 8, 10\}$.

$$\begin{aligned} \times B = \{ & (-2, 5), (-2, 6), (-2, 8), (-2, 10), \\ & (-1, 5), (-1, 6), (-1, 8), (-1, 10), \\ & (0, 5), (0, 6), (0, 8), (0, 10), \\ & (1, 5), (1, 6), (1, 8), (1, 10), \\ & (2, 5), (2, 6), (2, 8), (2, 10), \\ & (3, 5), (3, 6), (3, 8), (3, 10) \} \end{aligned}$$

2. Definición de función

En la actualidad, el concepto de **función** se define como: sean A y B conjuntos, se llama función entre A y B , a cualquier relación establecida entre los elementos de A y B , de tal modo que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B .

En una función, al conjunto A se le llama **dominio** y al conjunto B se le llama **rango** o **contradominio** y la función se simboliza:

$f: A \rightarrow B$ y se lee “función de A en B ”.

Sean A y B dos conjuntos, una función de A en B, es una regla que indica que cada elemento de A asocia un único elemento de B.

Para esto analicemos lo siguiente:

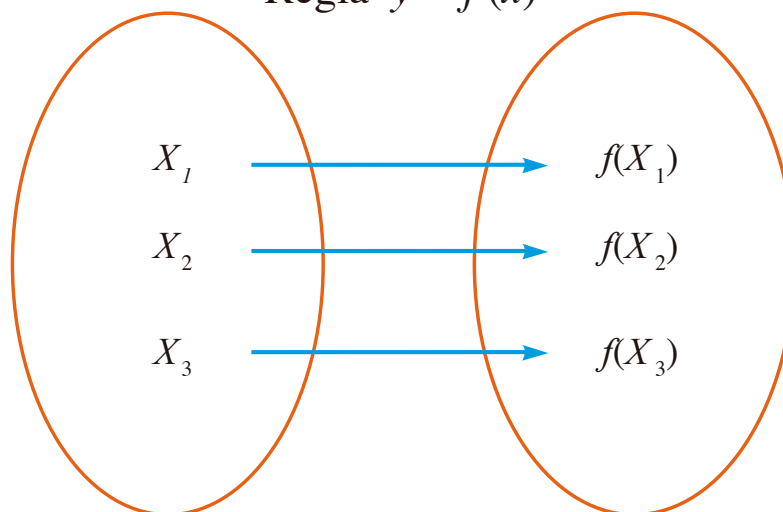
Cuando un símbolo puede tomar diferentes valores se le llama **variable**. Por ejemplo: e puede significar la edad de una persona, d la distancia recorrida por un atleta en entrenamiento, t el tiempo transcurrido en un evento, y la altura alcanzada por una pelota de béisbol, x la medida horizontal de una figura geométrica. Éstos pueden tomar diferentes valores, a los que se les llama *dominio* de la *variable*.

Ejemplo: del dominio de las variables anteriores:

$e = \{5, 14, 15, 20, 35\}$ años; $d = \{5, 8, 12, 15, 25\}$ km; $t = \{0, 2, 5, 10, 60, 120\}$ seg; $y = \{10, 30, 50, 85, \text{altura máxima}\}$ metros; $x = \{5, 8, 12, 25, 33\}$ cm.

Cada valor de la variable representa una **constante** = 0, 2, 5 o 10, es decir, su valor es fijo.

Regla $y = f(x)$



Dominio

Contradominio

2.1 Regla de correspondencia

Regla de correspondencia: es la expresión algebraica que representa la relación entre las variables independiente y dependiente.

Ejemplo:

En la siguiente tabla se muestra la regla de correspondencia de los enunciados indicados en la primer columna.

Enunciado	Regla de correspondencia
El doble de una cantidad x	$f(x) = 2x$
El volumen V de un cubo cuyo lado es x	$V(x) = x^3$
La velocidad v de un cuerpo en caída libre como función del tiempo t (g es la gravedad)	$v(t) = gt$
El volumen V de un cono en función de su radio r y su altura h	$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Escribe la regla de correspondencia de los enunciados indicados en la primer columna.

Enunciado	Regla de correspondencia	Expresión algebraica
El triple de una cantidad x incrementado en 2 unidades		
El volumen V de un cilindro en función del radio r y su altura h		



2.2 Funciones reales de variable real

Si los conjuntos A y B son subconjuntos de los números reales ($\mathbb{R}$), entonces se establecen funciones reales de variable real y se dice que son conjuntos de parejas ordenadas de números (x, y) , tales que para cualquiera de las dos parejas ordenadas distintas no tienen el mismo primer número x .

En notación de conjuntos se escribe así:

$$F = \{(x, y) \mid y = f(x) \text{ con } x \in \text{Dominio}(f) \text{ y } y \in \text{Rango}(f)\}$$

Ejemplos de funciones de uso frecuente:

$F_1 = \{(x, y) \mid y = 2, x \in \mathbb{R}\}$	Función constante
$F_2 = \{(x, y) \mid y = x, x \in \mathbb{R}\}$	Función idéntica o identidad
$F_3 = \{(x, y) \mid y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$	Función cuadrada o cuadrática
$F_4 = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x}, x \neq 0\}$	Función recíproca

2.3 Notación de función

Si en una función al dominio se le llama conjunto A y al contradominio se le llama conjunto B , entonces la función se simboliza: $f: A \rightarrow B$ y se lee función de A en B .

Un elemento cualquiera del dominio se representa con la letra x (variable independiente). Un elemento cualquiera del contradominio se representa con la letra y (variable dependiente o función). El elemento y de B correspondiente a un elemento x de A recibe el nombre de imagen de éste.

El elemento y de B que es imagen de un elemento x de A se simboliza como: $y = f(x)$, que se lee “ y es imagen de x según la función f ”, o simplemente “ y igual a f de x ”. Dado que $y = f(x)$, el par ordenado (x, y) se puede expresar de la siguiente forma: $(x, y) = (x, f(x))$.

3. Clasificación de funciones

Las funciones reales de variable real se pueden clasificar, según la forma de su regla de correspondencia en dos grandes grupos:

- Algebraicas
- Trascendentes

3.1. Funciones algebraicas

A este tipo de funciones corresponden las ecuaciones polinómicas y en ellas se pueden efectuar operaciones en las que interviene la variable independiente, como la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la potenciación y la radicación.

Ejemplo:

$$y = x + 5; \quad y = x - 3; \quad y = 6x - 1 \quad y = \frac{x-3}{2x}; \quad y = \frac{(x-2)^2}{2x}; \quad y = \sqrt{16-x^2}$$

Podemos decir que dentro de las funciones algebraicas se encuentran:

- **Funciones constantes:** definidas por una constante, no interviene la variable independiente

$$y = f(x) = k$$

$$y = 4$$

- **Funciones lineales:** son funciones polinómicas de primer grado, la representación de este tipo de funciones es una recta.

$$y = mx + b$$

$$y = 8x + 5$$

- **Funciones cuadráticas:** son funciones polinómicas de segundo grado. Su representación es una parábola.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = x^2 + 4x + 3$$

- **Funciones racionales:** son aquellas que se expresan mediante el cociente de polinomios.

$$y = \frac{x+3}{2x-1}$$

- **Funciones radicales o irracionales:** vienen dadas por la raíz de una expresión polinómica.

$$y = \sqrt{x - 5}$$

3.2. Funciones trascendentes

Cuando la variable independiente x forma parte del exponente o de la base de un logaritmo, o simplemente se ve afectada por una función –como puede ser en la trigonometría–, entonces hablamos de funciones **trascendentes**.

Por ejemplo:

$$y = \operatorname{sen} x; y = \cos 2x; y = \tan x; y = \log x; y = \ln x; y = 2^x; y = e^x.$$

Nota: algunas de ellas se observan en las teclas de una calculadora científica.

Son funciones de este tipo:

- **Función exponencial:** como su nombre indica, es una función en la que la variable independiente se encuentra en el exponente y cuya base es un número real. Por tanto, recibe el nombre de función exponencial de base a y exponente x .

$$y = a^x$$

$$y = 2^x$$

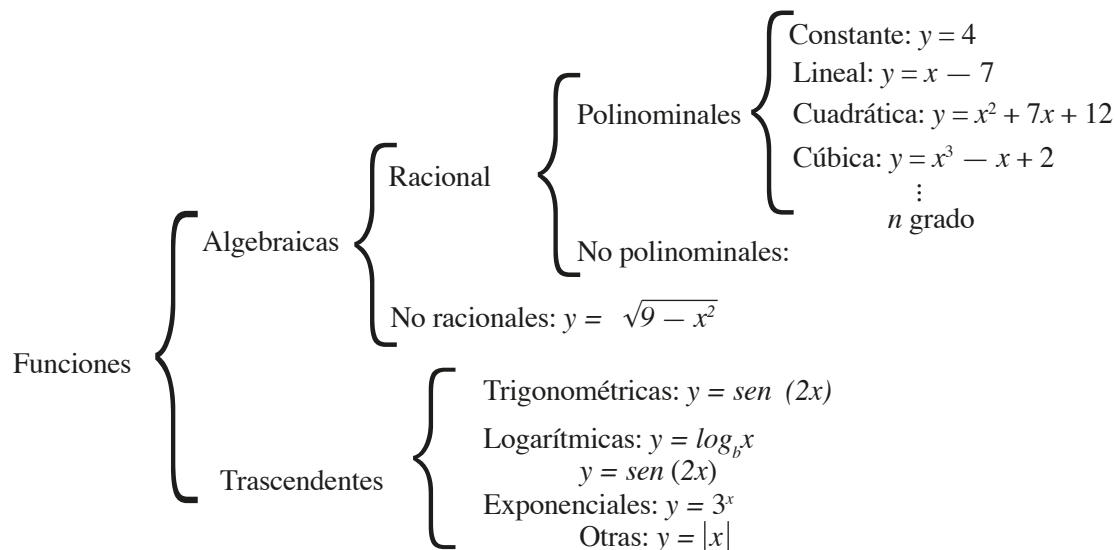
- **Función logarítmica:** la inversa de la función exponencial recibe el nombre de función logarítmica. Por tanto, devuelve el número al que tendríamos que elevar la base b para obtener nuestra variable independiente. En este caso la variable independiente nos da el valor de la función exponencial.

$$y = \log_b x$$

$$y = \log_{10} x$$

- **Funciones trigonométricas:** se obtienen cuando ampliamos el concepto de razones trigonométricas a los números reales. Por lo que hay el mismo número de funciones trigonométricas que de razones trigonométricas: $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$.

En la siguiente imagen se muestra la clasificación anterior con un ejemplo:



Las funciones también pueden clasificarse como **explícitas o implícitas**.

Funciones **explícitas**: son aquellas en donde su regla de correspondencia una de las variables está despejada en función de la otra; es decir, tiene la forma $y = f(x)$

Ejemplo:

$$y = \sqrt{25 - x^2}; y = \frac{-2x - 5}{3}; y = \frac{1}{x}, \text{ etc.}$$

Funciones **implícitas**: son aquellas en donde su regla de correspondencia ninguna de las variables está despejada en función de la otra; es decir, tiene la forma $f(x, y) = 0$.

Ejemplo:

$$x^2 + y^2 = 25; 2x + 3y + 6 = 0; xy = 2, \text{ etc.}$$

Ejemplo:

$$\text{Clasifica la función } F_1 = \{(x, y) \mid y = x^2 - x + 3\}$$

Solución:

La función es algebraica, racional, polinomial, cuadrática y explícita.

Clasifica las siguientes funciones según la forma de su regla de correspondencia.

$$1) f(x) = x^3 + 2x + 1$$

$$2) f(x) = 9 \sin x$$

$$3) f(x) = (x^3 - 7x^2 + 2)^2$$

$$4) f(x) = a^{2x-6}$$

$$5) f(x) = \tan^2(4x)$$

$$6) f(x) = x$$

$$7) f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + x}$$

$$8) f(x) = 9x^{-6}$$

$$9) f(x) = x^x$$

$$10) f(x) = 9x^{\frac{2}{3}}$$



Ejercicio
Módulo 4

4. Dominio y rango de una función

El **dominio** es el conjunto de valores que se le pueden asignar a la variable independiente de una función.

Por ejemplo: la función $f(x) = \frac{1}{x}$ queda definida en el campo de todos los números reales excepto $x = 0$.

El **rango** es el conjunto de números reales que puede asumir la función $f(x)$ conforme la variable independiente x toma valores en todo su dominio. Se le conoce también como la imagen de x bajo f .

Por ejemplo, en la función $f(x) = \frac{1}{x}$, si se despeja x la expresión que resulta es $x = \frac{1}{f(x)}$ y se observa que el rango también acepta todos los valores reales, pero $f(x)$ tiene que ser diferente de cero. En general, para definir una función racional debe evitarse que el denominador de su expresión algebraica valga cero y que una raíz par contenga un valor menor de cero.

Ejemplo:

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Obtén el dominio y el rango de $f(x) = 1 - x$.

Solución:

Dominio: al analizar la expresión algebraica se concluye que x puede tomar todos los valores de la recta numérica sin ninguna restricción, por tanto su dominio se escribe como $-\infty < x < \infty$.

Rango: si se despeja x , la expresión va a ser: $x = 1 - f(x)$, la cual indica que $f(x)$ también puede asumir cualquier valor $-\infty < f(x) < \infty$.

2. Obtén el dominio y el rango de la función $f(x) = \sqrt{1 - x}$.

Dominio: la raíz cuadrada permite saber que x tiene que ser menor o igual a uno ($x \leq 1$).

Rango: por definición de función y los valores que toma x , el rango $f(x)$ es mayor o igual a cero.

3. Obtén el dominio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Dominio: para que la función quede definida y la expresión dentro de la raíz no se haga negativa, observa que la variable independiente debe quedar en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$.

