Universidad Autónoma
del Estado de México



Cálculo diferencial

Libro de texto basado en competencias

Alejandro Alvarado Catzoli · Miriam Camacho Lara
Vasti Galicia Aldama · Gerardo Jiménez Esquivel
Julieta Luna Cárdenas · Alejandro Morales Velázquez

5° Semestre

Cálculo diferencial

Libro de texto basado en competencias

Dirección de Publicaciones Universitarias
Editorial de la Universidad Autónoma del Estado de México

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Luja
Secretaria de Difusión Cultural

Doctor en Administración
Jorge Eduardo Robles Alvarez
Director de Publicaciones Universitarias

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Estudios de Nivel Medio Superior

Cálculo Diferencial

QUINTO SEMESTRE

LIBRO DE TEXTO
BASADO EN COMPETENCIAS

Alejandro Alvarado Catzoli
Miriam Camacho Lara
Vasti Galicia Aldama
Gerardo Jiménez Esquivel
Julieta Luna Cárdenas
Alejandro Morales Velázquez

Primera edición, julio 2021
Primera reimpresión, julio 2023

CÁLCULO DIFERENCIAL
Libro de texto basado en competencias

Autores
Alejandro Alvarado Catzoli
Plantel “Isidro Fabela Alfaro”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Miriam Camacho Lara
Plantel “Cuauhtémoc”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Vasti Galicia Aldama
Plantel “Cuauhtémoc”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Gerardo Jiménez Esquivel
Plantel “Nezahualcóyotl”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Julieta Luna Cárdenas
Plantel “Isidro Fabela Alfaro”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Alejandro Morales Velázquez
Plantel “Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Universidad Autónoma del Estado de México
Av. Instituto Literario 100 Ote.
Toluca, Estado de México
C.P. 50000
Tel: (52) 722 277 38 35 y 36
http://www.uaemex.mx

El contenido de este material es responsabilidad de los autores, así como el tratamiento basado en competencias realizado a los libros de texto. Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra, sin el consentimiento previo y por escrito del editor. La Universidad Autónoma del Estado de México se deslinda de cualquier acción legal derivada de este material.

® Derechos reservados, 2017

ISBN: 978-607-633-321-1

Hecho en México

Responsable del Programa de Diseño y Producción Editorial: L. D. G. Miguel Angel Conzuelo Endeje
Corrección de estilo: Sandra Érika Carmona Esquivel
Interiores: L. D. G. Atziri Camacho Gutiérrez. Portada: freepik.es

Mensaje

A través de su historia, la Universidad Autónoma del Estado de México ha tenido como uno de sus objetivos fundamentales lograr que el estudiantado reciba una educación basada en el libre pensamiento, apelando a un sentido científico. La Escuela Preparatoria de la UAEM continuará mostrándose como un punto de inflexión para la comunidad estudiantil por la calidad de la educación que se ofrece al tiempo que se enseña a adquirir conocimientos, valores, habilidades y destrezas que favorezcan el entendimiento de nuestro entorno social y ambiental.

La responsabilidad de la Universidad Autónoma del Estado de México es asegurar que la educación que se imparte en la Escuela Preparatoria contribuya a ampliar el horizonte personal y profesional de los estudiantes. El enfoque para la apropiación del conocimiento parte de aprovechar la experiencia de vida y desde la autonomía de pensamiento y la reflexión lograr una comprensión más amplia de la realidad.

El material educativo que tienes en tus manos ha sido elaborado colegiadamente entre especialistas de cada una de las áreas del conocimiento. La creatividad, el pensamiento crítico y reflexivo, así como el espíritu científico del claustro de docencia e investigación se reúne en esta antología con el fin de que te acerques al conocimiento con una mirada crítica. Este ejemplar ha sido elaborado con el fin de establecer un aprendizaje dialógico que estimule tu curiosidad, que te sirva como guía, y que invariablemente te provoque pasión por el conocimiento.

El objetivo es lograr que recibas una educación integral e incluyente que incida de manera positiva en tu trayectoria escolar. Por ello es importante que asumas un compromiso personal, empeño y dedicación que te permita apropiarte del conocimiento.