Dadas las funciones mostradas en la tabla siguiente, obtén el dominio y el rango de cada una de ellas:

Función	Dominio	Rango
$f(x) = 2x - x^2$		

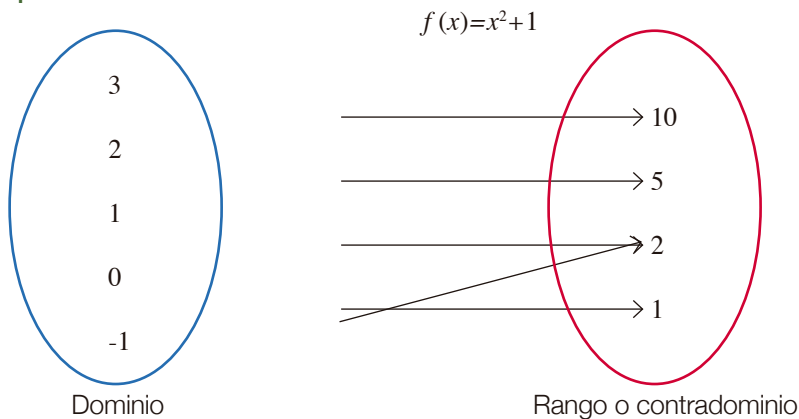
$f(x) = \sqrt{x-1}$		
$s(t) = \frac{1}{t-1}$		
$f(x) = \frac{3-x^2}{2}$		
El área A de un cuadrado de lado x		

4.1 Regla de correspondencia, dominio y rango

Dominio: es el conjunto de objetos a los que la función asigna valores.

Rango: es el conjunto de valores obtenidos de la función.

Ejemplo:



Notación de función: es el que se denomina con la letra $f(x)$, que se lee “ f de x ”; designa el valor que “ f asigna a x ”. Por lo tanto, si $f(x) = x^2 + 4$ donde $x = 2$, $x = -5$ y $x = a + h$

$$f(2) = (2)^2 + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$f(-5) = (-5)^2 + 4 = 25 + 4 = 29$$

$$f(a + h) = (a + h)^2 + 4 = a^2 + 2ah + h^2 + 4$$

5. Representación gráfica de una función

La **gráfica de una función** es la representación en el plano cartesiano del conjunto de los puntos (x, y) que constituyen la función como conjunto de parejas ordenadas, donde el conjunto de las x representa el dominio de la función y el conjunto de las y representa el rango de la función. La expresión $y = f(x)$ se llama **regla de correspondencia**.

Ejemplo:

Construye la gráfica de la función siguiente.

$$F_1 = \{(x, y) \mid y = 2x - 3, x \in [-2, 3]\}$$

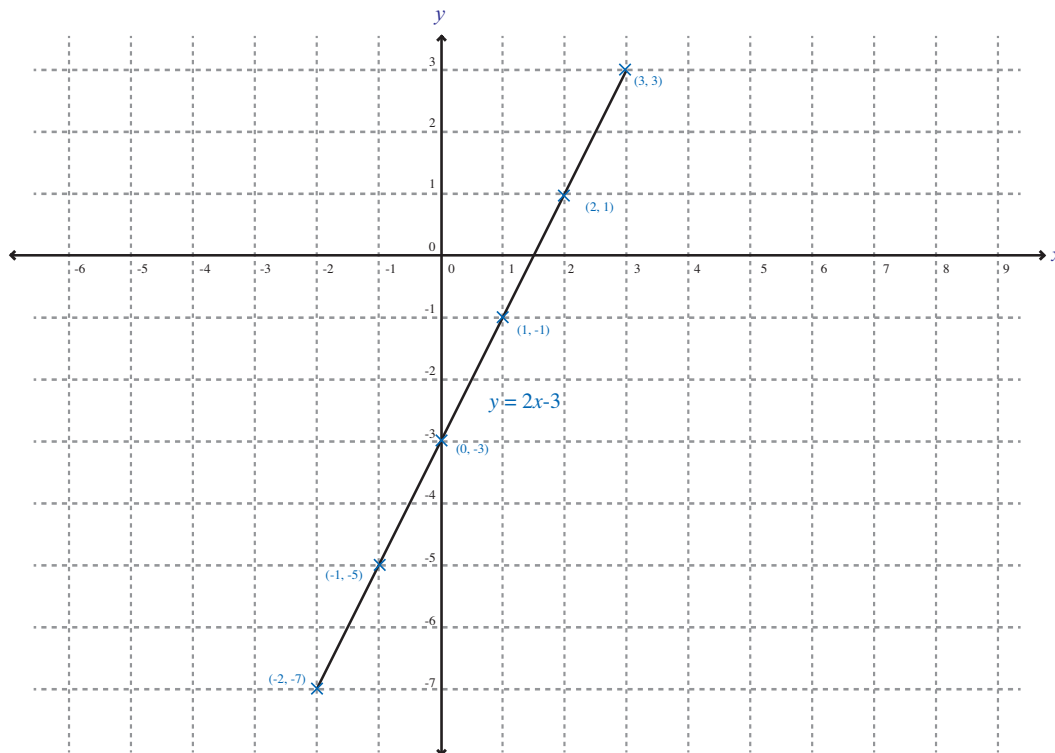
Solución:

Para obtener algunas de las parejas ordenadas que constituyen la función, se asignan los valores enteros en el dominio de la función en la regla de correspondencia, registrándolos en una tabla para facilitar el procedimiento. A este procedimiento se le conoce como **tabulación**.

x	$y = 2(x) - 3$	(x, y)
-2	$2(-2) - 3 = -4 - 3 = -7$	$(-2, -7)$
-1	$2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$	$(-1, -5)$
0	$2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$	$(1, -1)$
2	$2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$	$(2, 1)$
3	$2(3) - 3 = 6 - 3 = 3$	$(3, 3)$

Estos puntos se colocan en el plano cartesiano marcando con una x su lugar, de acuerdo con las coordenadas (x, y) . En seguida se unen estos puntos con una línea continua, debido a que los valores del dominio son todos los números reales entre -2 y 3.

Gráfica de la función $F_1 = \{(x, y) \mid y = 2x - 3, x \in [-2, 3]\}$





Ejercicio
Módulo 4

Construye la gráfica de la función:

$$G = \{(x, y) \mid y = 2x + 1, x \in [-3, 3]\}$$



Basado en
competencias

Ejemplo:

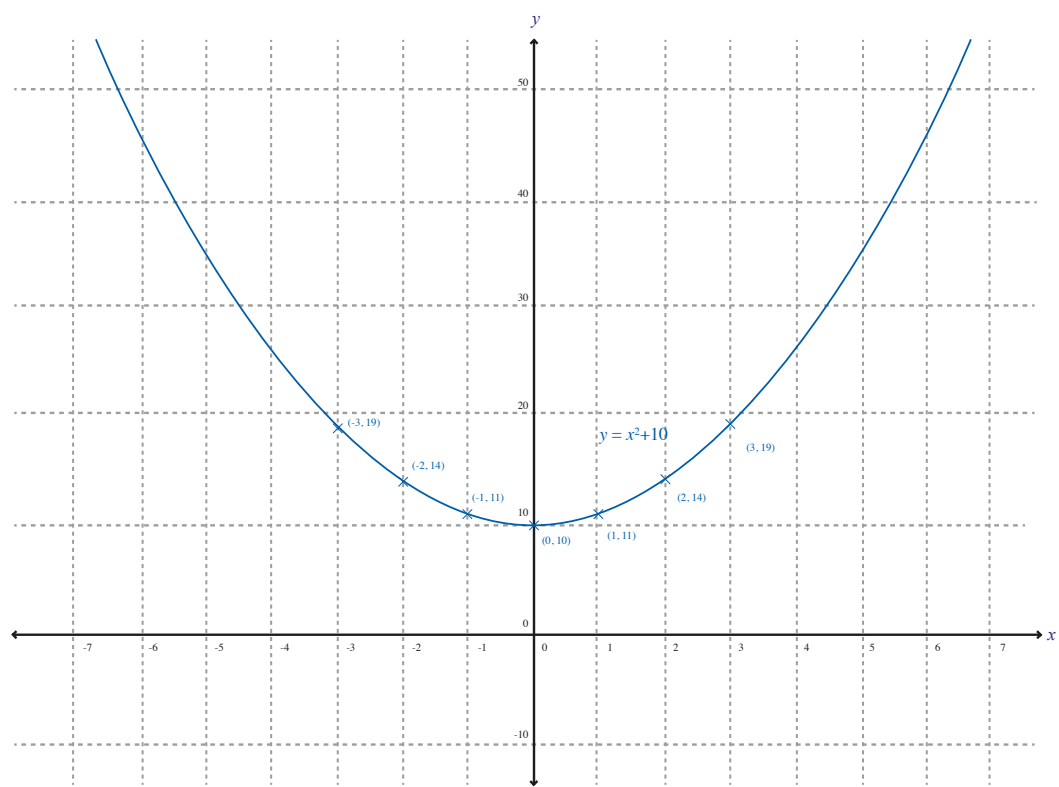
¿Cómo es la forma de la función $f(x) = x^2 + 10$? Grafícala e indica su dominio y rango.

Solución:

Procedemos a valorar la función asignando diferentes valores a la variable independiente x , digamos los enteros de -3 a 3 .

x	$y = (x)^2 + 10$	(x, y)
-3	$(-3)^2 + 10 = 9 + 10 = 19$	$(-3, 19)$
-2	$(-2)^2 + 10 = 4 + 10 = 14$	$(-2, 14)$
-1	$(-1)^2 + 10 = 1 + 10 = 11$	$(-1, 11)$
0	$(0)^2 + 10 = 0 + 10 = 10$	$(0, 10)$
1	$(1)^2 + 10 = 1 + 10 = 11$	$(1, 11)$
2	$(2)^2 + 10 = 4 + 10 = 14$	$(2, 14)$
3	$(3)^2 + 10 = 9 + 10 = 19$	$(3, 19)$

Estos puntos se marcan en el plano cartesiano, y se unen con una línea continua.



La función tiene forma de curva abierta, llamada parábola. Se extiende indefinidamente de tal manera que su dominio es $x \in (-\infty, +\infty)$ y su rango $y \in [10, +\infty)$.

¿Cómo es la forma de la función $f(x) = x^2 - 15$? Gráficala e indica su dominio y rango.



Ejemplo:

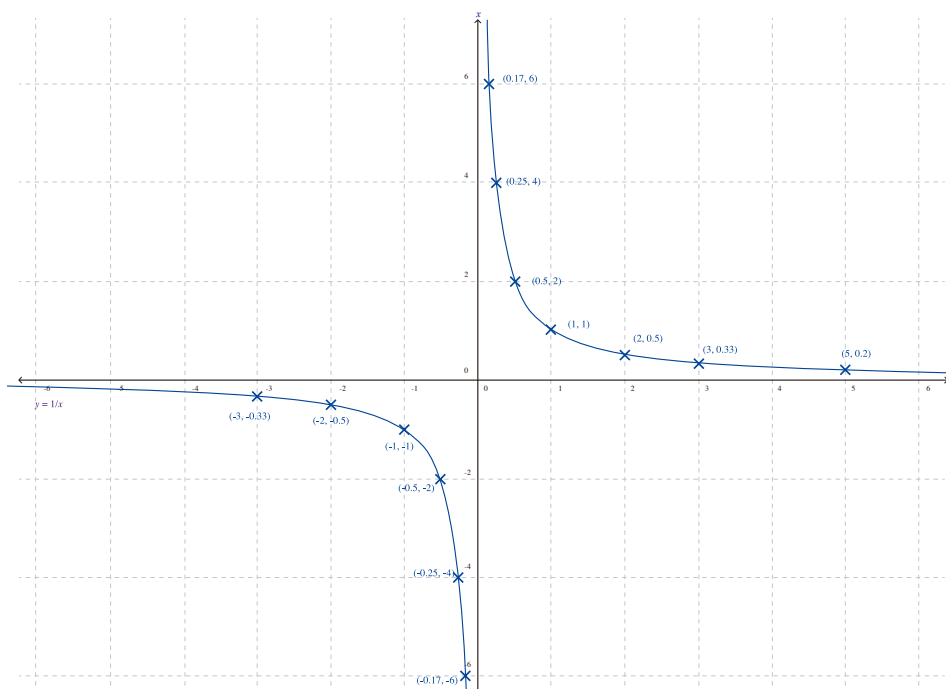
¿Cómo es la forma de la función $R = \{(x, y) | y = \frac{1}{x}, x \neq 0\}$? Grafícala e indica su dominio y rango.

Solución:

Para construir la gráfica asignaremos varios valores a la función tabulando:

x	$y = \frac{1}{x}$	(x, y)
-3	$y = \frac{1}{-3} = -0.33$	$(-3, -0.33)$
-2	$y = \frac{1}{-2} = -0.5$	$(-2, -0.5)$
-1	$y = \frac{1}{-1} = -1.0$	$(-1, -1)$
-0.5	$y = \frac{1}{-0.5} = -2.0$	$(-0.5, -2)$
0	$y = \frac{1}{0} = \text{No existe}$	<i>No hay punto</i>
1	$y = \frac{1}{1} = 1.0$	$(1, 1)$
2	$y = \frac{1}{2} = 0.5$	$(2, 0.5)$
3	$y = \frac{1}{3} = 0.33$	$(3, 0.33)$
5	$y = \frac{1}{5} = 0.20$	$(5, 0.20)$

La gráfica se separa, no es continua.

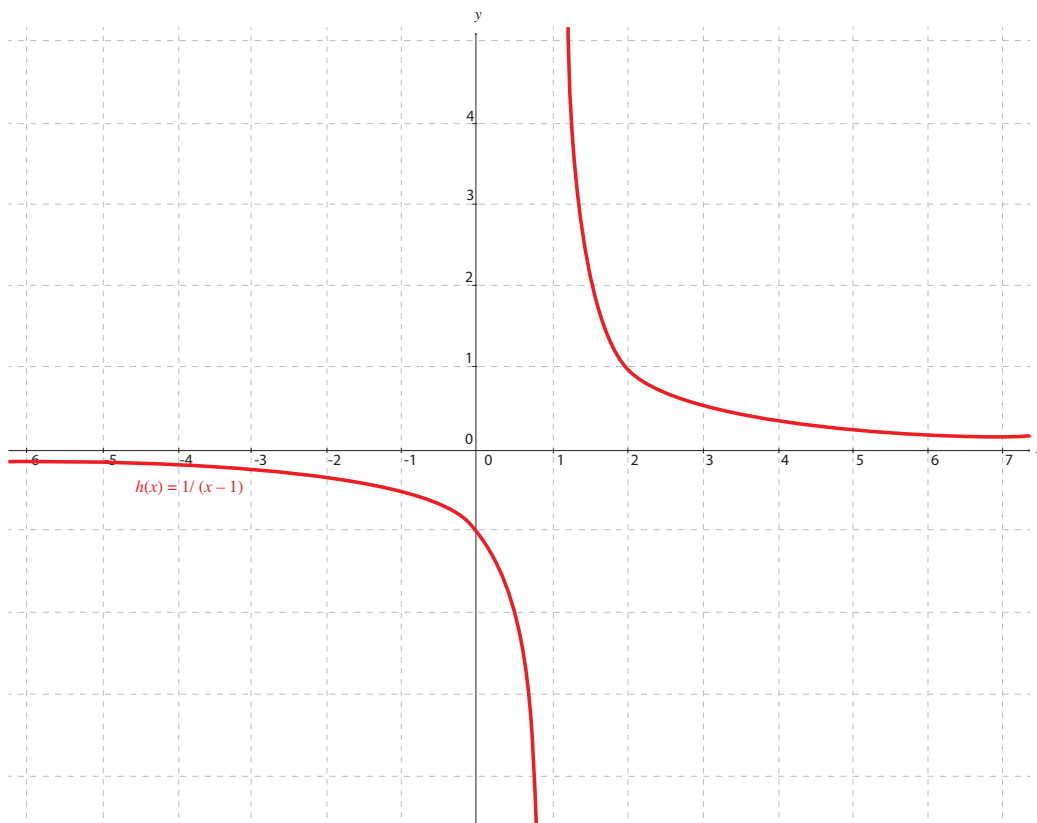


Su dominio es: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y su rango: $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

¿Cómo es la forma de la función $R = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x-1}, x \neq 1\}$? Graficala e indica su dominio y rango.



Gráfica $y = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$



Dominio: $x \neq 1$ y Rango: $y \neq 0$.

Ejemplo:

Resuelve el siguiente problema.

En un examen, Enrique no supo contestar cuál era la forma de la gráfica que correspondía con la ecuación $x^2 + y^2 = 49$. ¿Puedes ayudarlo?

Solución:

Para construir la gráfica es conveniente primero despejar la variable y de la ecuación en la siguiente forma:

$$x^2 + y^2 = 49$$

Restando x^2 en ambos miembros:

$$\begin{aligned} x^2 - x^2 + y^2 &= 49 - x^2 \\ y^2 &= 49 - x^2 \end{aligned}$$

Obteniendo la raíz cuadrada en ambos miembros:

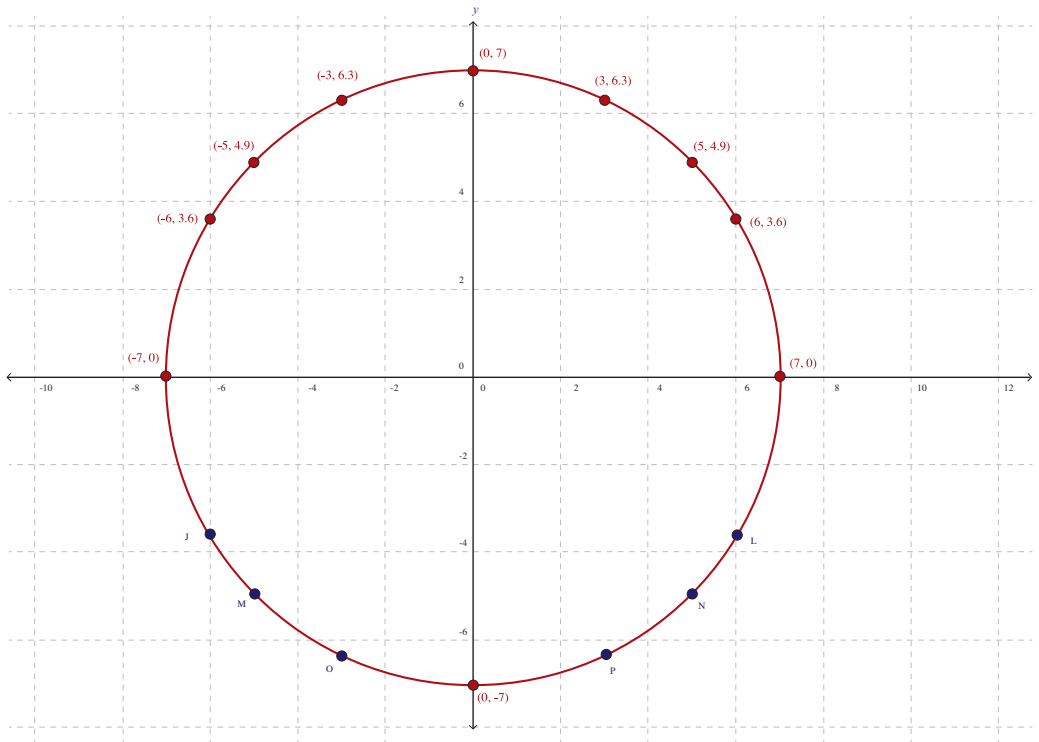
$$\begin{aligned} \sqrt{y^2} &= \sqrt{49 - x^2} \\ y &= \sqrt{49 - x^2} \end{aligned}$$

Tabulando para algunos valores de x :

En este caso se toma en cuenta la raíz cuadrada negativa y positiva de la tabulación.

x	$y = \pm \sqrt{49 - x^2}$	(x, y)
-7	$y = \pm \sqrt{49 - (-7)^2} = \sqrt{49 - 49} = 0$	$(-7, 0)$
-6	$y = \pm \sqrt{49 - (-6)^2} = \sqrt{49 - 36} = \pm 3.6$	$(-6, \mp 3.6)$
-5	$y = \pm \sqrt{49 - (-5)^2} = \sqrt{49 - 25} = \pm 4.9$	$(-5, \mp 4.9)$
-3	$y = \pm \sqrt{49 - (-3)^2} = \sqrt{49 - 9} = \pm 6.3$	$(-3, \mp 6.3)$
-1	$y = \pm \sqrt{49 - (-1)^2} = \sqrt{49 - 1} = \pm 6.9$	$(-1, \mp 6.9)$
0	$y = \pm \sqrt{49 - (0)^2} = \sqrt{49 - 0} = \pm 7.0$	$(0, \mp 7)$
1	$y = \pm \sqrt{49 - (1)^2} = \sqrt{49 - 1} = \pm 6.9$	$(1, \mp 6.9)$
3	$y = \pm \sqrt{49 - (3)^2} = \sqrt{49 - 9} = \pm 6.3$	$(3, \mp 6.3)$
5	$y = \pm \sqrt{49 - (5)^2} = \sqrt{49 - 25} = \pm 4.9$	$(5, \mp 4.9)$
6	$y = \pm \sqrt{49 - (6)^2} = \sqrt{49 - 36} = \pm 3.6$	$(6, \mp 3.6)$
7	$y = \pm \sqrt{49 - (7)^2} = \sqrt{49 - 49} = 0$	$(7, 0)$

La gráfica resulta una relación, no una función, dado que existen pares ordenados que tienen el mismo primer elemento x .



Su dominio es: $x \in [-7, 7]$, y el rango: $y \in [-7, 7]$.

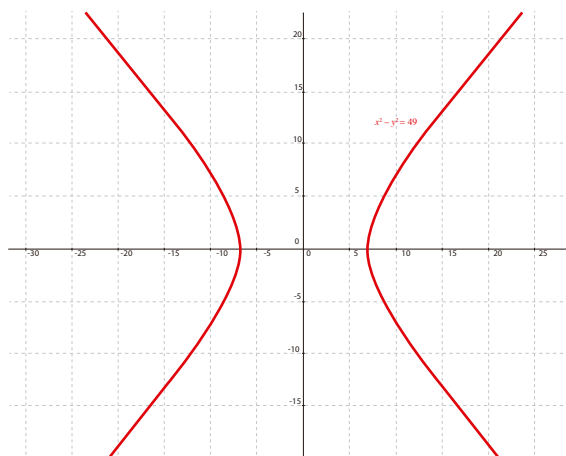
Resuelve el siguiente ejercicio.

¿Cuál es la forma de la gráfica que corresponde a la ecuación $x^2 + y^2 = 49$?



La forma de esta relación no es una función, ya que $x^2 + y^2 = 49$ es la ecuación que representa a una hipérbola.

Gráfica de $x^2 + y^2 = 49$



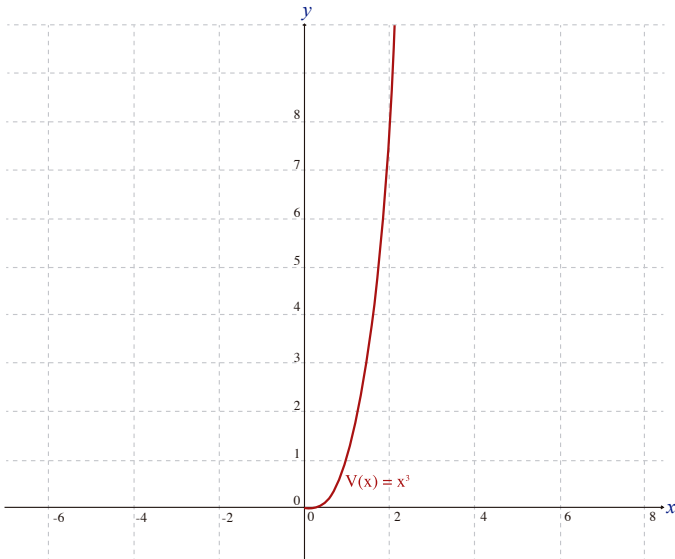
Dominio: $x \in (-\infty, -7] \cup [7, \infty)$, y Rango: $y \in \mathbb{R}$.



Formas de representar una función

Existen cuatro formas para describir o definir una función: verbal, algebraica, numérica y gráfica.

Ejemplo, si se representa la función del volumen de un cubo de lado x , tenemos:

Verbal	El volumen de un cubo de lado x										
Algebraica	$V(x) = x^3$										
Numérica	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td></tr><tr><td>$V(x)$</td><td>0</td><td>1</td><td>3.375</td><td>8</td></tr></table>	x	0	1	1.5	2	$V(x)$	0	1	3.375	8
x	0	1	1.5	2							
$V(x)$	0	1	3.375	8							
Gráfica											

Ejercicios adicionales

Grafica las siguientes funciones y obtén su dominio y rango:



1. $K = \{(x, y) \mid y = 4, x \in [-5, 5]\}$
2. $L = \{(x, y) \mid y = -3, x \in [-6, 6]\}$
3. $T = \{(x, y) \mid y = 4x, x \in [0, 10]\}$
4. $W = \{(x, y) \mid y = -4x, x \in [0, 10]\}$
5. $K = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{2}x, x \in [-6, 10]\}$
6. $Q = \{(x, y) \mid y = -\frac{1}{3}x, x \in [-6, 10]\}$
7. $F = \{(x, y) \mid y = x + 12, x \in [-3, 3]\}$
8. $G = \{(x, y) \mid y = \frac{x}{2} + 8, x \in [-2, 3]\}$
9. $H = \{(x, y) \mid y = \frac{x}{3} + 6, x \in [-2, 3]\}$
10. $I = \{(x, y) \mid y = 2x - 5, x \in [-4, 4]\}$
11. $J = \{(x, y) \mid y = 2(x + 1), x \in [-4, 4]\}$
12. $K = \{(x, y) \mid y = 2(x - 5), x \in [-2, 4]\}$
13. $L = \{(x, y) \mid y = -3x + 12\}$
14. $M = \{(x, y) \mid y = 5x - 20\}$
15. $N = \{(x, y) \mid y = -x^2 + 20\}$
16. $\tilde{N} = \{(x, y) \mid y = x^2 - 10\}$
17. $O = \{(x, y) \mid y = x^3 - 8\}$
18. $P = \{(x, y) \mid y = -x^3 - x^2 - 6x, x \in [-4, 4]\}$
19. $Q = \{(x, y) \mid y = x^3 - 9x, x \in [-4, 4]\}$
20. $R = \{(x, y) \mid y = x^4 - 50, x \in [-4, 4]\}$
21. $S = \{(x, y) \mid y = -x^4 - 50, x \in [-4, 4]\}$
22. $T = \{(x, y) \mid y = \frac{4}{x}, x \neq 0\}$
23. $U = \{(x, y) \mid y = \frac{2}{x+2}, x \neq -2\}$
24. $f(x) = x^2 + x - 10$
25. $g(x) = \sqrt{2x+4}$
26. $h(x) = \sqrt{x^2-16}$
27. $j(x) = \sqrt{x^2-9}$
28. $l(x) = \sqrt{25+x^2}$
29. $p(x) = \sqrt{8x}$
30. $q(x) = -\sqrt{9x}$

6. Operaciones con funciones

Álgebra de funciones: Si f y g son funciones reales de variable real con D_f y D_g respectivamente, entonces es posible realizar operaciones numéricas como la adición $f + g$, sustracción $f - g$, la multiplicación $f \cdot g$ y la división $\frac{f}{g}$ con $g(x) \neq 0$ las respectivas funciones $f(x)$ y $g(x)$. El dominio de estas funciones $x \in D_f \cap D_g$ está definido de la siguiente forma:

Sean las funciones $F = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$ $G = \{(x, y) \mid y = g(x), x \in D_g\}$

Para $x \in D_f \cap D_g$ las operaciones con estas funciones son:

Adición: $F + G = \{(x, y) \mid y = f(x) + g(x)\}$

Sustracción: $F - G = \{(x, y) \mid y = f(x) - g(x)\}$

Multiplicación: $FG = \{(x, y) \mid y = f(x)g(x)\}$

División: $\frac{F}{G} = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0 \right\}$

6.1 Suma de funciones

Sean f y g dos funciones de variable real definidas en un mismo intervalo. Se llama suma de ambas funciones, y que se representa $f+g$, a la función definida por

$$F + G = \{(x, y) \mid y = f(x) + g(x)\}$$

6.2 Resta de funciones

Del mismo modo que se ha definido la suma de funciones, se define la resta de dos funciones reales de variable real f y g , como la función

$$F - G = \{(x, y) \mid y = f(x) - g(x)\}$$

Para que esto sea posible es necesario que f y g estén definidas en un mismo intervalo.

6.3 Multiplicación de funciones

Sean f y g dos funciones reales de variable real, y definidas en un mismo intervalo. Se llama función producto de f y g a la función definida por

$$F \cdot G = \{(x, y) \mid y = f(x)g(x)\}$$

6.4 División de funciones

Dadas dos funciones reales de variable real, f y g , y definidas en un mismo intervalo, se llama función cociente de f y g a la función definida por

$$\frac{F}{G} = \{(x, y) \mid y = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0\}$$

Nota: La función f/g está definida en todos los puntos en los que la función g no se anula.