Patria, Ciencia y Trabajo
Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

CONTENIDO

Presentación

Módulo 1 Límite de una función

Tema 1 Límite de una función 12
1.1. Definición 16

Tema 2 Límites laterales 16

Tema 3 Cálculo del límite de una función aplicando teoremas 19
3.1. Teoremas para calcular el límite de funciones algebraicas 19
3.2. Teoremas para calcular el límite de funciones trigonométricas 23

Tema 4 Límite de funciones en que la variable tiende a infinito 28

Módulo 2 Continuidad de una función

Tema 1 Continuidad de una función 46
1.1 Condición de continuidad en un punto 48
1.2 Tipos de discontinuidad 51

Tema 2 Continuidad en un intervalo 62

Módulo 3 Derivada de una función

Tema 1 Incremento de una función 74

Tema 2 Derivada de una función 78

Tema 3 Cálculo de la derivada de una función por teoremas 85
3.1. Derivación implícita 99

Tema 4 Ecuación de la recta tangente y normal a una curva 103

Tema 5 Función creciente y decreciente 108
5.1. Máximos y mínimos de una función 109
5.2. Criterio de la segunda derivada 110

Tema 6 Problemas de optimización 118

Módulo 4 Diferencial de una función

Tema 1 La diferencial de una función 136
1.1. Interpretación geométrica de la diferencial 137

Tema 2 Cálculo de la diferencial de una función por teoremas 140

Tema 3 Problemas de aplicación 147

Tema 4 La antiderivada de una función 150
4.1 La antiderivada como el principio de la integración de una función 151

Glosario
Referencias bibliográficas

PRESENTACIÓN

El propósito del presente libro de texto es proporcionar los conceptos más importantes que comprende un curso de cálculo diferencial, y que éstos contribuyan a mejorar el entendimiento de esta rama de las matemáticas. Se abordan aspectos, como el de derivadas y límites, entre muchos otros, con una visión que permita al alumno incorporar los saberes mediante la práctica constante. La finalidad es que el estudiante sea capaz de identificar, comprender y explicar su contexto para resolverlo con los conocimientos adquiridos y, así, estar en la condición de proponer y enfrentar nuevos problemas. Por ello, en el presente texto se promueve el aprender a aprender con secuencias de ejercicios en los que se van integrando los conocimientos previos hasta lograr la resolución de ejercicios en forma autónoma.

La importancia del cálculo diferencial radica en que es parte de la vida diaria, en cualquier momento el lector puede estar en una situación en la que esté presente; se aplica de muchas maneras en nuestra vida cotidiana, como al momento de querer vender algún producto reduciendo gastos o pérdida de material.

El cálculo diferencial es un método universal que se puede aplicar en física, química, biología, contabilidad, por mencionar algunas disciplinas. En cualquier proceso que pueda ser traducido a una función, ahí estará presente. Su aplicación más conocida es la determinación de máximos y mínimos de una función. También ayuda a proponer modelos de crecimiento poblacional, crecimiento de activos de empresas, comportamiento de partes mecánicas de un automóvil y muchas aplicaciones en ingeniería y física, como en la fabricación de chips, en la miniaturización de componentes internos, en la digitalización de imágenes, sonidos y videos. Y con todo ello ha contribuido al avance tecnológico.

El libro está integrado por cuatro módulos, los cuales se desprenden del Programa de Estudios de la Asignatura de Cálculo Diferencial del CBU 2015.

Módulo 1

Límite de una función



Imagen: https://www.google.com.mx/search?q=edifici+mas+grande+del+mundo



Módulo 1

Límite de una función

Competencias genéricas y atributos

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
   - 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
   - 1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
   - 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
   - 4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
   - 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
   - 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
   - 8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
   - 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
   - 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares básicas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimentalmente o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

1 Límite de una función

El Burj Khalifa es el edificio más alto del mundo y está ubicado en Dubái, tiene 828 metros de altura; supongamos que dejamos caer una pelota desde lo más alto y deseamos saber cuál es su velocidad después de 5 segundos.

Para resolverlo, debemos recordar los conceptos aprendidos en física sobre caída libre, despreciando la resistencia del aire.