Basado en
competencias

Ejemplos:

Realiza las operaciones $F + G$, $F - G$, FG y $\frac{F}{G}$ para las siguientes funciones

$$F = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4, x \in \mathbb{R}\} \quad G = \{(x, y) \mid y = x + 2, x \in \mathbb{R}\}.$$

Solución:

Para este caso $D_f \cap D_g = \mathbb{R}$ por lo tanto se procede a las operaciones.

$$F + G = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4 + x + 2\}$$

$$F + G = \{(x, y) \mid y = x^2 + x - 2, x \in \mathbb{R}\}.$$

$$F - G = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4 - (x + 2)\}$$

$$F - G = \{(x, y) \mid y = x^2 - x - 6, x \in \mathbb{R}\}.$$

$$FG = \{(x, y) \mid (x^2 - 4)(x + 2)\}; \quad y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$FG = \{(x, y) \mid y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8, x \in \mathbb{R}\}$$

$$FG = \{(x, y) \mid y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8, x \in \mathbb{R}\}$$

$$\frac{F}{G} = \{(x, y) \mid y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}, x \neq -2\}; \quad y = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} \text{ para } x \neq -2$$

$$\frac{F}{G} = \{(x, y) \mid y = x - 2, x \neq -2\}$$

$$\frac{F}{G} = \{(x, y) \mid y = x - 2, x \neq -2\}$$

Resuelve el siguiente ejercicio.

Realiza las operaciones $F + G$, $F - G$, FG y $\frac{F}{G}$ para las siguientes funciones.

$$F = \{(x, y) \mid y = x^2 - 9, x \in \mathbb{R}\} \text{ y } G = \{(x, y) \mid y = x - 3, x \in \mathbb{R}\}.$$



Resultado:

$$F + G = \{(x, y) \mid y = x^2 + x - 12\}$$

$$F - G = \{(x, y) \mid y = x^2 - x - 6\}$$

$$FG = \{(x, y) \mid y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27\}$$

$$\frac{F}{G} = \{(x, y) \mid y = x + 3\}$$

Ejemplo:

Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = 4x$, Realiza las operaciones de funciones $F + G$, $F - G$, FG y $\frac{F}{G}$ para $x = 3$.

Solución:

Sean $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = 4x$ para $x = 3$

Entonces: $f(3) = (3)^3 - 1 = 26$ y $g(3) = 4(3) = 12$

$[f + g](3) = f(3) + g(3) = 26 + 12 = 38$

$[f - g](3) = f(3) - g(3) = 26 - 12 = 14$

$[f \times g](3) = f(3) \times g(3) = 26 \times 12 = 312$

$[f / g](3) = f(3) / g(3) = 26 / 12 = 13 / 6$



Ejercicio
Módulo 4

Realizar las operaciones $F + G$, $F - G$, FG y $\frac{F}{G}$ para las siguientes funciones:

$F = \{(x, y) \mid y = x^2 - 9, x \in \mathbb{R}\}$ y $G = \{(x, y) \mid y = x - 3, x \in \mathbb{R}\}$. Para $x = -1, 0$ y 2 .

Resultado:

Resultado de:	Para $x = -1$	Para $x = 0$	Para $x = 2$
$F + G$	- 12	- 12	- 6
$F - G$	- 4	- 6	- 4
FG	32	27	5
$\frac{F}{G}$	2	3	5



Ejercicio
Módulo 4

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = -3x + 4$$

$$g(x) = (x + 5)^2$$

$$h(x) = 5x - 8$$

$$i(x) = -7x^2$$

Realiza las siguientes operaciones de funciones para el valor de x indicado.

a) $[3f + g](4) =$

b) $[2h - 5g](4) =$

c) $[2f + 5g - 4h](-2) =$

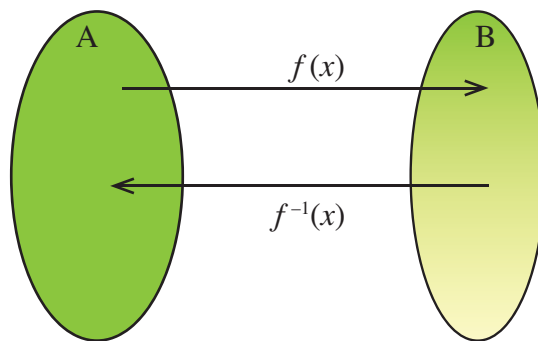
d) $[g \circ i](-3) =$

7. Función inversa de una función

7.1 Definición de función inversa

Se llama **función inversa** o **recíproca** de una función f a una nueva función cuyo dominio es la imagen de la función inicial, y su imagen es el dominio de la función inicial.

Es decir, si la función g es la función inversa de f , entonces se cumple que si $f(b) = a$, entonces $f^{-1}(a) = b$.



$f(x)$ es una función y $f^{-1}(x)$ es su inversa.

7.2 Obtención de la función inversa de una función

Para obtener la inversa de una función el dominio y el rango se invierten, por lo que no toda función tiene inversa. Para que tenga inversa una función debe ser inyectiva, es decir que ni los elementos del dominio ni del rango se deben repetir en dos parejas ordenadas.

Gráficamente una función inyectiva se caracteriza porque para cualquier recta horizontal trazada sobre la gráfica de la función intersecta a esta en un solo punto.

Podemos definir la inversa (F^*) de una función F de la siguiente manera:

Sea $F = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$ una función inyectiva, entonces su inversa denotada por F^* es la función tal que:

$$F^* = \{(f(x), x) \mid x \in D_f\}$$

Esto es, los primeros elementos pasan a ser los segundos elementos y los segundos elementos pasan a ser los primeros elementos.

Ejemplo:

Obtén la función inversa de la función dada por sus parejas ordenadas y grafica ambas en el mismo plano cartesiano.

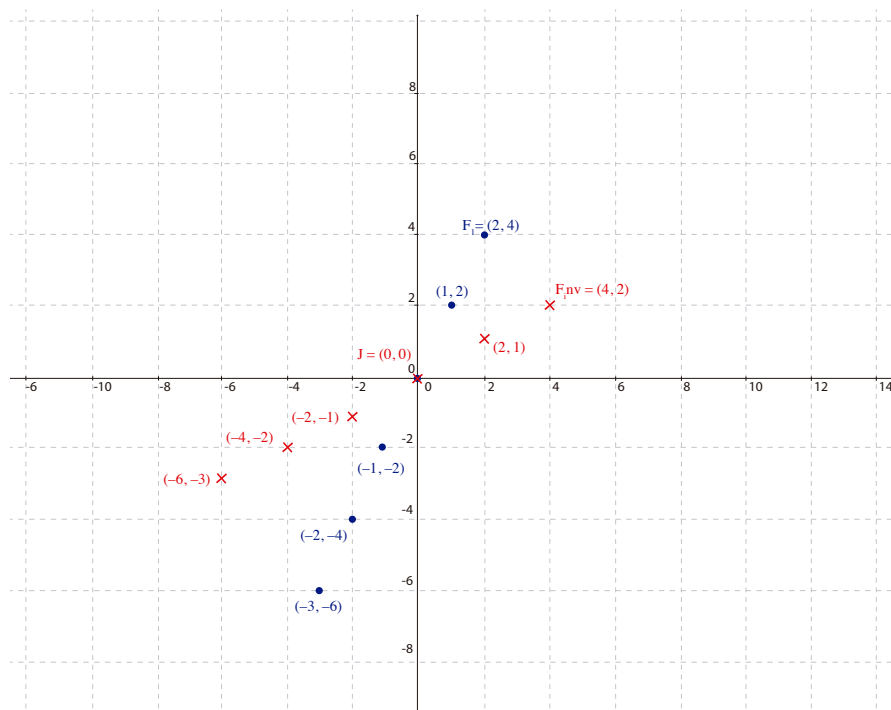
$$F = \{(-3, -6), (-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$$

Solución:

Invirtiendo el orden de los elementos de las parejas ordenadas:

$$\text{Tenemos: } F^* = \{(-6, -3), (-4, -2), (-2, -1), (0, 0), (2, 1), (4, 2)\}$$

Gráficamente la función F en color azul y su inversa F^* en color rojo quedan así:



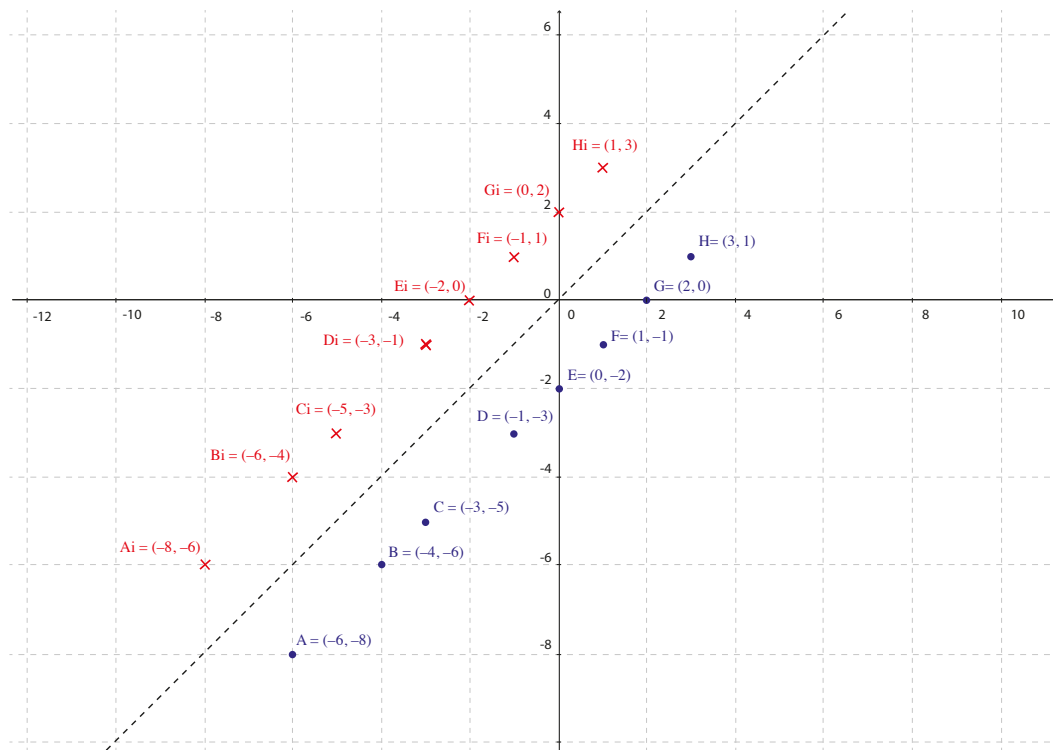


Obtén la función inversa de la función dada por sus parejas ordenadas y grafica ambas en el mismo plano cartesiano.

$$H=\{(-6,-8), (-4,-6), (-3,-5), (-1,-3), (0,-2), (1,-1), (2,0), (3,1)\}$$

Solución:

$$H^*=\{(-8,-6), (-6,-4), (-5,-3), (-3,-1), (-2,0), (-1,1), (0,2), (1,3)\}$$



Ejemplo:

Para la función $J = \{(x,y) \mid y = x^2 - 1\}$, para $x \geq 0$ obtén su inversa J^* y traza ambas gráficas en el mismo plano cartesiano.

Solución

Para obtener la inversa de la función, en la regla de correspondencia **se intercambian y** por **x** y **x** por **y** :

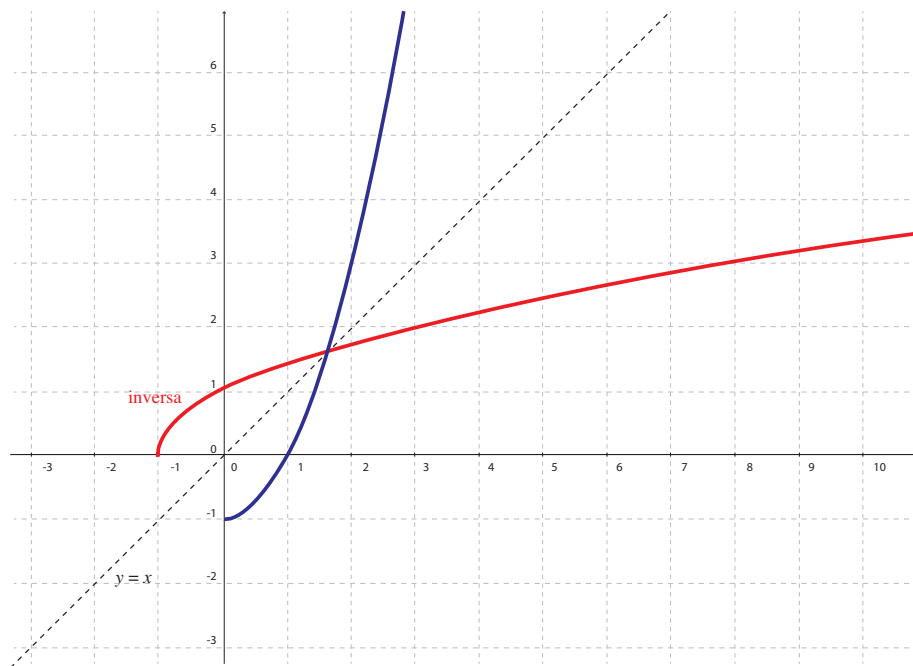
$x = y^2 - 1$ aunque esta regla de correspondencia tiene la forma $x = f(y)$, es conveniente darle la forma $y = f(x)$, despejando la y.

$$x + 1 = y^2;$$

$$\sqrt{x+1} = y; \text{ finalmente la función inversa se escribe así}$$

$$J^* = \{(x,y) \mid y = \sqrt{x+1}\}, \text{ para } x \in [-1, \infty)$$

Al graficar ambas funciones en el mismo plano, se tiene:



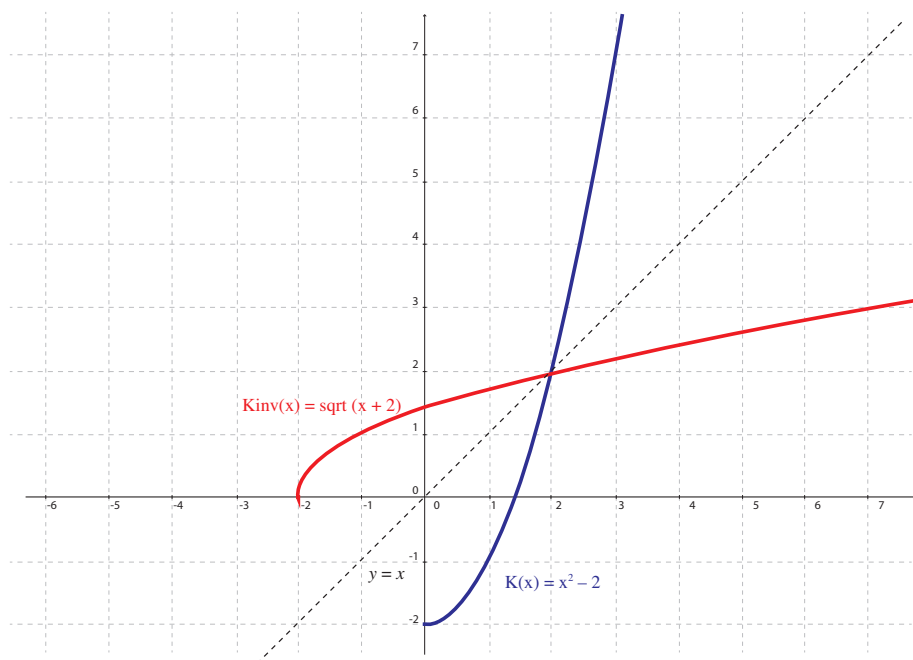
Observa que las gráficas de la función y su inversa son simétricas respecto a la función idéntica $y = x$.

Ejercicio:

Para la función $K = \{(x, y) \mid y = x^2 - 2, \text{ para } x \geq 0\}$ obtén su inversa K^* y traza ambas gráficas en el mismo plano cartesiano.

Solución:

$K^* = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x+2}, \text{ para } x \geq -2\}$ en color rojo; K en color azul.



7.3 Composición de funciones

La composición de funciones equivale a una función dentro de otra función, es decir una función compuesta, y se establece de la siguiente manera:

Para las funciones:

$$F = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\} \text{ y } G = \{(x, y) \mid y = g(x), x \in D_g\}$$

La **composición de F con G** se denota como **$F \circ G$** , se define por

$$F \circ G = \{(x, y) \mid y = f(g(x))\}$$

Donde el dominio de la composición es el conjunto de todos los elementos del dominio de G , tales que $g(x)$ está en el dominio de F , matemáticamente:

$$x \in D_g \text{ tal que } g(x) \in D_f$$

Para observar la forma de la función composición es conveniente ilustrarlo, utilizando los conceptos de dominio y rango de las funciones como conjuntos de parejas ordenadas finitas.

Ejemplo:

Obtén $F \circ G$ para las funciones siguientes.

$$F = \{(-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$$

$$G = \{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

Solución:

Para la Función $F \circ G$ se escriben el dominio y rango de la función G alineados abajo con los elementos del dominio y rango de la función F , como se ilustra.

$Dg = \{$	-2	-1	0	1	2	$\}$
$Rg = \{$	-1	0	1	2	2	$\}$
$Df = \{$	-2	-1	0	1	2	$\}$
$Rf = \{$	-4	-2	0	2	4	$\}$

El primer elemento del rango de g igual con el del dominio de f es -1. Entonces, la primera pareja de $F \circ G$ es $(-2, -2)$.

El segundo elemento del rango de g igual con el dominio de f es 0. Entonces, la segunda pareja de $F \circ G$ es $(-1, -0)$.

El tercer elemento del rango de g igual con el dominio de f es 1. Entonces, la tercera pareja de $F \circ G$ es $(0, 2)$.

El último elemento del rango de g igual con el dominio de f es 2. Entonces, la tercera pareja de $F \circ G$ es $(1, 4)$.

Finalmente, $F \circ G = \{(-2, 2), (-1, 0), (0, 2), (1, 4)\}$.



Ejercicio
Módulo 4

Para las mismas funciones obtén ahora GoF

$$F = \{(-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$$

$$G = \{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$



Ejemplo:

Obtén GoF para las funciones siguientes

$$F = \{(-4, -2), (-2, -1), (0, 0), (2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$$

$$G = \{(-4, -2), (-2, 0), (0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$$

Solución:

Para la función GoF se escriben el dominio y rango de la función G alineados abajo con los elementos del dominio y rango de la función F , como se ilustra.

$Dg = \{$	-4	-2	0	2	4	6 }
$Rg = \{$	-2	-1	0	1	2	3 }
$Df = \{$	-4	-2	0	1	2	3 }
$Rf = \{$	-2	0	2	3	4	5 }

El primer elemento del **rango de f** igual al del **dominio de g** es: -2. Entonces, la primera pareja de GoF es $(-4, 0)$.

El segundo elemento del rango de f igual con el dominio de g es: 0. Entonces, la segunda pareja de GoF es $(0, 2)$.

El tercer elemento del rango de f igual con el dominio de g es: 1. Entonces, la tercera pareja de GoF es $(2, 3)$.

El cuarto elemento del rango de f igual con el dominio de g es: 1. Entonces, la tercera pareja de GoF es $(4, 4)$.

El último elemento del rango de f igual con el dominio de g es: 2. Entonces, la tercera pareja de GoF es (6, 5).

Finalmente $GoF = \{(-4, 0), (0, 2), (2, 3), (4, 4), (6, 5)\}$

Para las funciones anteriores obtén FoG

$$F = \{(-4, -2), (-2, -1), (0, 0), (2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$$

$$G = \{(-4, -2), (-2, 0), (0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$$



Si observas, para las mismas funciones F y G la composición de funciones $FoG \neq GoF$, es decir, la composición de funciones **no es conmutativa**.

Ejemplo:

Para las funciones F y G siguientes, obtén FoG y GoF

$$F = \{(x, y) \mid y = x^2 - 5x + 6, x \in \mathbb{R}\} \text{ y } G = \{(x, y) \mid y = x + 2, x \in \mathbb{R}\}.$$

En este caso, como el rango de la función G (que representa una recta) y el dominio de F son todos los números reales, no existe ninguna restricción para el dominio de la función FoG , que es $x \in \mathbb{R}$. La regla de correspondencia se obtiene con la sustitución en: $y = f(g(x))$.

Esto es, sustituyendo x por $g(x) = x + 2$ en la regla de correspondencia de $y = f(x)$:

$y = (x + 2)^2 - 5(x + 2) + 6$ que desarrollando el binomio al cuadrado, multiplicando y simplificando los términos semejantes:

$$y = x^2 + 4x + 4 - 5x - 10 + 6$$

Se obtiene: $FoG = \{(x, y) \mid y = x^2 - x, \text{ para } x \in \mathbb{R}\}$.

Para obtener GoF se procede análogamente, sólo que el rango de la función F (que representa una parábola) es $f(x) \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$ por lo que el dominio de la función compuesta GoF es $x \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$; y su regla de correspondencia se obtiene con la sustitución en: $y = g(f(x))$.

Como $f(x) = x^2 - 5x + 6$, se sustituye en $g(x) = x + 2$: $y = (x^2 - 5x + 6) + 2$, si se simplifica se obtiene: $GoF = \{(x, y) \mid y = x^2 - 5x + 8, \text{ para } x \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)\}$.



Ejercicio
Módulo 4

Para las funciones F y G siguientes obtén $F \circ G$ y $G \circ F$

$$F = \{(x, y) \mid y = x^2 - 2x - 35, x \in \mathbb{R}\} \text{ y } G = \{(x, y) \mid y = x + 3, x \in \mathbb{R}\}$$



Basado en
competencias

Ejemplo:

Para las funciones H y J siguientes, obtén $H \circ J$ y $J \circ H$.

$$H = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 2}, x \in [2, \infty)\} \text{ y } J = \{(x, y) \mid y = x^2 + 5, x \in \mathbb{R}\}$$

Solución:

Para la función composición $H \circ J$, su regla de correspondencia se obtiene con la sustitución en: $y = h(j(x))$; como $j(x) = x^2 + 5$.

$$\text{Entonces se sustituye: } y = \sqrt{(x^2 + 5) - 2}$$

$$\text{Simplificado queda: } H \circ J = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 + 3}, x \in \mathbb{R}\}.$$

Para la función composición $J \circ H$, su regla de correspondencia se obtiene con la sustitución en: $y = j(h(x))$; como $h(x) = \sqrt{x - 2}$,

$$\text{Entonces se sustituye: } y = \sqrt{(x - 2)^2} + 5, \text{ simplificando la expresión.}$$

$$\text{La función composición es: } J \circ H = \{(x, y) \mid y = x + 3, x \in [2, \infty)\}.$$

¿Por qué el dominio de la función composición $J \circ H$ es $x \in [2, \infty)$ y no $x \in \mathbb{R}$?



Para las funciones K y L siguientes obtén $K \circ L$ y $L \circ K$.

$$K = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x+3}, x \in [-3, \infty)\} \text{ y } L = \{(x, y) \mid y = 2x - 3, x \in \mathbb{R}\}$$

Solución:

$K \circ L = \{(x, y) \mid y = \sqrt{2x}\}$	$L \circ K = \{(x, y) \mid y = 2\sqrt{x+3} - 3\}$
---	---

Ejercicios adicionales

1. Obtén $F \circ G$ y $G \circ F$ para las funciones siguientes:

$$F = \{(-3, -1), (-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$$

$$G = \{(-1, -3), (0, -2), (1, -1), (2, 0), (3, 1), (4, 2)\}.$$

2. Obtén $I \circ G$ y $G \circ I$ para las funciones siguientes:

$$I = \{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$G = \{(-5, -3), (-3, -2), (-1, -1), (0, 1), (2, 2), (4, 3)\}.$$

3. Obtén $L \circ M$ y $M \circ L$ para las funciones siguientes:

$$L = \{(-6, -3), (-4, -2), (-2, -1), (0, 0), (2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$$

$$M = \{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 3), (2, 5), (4, 7), (6, 1)\}.$$

4. Obtén $P \circ Q$ y $Q \circ P$ para las funciones siguientes:

$$P = \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$$

$$Q = \{(-5, 4), (-3, 4), (-1, 4), (0, 4), (2, 4), (4, 4)\}.$$

5. Para las funciones F y G siguientes obtén $F \circ G$ y $G \circ F$.

$$F = \{(x, y) \mid y = 2x + 10, x \in \mathbb{R}\} \text{ y } G = \{(x, y) \mid y = x - 3, x \in \mathbb{R}\}.$$

6. Para las funciones H y J siguientes obtén $H \circ J$ y $J \circ H$.

$$H = \{(x, y) \mid y = x^2 - 9, x \in \mathbb{R}\} \text{ y } J = \{(x, y) \mid y = x + 3, x \in \mathbb{R}\}.$$

7. Para las funciones K y L siguientes obtener $K \circ L$ y $L \circ K$.

$$K = \{(x, y) \mid y = x^3 - x^2 - 12x + 5, x \in \mathbb{R}\} \text{ y } L = \{(x, y) \mid y = 2x, x \in \mathbb{R}\}.$$

8. Para las funciones M y N siguientes obtener $M \circ N$ y $N \circ M$.

$$M = \{(x, y) \mid y = \sqrt{5x + 10}, x \in [-2, 20]\} \text{ y } N = \{(x, y) \mid y = x^2 - 5, x \in \mathbb{R}\}.$$

9. Para las funciones $\tilde{N}$ y P siguientes obtener $\tilde{N} \circ P$ y $P \circ \tilde{N}$.

$$\tilde{N} = \{(x, y) \mid y = \sqrt{16 - x^2}, x \in [-4, 4]\} \text{ y } P = \{(x, y) \mid y = \frac{\sqrt{x}}{2}, x \in [0, 16]\}.$$

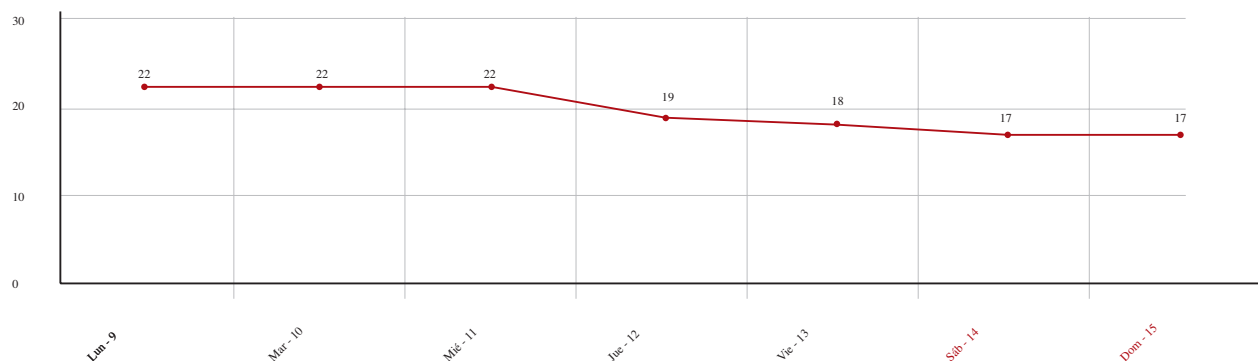
10. Para las funciones Q y S siguientes obtener $Q \circ S$ y $S \circ Q$.

$$Q = \{(x, y) \mid y = \frac{5}{x-5}, x \neq 5\} \text{ y } S = \{(x, y) \mid y = x^2 + 5, x \in \mathbb{R}\}.$$

8. Problemas de aplicación

Los problemas de aplicación de funciones puede ser muy variados, aquí estudiaremos algunos de los más usuales.

Para presentar la variación de temperatura en una semana.



Ejemplo:

La temperatura normal promedio del ser humano es de 36.5°C . La escala de temperatura centígrada varía de 0°C a 100°C , ¿cuáles son las temperaturas equivalentes en la escala Fahrenheit si la función de transformación es?:

$$^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5} (^{\circ}\text{C}) + 32^{\circ}.$$

Solución:

Para calcular las temperaturas equivalentes entre grados centígrados y grados Fahrenheit, se sustituye en la regla de correspondencia:

$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5} (^{\circ}\text{C}) + 32^{\circ}$
0°C	$^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5} (0^{\circ}) + 32^{\circ} = 32^{\circ}\text{F}$

36.5 °C	$^{\circ}F = \frac{9}{5} (36.5^{\circ}) + 32^{\circ} = 97.7^{\circ}F$
100 °C	$^{\circ}F = \frac{9}{5} (100^{\circ}) + 32^{\circ} = 212^{\circ}F$

Convierte las temperaturas mínimas y máximas que se presentaron en la ciudad de Toluca de grados centígrados a la escala de Fahrenheit.