Primero calculamos la altura con la expresión $y = \frac{1}{2}gt^2$, para un espacio de tiempo de 5 a 5.1 segundos:

$$y(5) = \frac{1}{2}(9.81)(5)^2 = 122.625$$
$$y(5.1) = \frac{1}{2}(9.81)(5.1)^2 = 127.579$$

Por lo tanto la velocidad promedio será:

$$v = \frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ transcurrido} = \frac{127.579 - 122.625}{5.1 - 5} = 49.54\ m/s$$

En la siguiente tabla se muestran los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio durante periodos sucesivos más pequeños:

Intervalo de tiempo(s)	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53.955
$5 \leq t \leq 5.1$	49.540
$5 \leq t \leq 5.05$	49.295
$5 \leq t \leq 5.01$	49.099
$5 \leq t \leq 5.001$	49.054

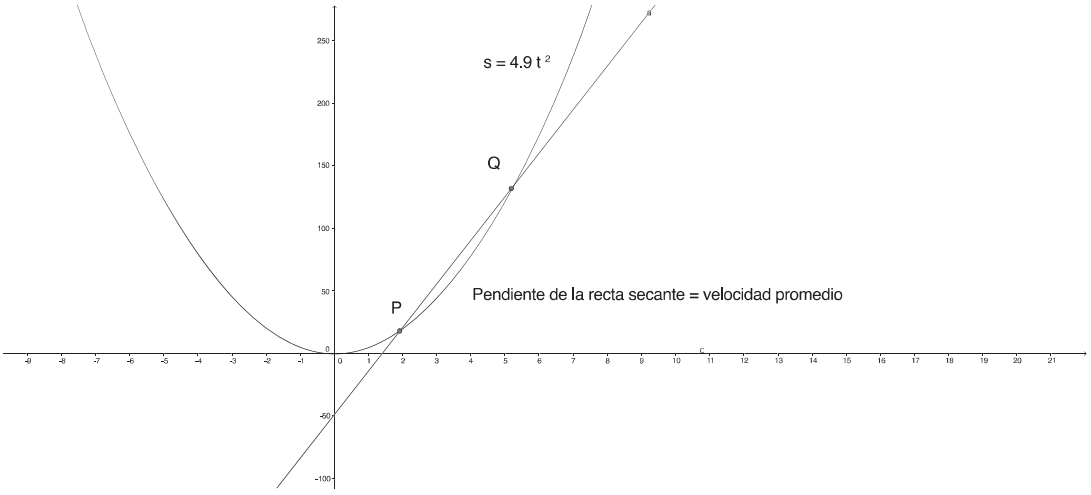
Ocurre que, conforme acortamos el periodo, la velocidad promedio se aproxima a 49 m/s. La velocidad instantánea, cuando $t = 5$, se define como el valor límite de estas velocidades promedio durante periodos cada vez más cortos que se inician en $t = 5$. Dicho de otra manera, cuando el tiempo tiende a 5 significa que cada vez nos acercamos más a 5 en intervalos muy pequeños; cuando esto pasa, la velocidad tiende a 49 o se acerca cada vez más a 49. Por lo tanto, la velocidad instantánea después de 5 segundos es de $v = 49\ m/s$.

Una representación matemática de esto es:

$$\lim_{t \to 5} v(t) = 49$$

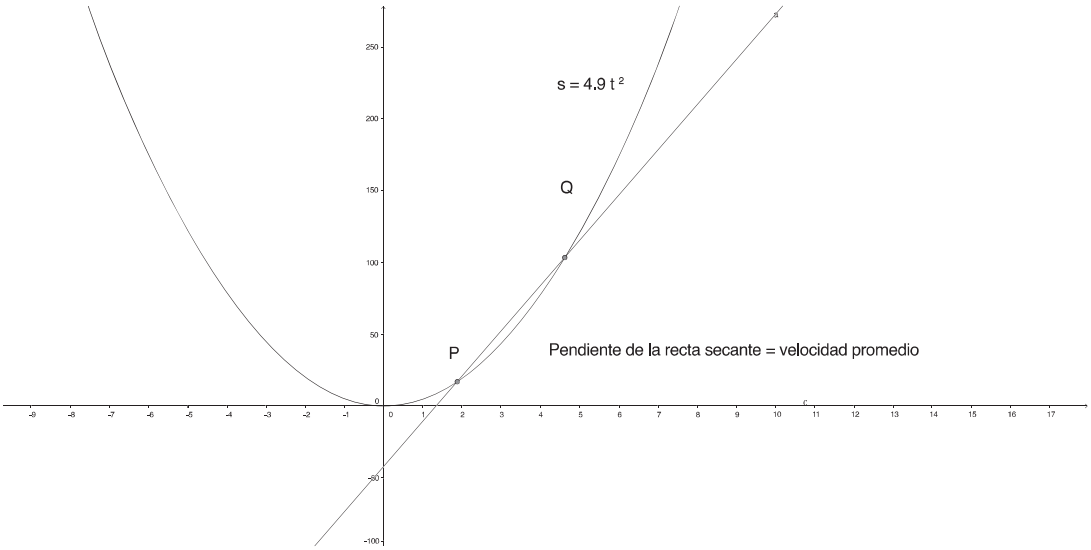
Se interpreta, el límite de la función velocidad, cuando t tiende a 5, es igual a 49.