4 °C	$^{\circ}F = \frac{9}{5} (4^{\circ}C) + 32^{\circ} =$
7 °C	
17 °C	
22 °C	

Solución:

4 °C = 39.2 °F	7 °C = 44.6 °F	17 °C = 62.6 °F	22 °C = 71.6 °F
----------------	----------------	-----------------	-----------------

Para el tipo de cambio entre monedas.

Ejemplo:

Si el tipo de cambio de 1 dólar = 17 pesos mexicanos.

Construye la gráfica de la función de cambio entre dólares y pesos y viceversa hasta 25 dólares.

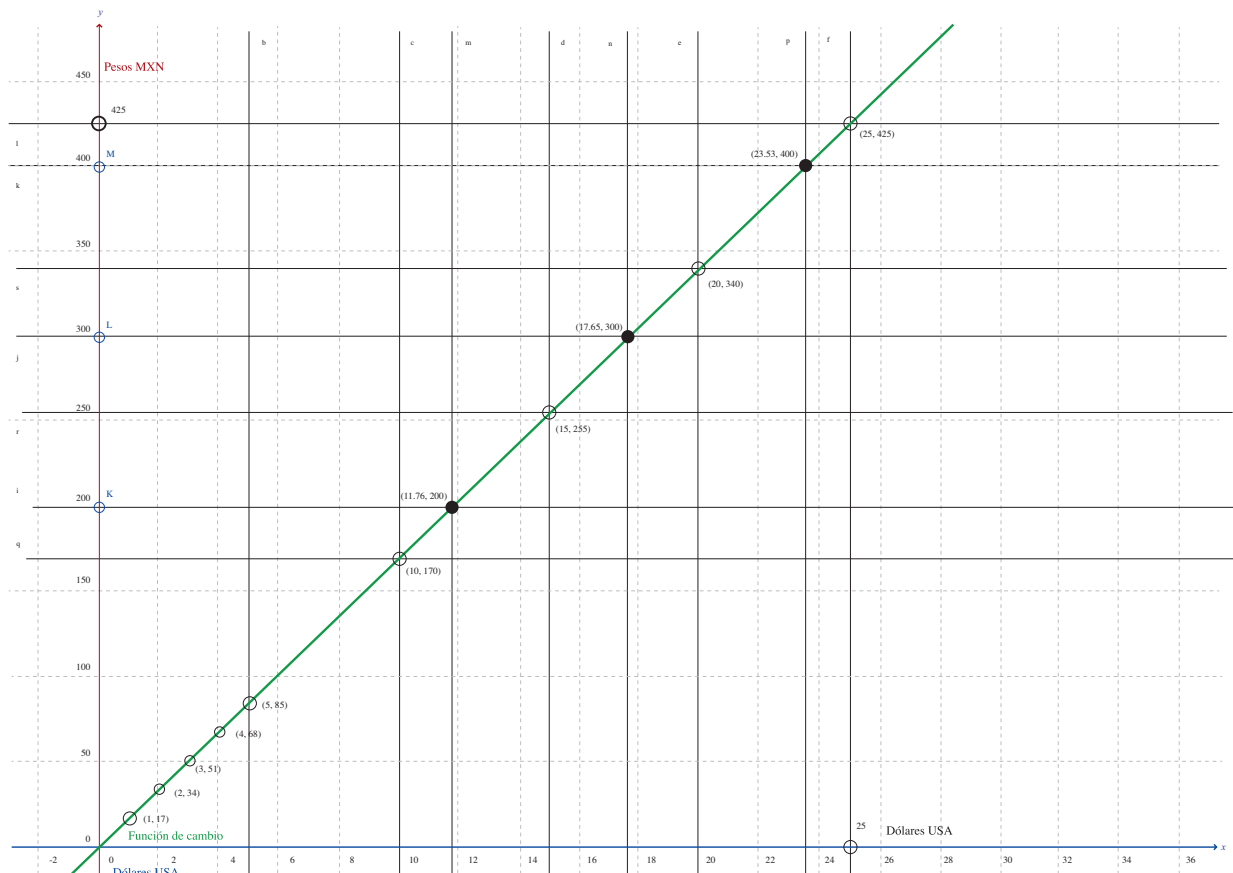
Obtén gráficamente cuántos dólares son \$200, \$300 y \$400 y cuántos pesos son 10, 15 y 20 dólares.

Solución:

En el eje de las abscisas se marcarán los dólares y en el eje de las ordenadas los pesos mexicanos. La función será $y = 17x$. Obtenemos el valor de la ordenada para $x = 25$ dólares, con la regla de correspondencia $y = 17 (25) = 425$ pesos y obtenemos el punto de coordenadas (25,425), unimos este punto con una línea recta hasta el origen y tendremos la gráfica de la función de cambio entre dólares y pesos mexicanos y viceversa.

Si trazamos una línea horizontal en el valor de \$200 hasta cortar la función y en el punto de corte trazamos una vertical hasta encontrar el eje x obtenemos el valor de 11.76 dólares; procediendo de la misma forma para \$300 obtenemos 11.65 dólares y para \$400 obtenemos 23.53 dólares.

Para obtener con la gráfica cuántos pesos son 10 dólares, se traza una vertical en el valor de 10 dólares hasta cortar la función y, en el punto de corte, se traza una horizontal hasta encontrar el eje, obteniendo el valor \$170; procediendo análogamente para 15 dólares obtenemos \$255 y, para 20 dólares obtenemos \$340 como se muestra en la gráfica siguiente.



Tipo de cambio entre monedas



Si el tipo de cambio de 1 *dólar canadiense* = 12.60 *pesos*.

Construye la gráfica de la función de cambio entre:
dólares canadienses (CAD) y *pesos mexicanos (M×N)* y viceversa hasta 40.

Obtén gráficamente cuántos *dólares canadienses* son \$ 200, \$ 300 y \$ 400 pesos; y cuántos pesos son 10, 15 y 20 *CAD*.

Resultados:

\$ 200 pesos = 15.87 *CAD*

\$ 300 pesos = 23.80 *CAD*

\$ 400 pesos = 31.75 *CAD*

10 *CAD* = 126 *M×N*

15 *CAD* = 189 *M×N*

20 *CAD* = 252 *M×N*

Ejemplo:

En el fútbol americano se usa como unidad la *yarda* que equivale a 91.5 *cm* o 0.915 *m*. Usando una función para convertir yardas a metros ¿cuánto mide en metros 10, 20, 50 y 100 *yardas*?

Solución: Si una yarda mide 0.915 *m*, utilizaremos la función de conversión.

$$m(x) = 0.915x$$

Yardas: x

$$m(x) = 0.915x \text{ m}$$

10	$m(10) = 0.915(10) = 9.15 \text{ m}$
20	$m(20) = 0.915(20) = 18.30 \text{ m}$
50	$m(50) = 0.915(50) = 45.75 \text{ m}$
100	$m(100) = 0.915(100) = 91.5 \text{ m}$

Resuelve el siguiente ejercicio.

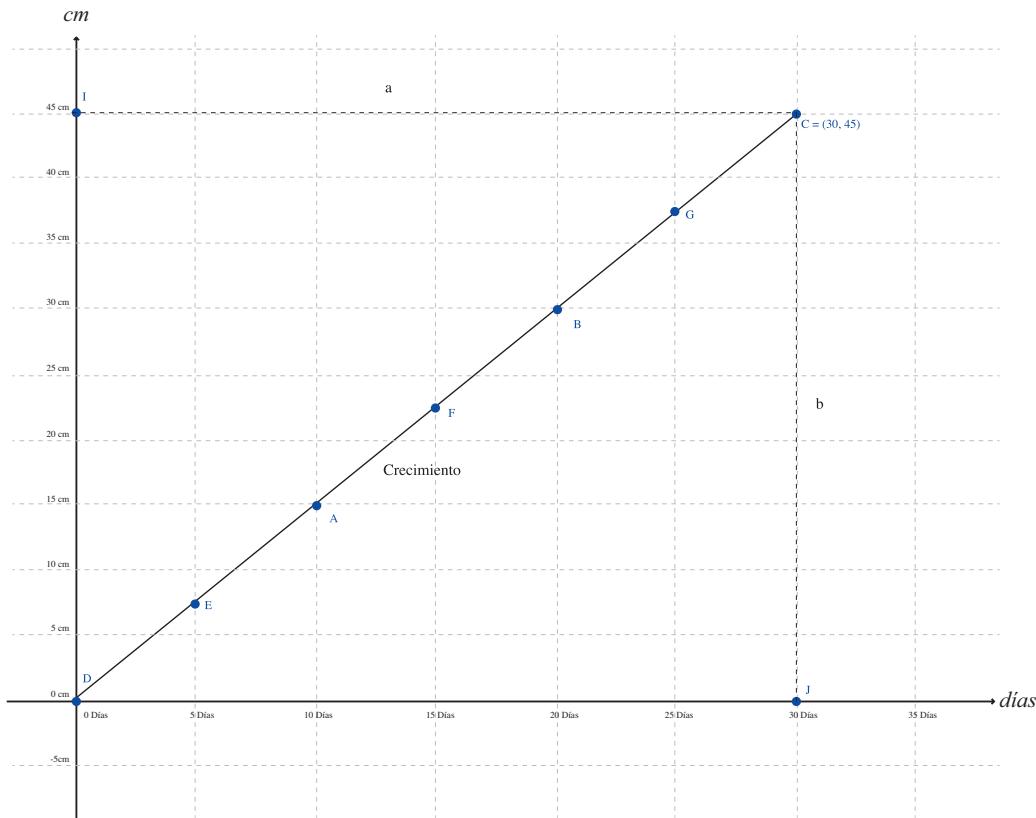
Las medidas reglamentarias de un campo de fútbol soccer para un partido internacional son de largo 120 m por 75 m de ancho; 11 m del tiro de penalti y 7.32 m del ancho de la portería. Obtén una función para convertir todas estas medidas a yardas.



Resultados:	
Metros: x	$y(x) = 1.093x \text{ yd}$
120	$y(120) = 131.16 \text{ yd}$
75	$y(75) = 82 \text{ yd}$
11	$y(11) = 12 \text{ yd}$
7.32	$y(7.32) = 8 \text{ yd}$

Ejemplo:

En la siguiente gráfica se muestra el crecimiento de una planta.
¿Qué tamaño alcanzará a los 10 y 30 días?



Solución:

En la gráfica cuando $x = 10$, $y = 15$, es decir $y = 1.5x$ para que $y = 1.5 (10) = 15$.

Si se sustituye en la función el valor de $x = 30$, se obtiene el tamaño que alcanzará la planta a los 30 días: $y = 1.5 (30) = 45$. Alcanzará 45 cm.



El sueldo de un ayudante mecánico calificado depende de sus años de experiencia como lo muestra la siguiente tabla.

Años de experiencia	Sueldo \$
1	3 000
2	4 000
3	7 000

¿Cuál es la función con la que se calculó su sueldo de acuerdo con sus años de experiencia?

- a) $S(x) = 3000 x$
- b) $S(x) = 3000 x - 2000$
- c) $S(x) = 1000 x^2 - 3000x + 2000$
- d) $S(x) = 1000 x^2 - 2000x + 4000$

Ejemplo:

Dariana recordó que en un examen de matemáticas le preguntaron que, dada la función $h(x) = 2x^2 - 2x + 6$, el valor de $h(-2) - h(2)$ resulta:

- a) 16
- b) 10
- c) 8
- d) 0

Solución:

Si calculamos $h(-2) = 2(-2)^2 - 2(-2) + 6 = 8 + 4 + 6 = 18$.

$h(2) = 2(2)^2 - 2(2) + 6 = 8 - 4 + 6 = 10$, y luego $h(-2) - h(2) = 18 - 10 = 8$.

El resultado es 8.

Alondra preguntó a su maestro sobre una duda de su examen de matemáticas. Le preguntaron que, dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 10$, el valor de $f(-1) - f(1)$ resulta:

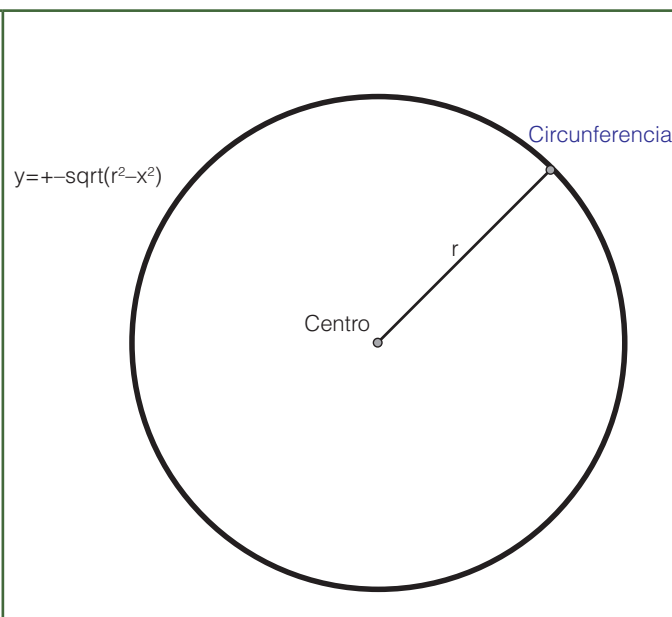
- a) -15
- b) -12
- c) -10
- d) 0



Ejemplo:

En una circunferencia de radio r , su diámetro mide el doble de su radio, esto es $2r$, y para calcular el perímetro la función también depende del radio, recuerdas ¿cuál es la expresión algebraica para calcular el perímetro de una circunferencia?

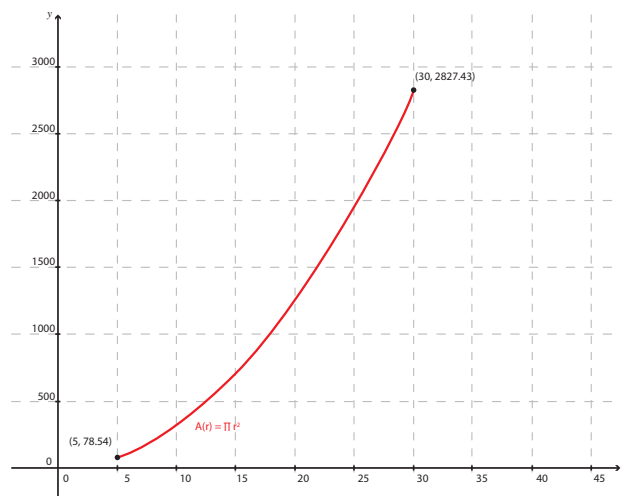
Grafica la función perímetro de una circunferencia para $r \in [0, 20]$.