El concepto de velocidades está muy relacionado con el concepto de tangentes; si trazamos la gráfica de posición contra tiempo, que es la gráfica de velocidades, podemos observar que entre más grande es la distancia entre el punto *P* y el punto *Q*, la recta es una secante y la pendiente de esta recta es el promedio de la velocidad:

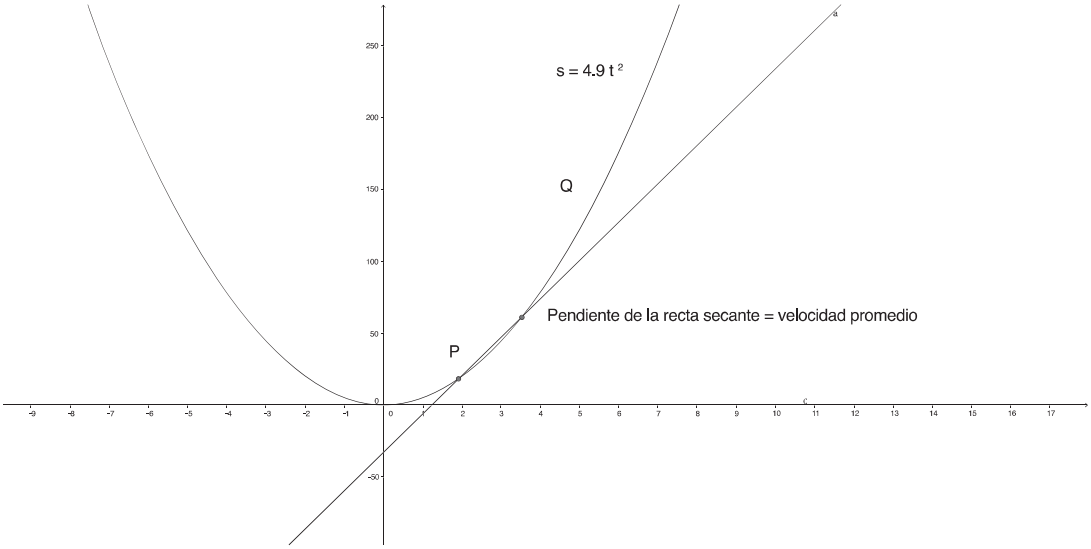


Gráfica de la función $s = \frac{1}{2}gt^2$ con una recta secante que pasa por los puntos *P* y *Q*.

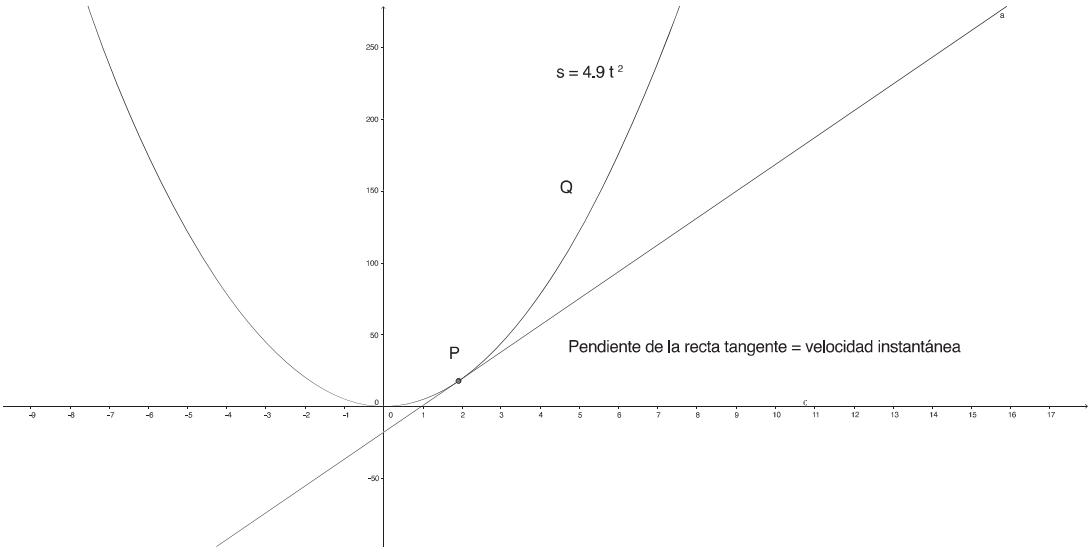
Disminuyendo la distancia entre el punto *P* y el punto *Q*, esto significa que *Q* tiende a *P*. En las gráficas *a* y *b* podemos observar que la recta se va convirtiendo de una secante a una recta tangente, como se observa en la gráfica *c*:



a) Gráfica del punto *Q* cuando tiende a *P*.



b) Gráfica del punto *Q* cuando tiende a *P*, disminuyendo la distancia.



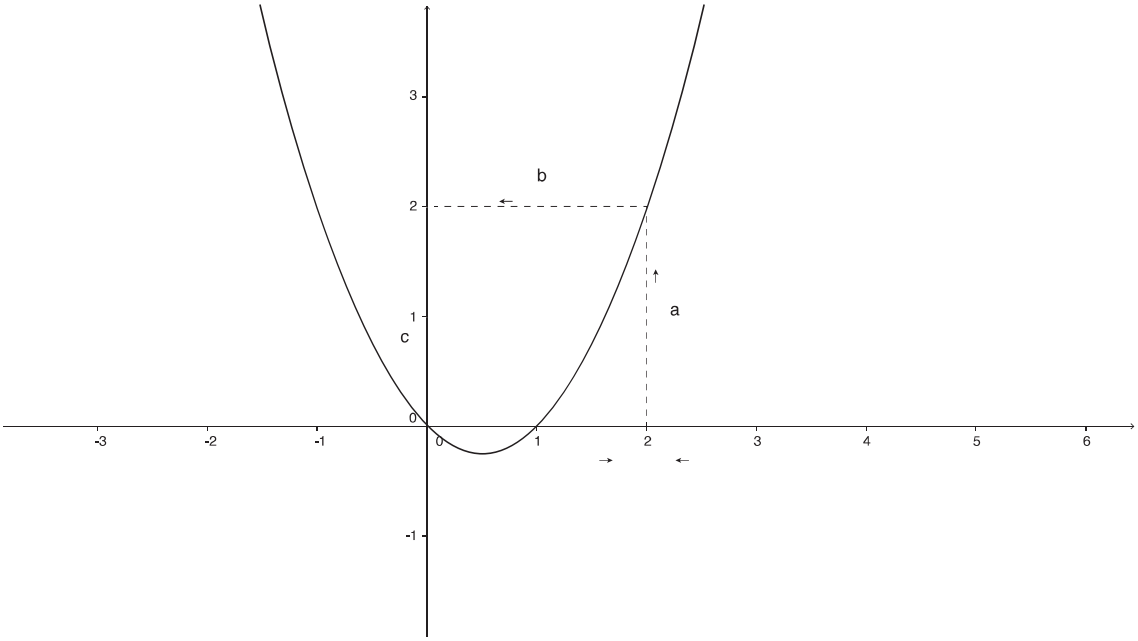
c) Gráfica de la recta tangente en el punto *P*.

Esto nos indica que el límite de estas velocidades conforme se utilice un incremento muy pequeño o que tiende a 0 debe ser igual a la pendiente de la recta tangente en el punto *P*: el límite de las pendientes de las rectas secantes.

Ejemplo

Analizar el comportamiento de la función $f(x) = x^2 - x$ para valores cercanos a 2.

Solución:



En la siguiente tabla se proponen valores cercanos a 2 por la izquierda.

x	$f(x)$
1.0	0
1.5	0.75
1.9	1.71
1.99	1.9701
1.999	1.997

Se observa que cuando se aproxima a 2 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a 2.

En la siguiente tabla se proponen valores cercanos a 2 por la derecha.

x	$f(x)$
3.0	6
2.5	3.75
2.1	2.31
2.01	2.03
2.001	2.003

Se observa que cuando x se aproxima a 2 por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 2.