Solución:

La función perímetro de una circunferencia se obtiene por medio de la expresión algebraica $P = 2 \pi r$.

Radio r	Perímetro $p = 2\pi r$.
10	$p = 2\pi (10) = 62.83$.
20	$p = 2\pi (20) = 125.66$

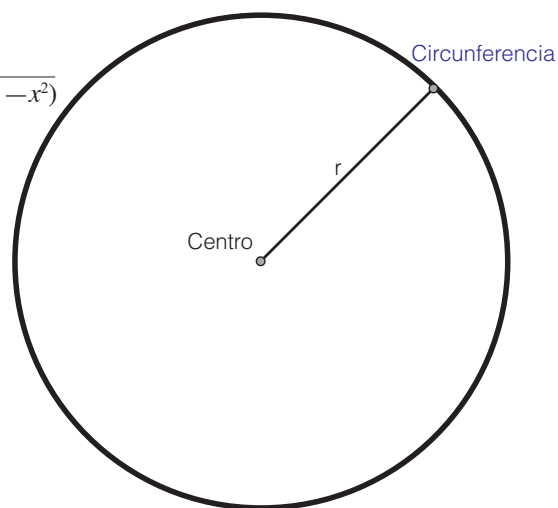


Ejercicio
Módulo 4

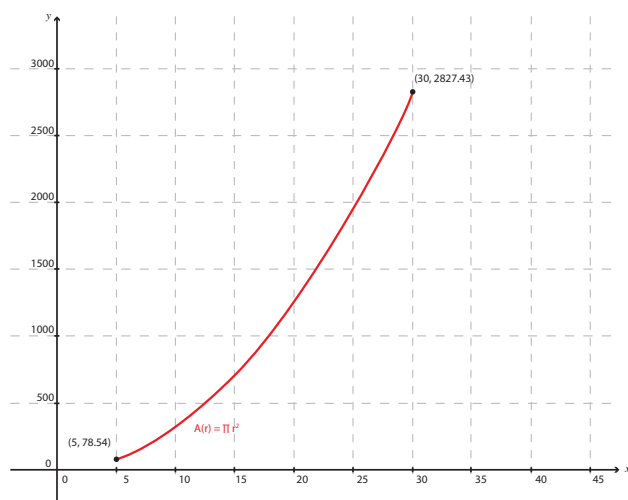
En un círculo de radio r , su diámetro mide el doble de su radio, esto es $2r$, y para calcular el área del círculo la función también depende del radio, recuerdas ¿cuál es la expresión algebraica para calcular el área del círculo?

Graficar la función área de un círculo para los valores de:
 $r \in [5, 30]$.

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$



Resultado: $A(r) = \pi r^2$

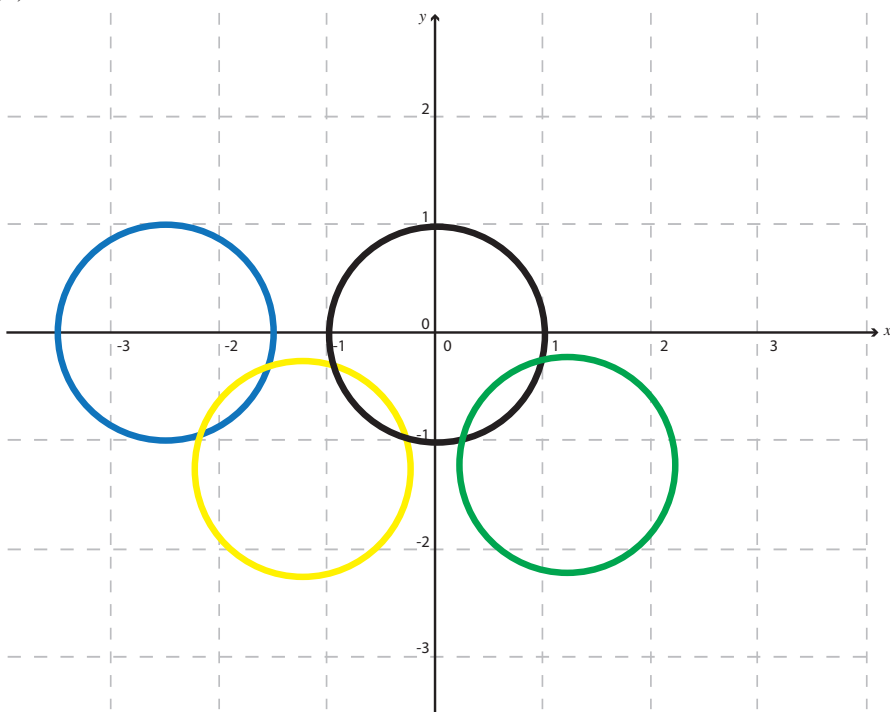


Dominio de $r \in [5, 30]$ y Rango $y \in [25\pi, 900\pi]$

Ejemplo:

Para completar el emblema de las Olimpiadas siguiente se han trazado círculos de radio uno y falta uno de color rojo, donde se debe poner el centro de la circunferencia para que la gráfica sea simétrica con respecto al origen:

- a) (2,0)
- b) (1.5,0)
- c) (0,1.5)
- d) (2.5,0)

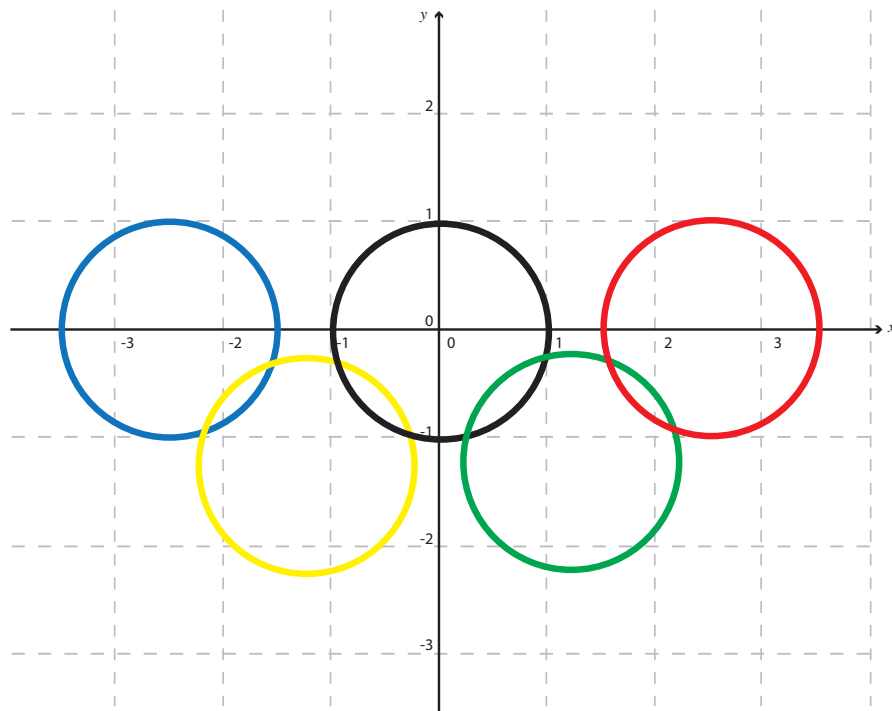


Solución:

Para que sea simétrica con la circunferencia azul su centro debe estar sobre el eje de las equis entre el 2 y el 3, luego tiene que ser: D) (2.5,0).

Para completar el emblema de las Olimpiadas siguiente falta un círculo negro con centro en el origen y radio uno, cuya expresión algebraica debe ser:

- a) $x + y = 1$
- b) $x - y = 1$
- c) $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$
- d) $x^2 - y^2 = 1$



Solución:

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Ejercicios adicionales

5. Dada la función $f(x) = -3x^2 + 7x - 21$ obtener el valor de la expresión:

$$f(-3) - f(3) =$$

6. Dada la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 21$ obtener el valor de la expresión:

$$g(-2) - g(2) =$$

7. En muchos aparatos electrónicos las medidas están dadas en pulgadas, calcular el tamaño en centímetros usando la función de conversión adecuada para:

$$6'', 10'', 14'', 28'' \text{ y } 42''.$$

8. Considera un cuadrado que mide de lado x unidades. Grafica la función para calcular su perímetro es $P(x) = \{(x, p(x)) \mid p(x) = 4x, \text{ para } x \in [10, 30]\}$.

9. Considera un cuadrado que mide de lado x unidades. Grafica la función para calcular su área como $A(x) = \{(x, y) \mid y = x^2, \text{ para } x \in [10, 30]\}$.

10. Considera un cuadrado que mide de lado x unidades. Grafica la función para calcular su Diagonal como $D(x) = \{(x, y) \mid y = \sqrt{2}x, \text{ para } x \in [10, 30]\}$.

11. Obtén la función inversa de la función inyectiva dada por sus parejas ordenadas y grafica ambas funciones en el mismo plano cartesiano.

$$H = \{(-3, 1), (-2, 2), (-1, 3), (0, 5), (1, 7), (2, 11)\}.$$

12. Para la función inyectiva $J = \{(x, y) \mid y = x + 2, \text{ para } x \in \mathbb{R}\}$ obtén su inversa J^* y traza ambas gráficas en el mismo plano cartesiano.

13. Para la función inyectiva $K = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4, \text{ para } x \geq 0\}$ obtén su inversa K^* y traza ambas gráficas en el mismo plano cartesiano.

14. Para la función inyectiva $L = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2, \text{ para } x \geq 0\}$ obtén su inversa L^* y traza ambas gráficas en el mismo plano cartesiano.

15. Para la función inyectiva $M = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}, \text{ para } x \geq 0\}$ obtén su inversa M^* y traza ambas gráficas en el mismo plano cartesiano.

16. Para la función inyectiva $N = \{(x, y) \mid y = \frac{5}{x}, \text{ para } x \neq 0\}$ obtén su inversa N^* y traza ambas gráficas en el mismo plano cartesiano.

17. Para la función inyectiva $\tilde{N} = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x-1}, \text{ para } x \neq 1\}$ obtén su inversa $\tilde{N}^*$ y traza ambas gráficas en el mismo plano cartesiano.

Resultados

De la Figura 2.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

Dada R_s

El dominio $D_{R_s} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, y el rango $R_{R_s} = \{-6, -3, 0, 3, 6, 9\}$ la relación R_s corresponde al triple de a: $R5 \Leftrightarrow b = 3a$

Productos cartesianos.

$B \times C = \left\{ \begin{array}{l} (5,-2), (5,-1), (5,0), (5,1), (5,2), (5,3), \\ (6,-2), (6,-1), (6,0), (6,1), (6,2), (6,3), \\ (8,-2), (8,-1), (8,0), (8,1), (8,2), (8,3), \\ (10,-2), (10,-1), (10,0), (10,1), (10,2), (10,3) \end{array} \right\}$	$C \times A = \left\{ \begin{array}{l} (-2,5), (-2,14), (-2,15), (-2,20), \\ (-1,5), (-1,14), (-1,15), (-1,20), \\ (0,5), (0,14), (0,15), (0,20) \\ (1,5), (1,14), (1,15), (1,20) \\ (2,5), (2,14), (2,15), (2,20) \\ (3,5), (3,14), (3,15), (3,20) \end{array} \right\}$
--	---

Clasificación de funciones.

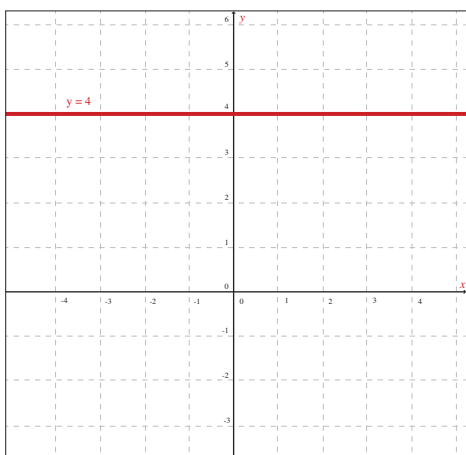
1. Función algebraica, racional, polinomial, cúbica y explícita.
2. Función trascendente, trigonométrica directa y explícita.
3. Función algebraica, racional, polinomial de 9º grado y explícita.
4. Función trascendente, exponencial y explícita.
5. Función trascendente trigonométrica directa y explícita.
6. Función algebraica, racional, polinomial, lineal y explícita.
7. Función algebraica, racional, no polinomial, y explícita.
8. Función algebraica, racional, no polinomial, y explícita.
9. Función trascendente, exponencial y explícita.
10. Función algebraica, no racional y explícita.

Dadas las funciones escribir dominio y rango.

Función	Dominio	Rango
$f(x) = 2x - x^2$	$x \in R$	$f(x) \in (-\infty, 1]$
$f(x) = \sqrt{x-1}$	$x \in [1, \infty)$	$f(x) \in [0, \infty)$
$s(t) = \frac{1}{t-1}$	$t \neq 0$	$f(t) \neq 0$
$f(x) = (3 - x^2)/2$	$x \in R$	$f(x) \in (-\infty, 1.5]$
El área A de un cuadrado de lado x	$x > 0$	$A(x) > 0$

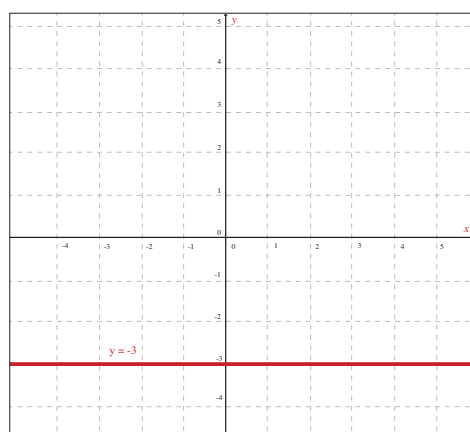
Graficación de funciones

1. $y = 4$



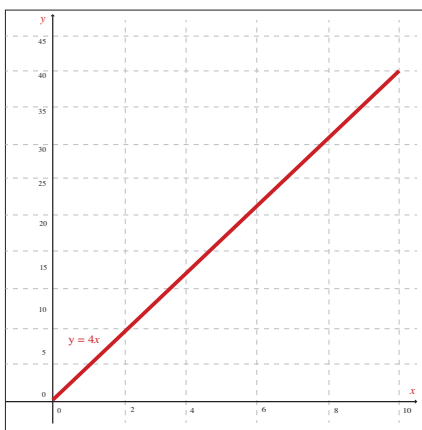
Dominio $[-5, 5]$, Rango $y = 4$ (función constante)

2. $y = -3$



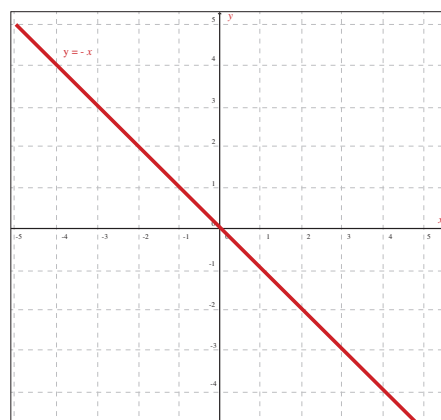
Dominio $[-6, 6]$, Rango $y = -3$ (función constante)

3. $y = 4x$



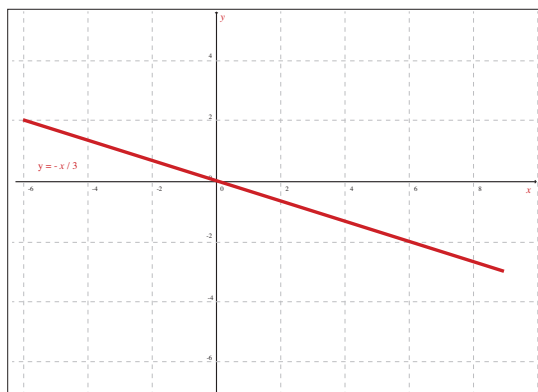
Dominio $[0, 10]$, Rango $[0, 40]$, (función lineal)

4. $y = -x$



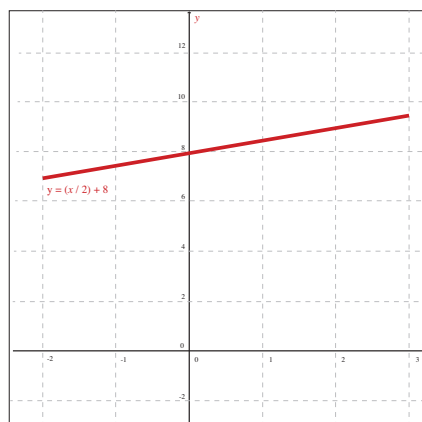
Dominio $[-5, 5]$, Rango $[-5, 5]$, (función lineal)

5. $y = -(1/3)x$



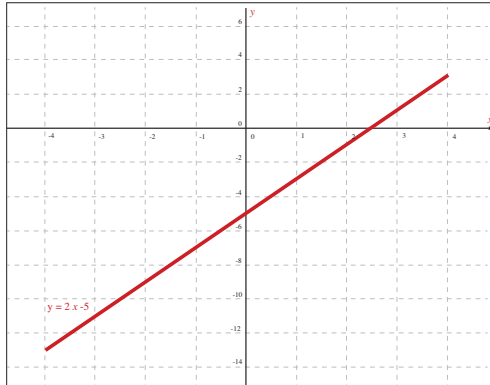
Dominio $[-6, 9]$, Rango $[-3, 2]$, (función lineal)

6. $y = (x/2) + 8$



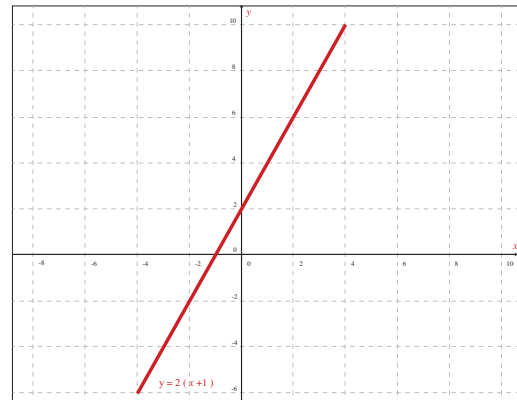
Dominio $[-2, 3]$, Rango $[-7, 9.5]$, (función lineal)

7. $y = 2x - 5$



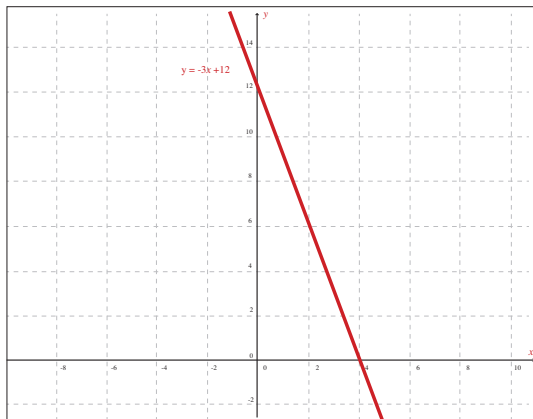
Dominio $[-4, 4]$, Rango $[-13, 3]$, (función lineal)

8. $y = 2(x + 1)$



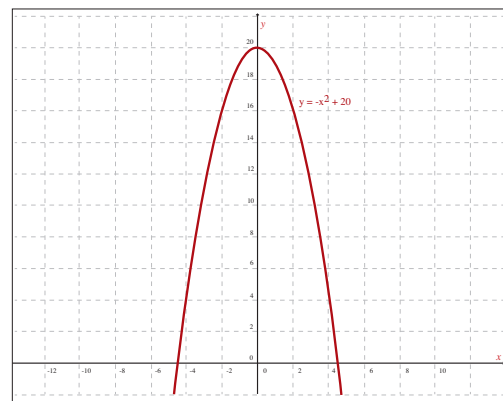
Dominio $[-4, 4]$, Rango $[-6, 10]$, (función lineal)

9. $y = -3x + 12$



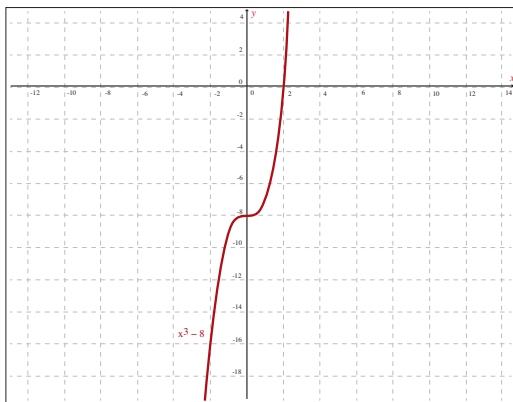
Dominio $x \in \mathbb{R}$, Rango $y \in \mathbb{R}$, (función lineal)

10. $y = -x^2 + 20$



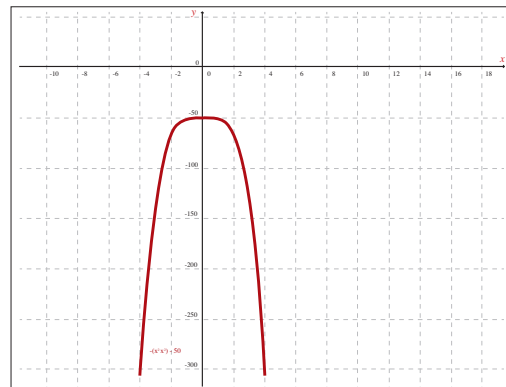
Dominio $x \in \mathbb{R}$, Rango $y \in (-\infty, 20]$ (función cuadrática) parábola.

11. $y = x^3 - 8$



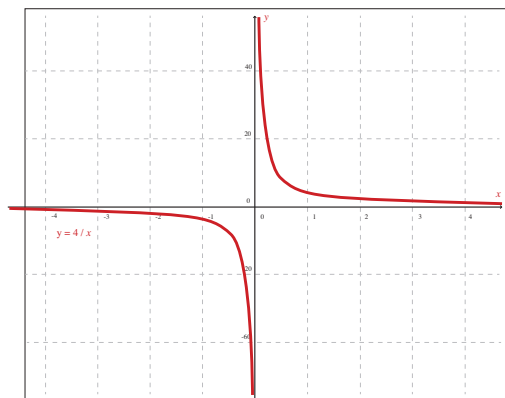
Dominio $x \in \mathbb{R}$, Rango $y \in \mathbb{R}$, (función cúbica)

12. $y = -x^4 - 50$



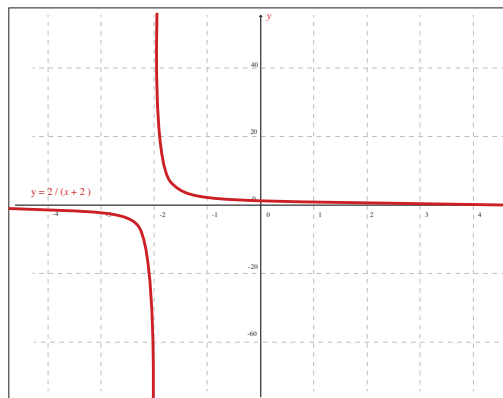
Dominio $[-4, 4]$, Rango $[-306, -50]$, (función cuadrática)

13. $y = 4 / x$



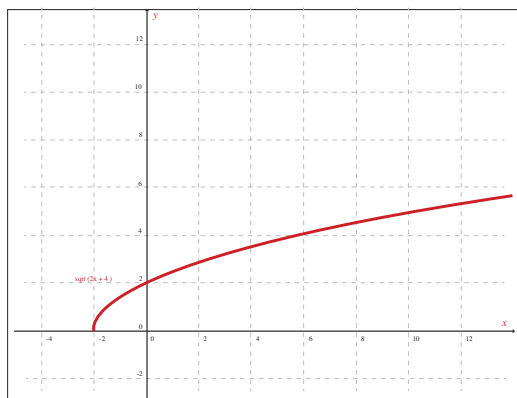
Dominio $x \neq 0$, Rango $y \neq 0$, (función racional)
Hipérbola equilátera

14. $y = 2 / (x+2)$



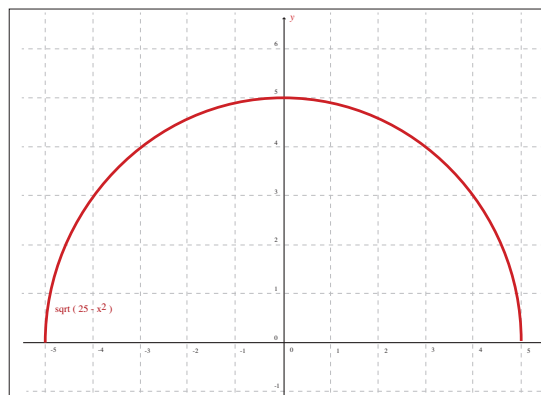
Dominio $x \neq -2$, Rango $y \neq 0$, (función racional)
Hipérbola

15. $y = \sqrt{2x+4}$



Dominio $[-2, \infty)$, Rango $[0, \infty)$, (función no racional)
Media parábola con eje horizontal

16. $y = \sqrt{25 - x^2}$



Dominio $[-5, 5]$, Rango $[0, 5]$, (función no racional)
Media Circunferencia

Referencias

Baldor, Aurelio (1994), *Álgebra*, Publicaciones Cultural. México.

Liga para problemas de aplicación con ecuaciones cuadráticas:

<http://www.math2me.com/playlist/algebra/problemas-que-generan-ecuaciones-cuadraticas>

<http://maematica.laguia2000.com/general/aplicaciones-matematicas>

<http://www.escolar.com/matem/02relac.htm>.

Directorio

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

Doctor en Ciencias Computacionales
José Raymundo Marcial Romero
Secretario de Docencia

Doctora en Ciencias Sociales
Patricia Zarza Delgado
Secretaria de Investigación y Estudios Avanzados

Doctor en Ciencias de la Educación
Marco Aurelio Cienfuegos Terrón
Secretario de Rectoría

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Lujá
Secretaria de Difusión Cultural

Doctor en Ciencias del Agua
Francisco Zepeda Mondragón
Secretario de Extensión y Vinculación

Doctor en Educación
Octavio Crisóforo Bernal Ramos
Secretario de Finanzas

Doctora en Ciencias Económico Administrativas
Eréndira Fierro Moreno
Secretaria de Administración

Doctora en Ciencias Administrativas
María Esther Aurora Contreras Lara Vega
Secretaria de Planeación y Desarrollo Institucional

Doctora en Derecho
Luz María Consuelo Jaimes Legorreta
Abogada General

Doctor en Ciencias Sociales
Luis Raúl Ortiz Ramírez
Secretario Técnico de la Rectoría

Licenciada en Comunicación
Ginarely Valencia Alcántara
Directora General de Comunicación Universitaria

Doctor en Ciencias Sociales
Luis Raúl Ortiz Ramírez
**Director de Centros Universitarios y Unidades Académicas Profesionales
Región A y Encargado del Despacho Región B**

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Estudios de Nivel Medio Superior

Planteles dependientes de la Escuela Preparatoria

Doctor en Tecnología e Innovación de la Educación
Arturo Mejía Zamora
Plantel “Lic. Adolfo López Mateos”

Maestro en Ciencias de la Educación
Erick Vieyra Méndez
Plantel “Nezahualcóyotl”

Maestro en Administración Pública y Gobierno
Raúl Juárez Toledo
Plantel “Cuauhtémoc”

Doctora en Ciencias de la Educación
María del Rocío García de León Pastrana
Plantel “Ignacio Ramírez Calzada”

Doctor en Ciencias de la Educación
Alejandro Morales Velázquez
Plantel “Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana”

Maestro en Educación con Orientación en Innovación y Tecnología Educativa
Sergio Luis Roldán Vásquez
Plantel “Texcoco”

Maestro en Docencia
Erick Rodolfo Sánchez Cortés
Plantel “Sor Juana Inés de la Cruz”

Química Farmacéutica Bióloga
Janette Jaimes García
Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel “Dr. Pablo González Casanova”

Doctora en Educación
María del Rosario Sotelo Hurtado
Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel “Isidro Fabela Alfaro”

Licenciada en Comunicación
Ana Vianey Suárez Castro
Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel “Mtro. José Ignacio Pichardo Pagaza”