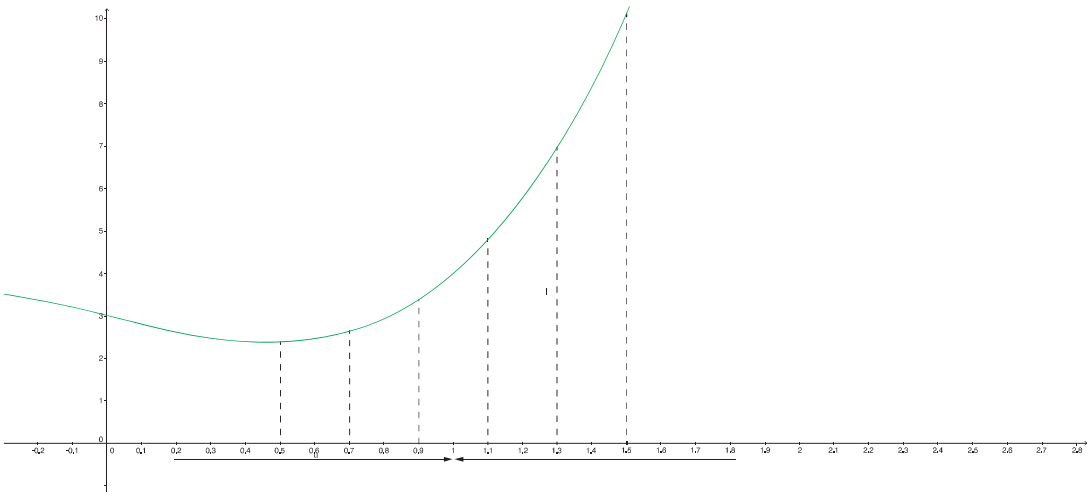
1.1. Definición

De lo anterior podemos definir el límite de una función real $f(x)$ de la siguiente manera:

"El límite de una función $f(x)$, cuando x tiende a un número real a $(x \to a)$, es igual, es igual a un número real L". Esto se denota como: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

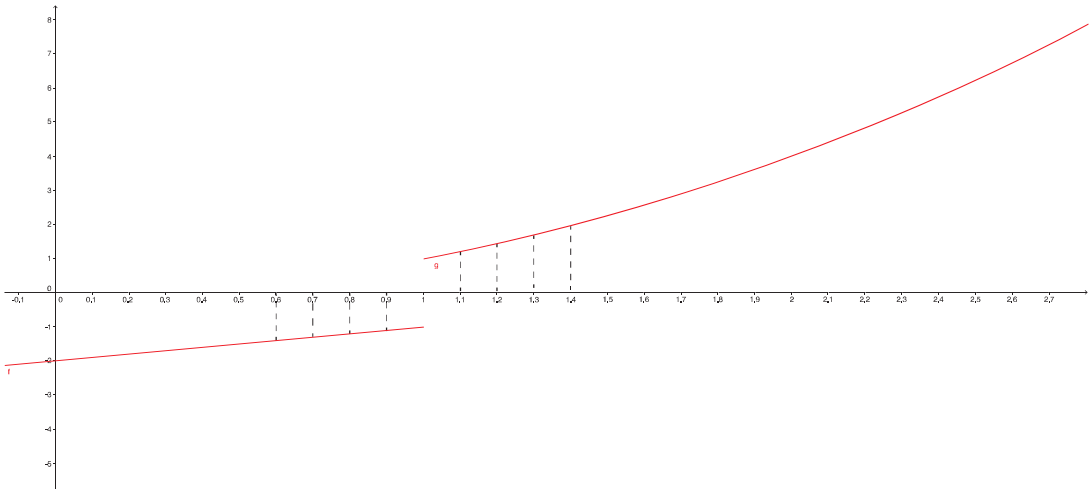
2. Límites laterales

En las siguientes gráficas podemos observar el límite cuando la variable x tiende a 1, y nos acercamos proponiendo valores por la izquierda y valores por la derecha.



En la gráfica observamos que si nos acercamos a 1 por la izquierda, el límite de la función se acerca a 4. De la misma manera, si nos acercamos a 1 por la derecha el límite de la función se acerca a 4, por lo que el límite de la función es 4.

Analicemos la siguiente gráfica:



En la gráfica observamos que si nos acercamos a 1 por la izquierda en el eje x, las imágenes de la función se acerca a -1; de la misma manera, si nos acercamos a 1 por la derecha en el eje x, las imágenes se acercan a 1. Las imágenes son diferentes por lo que el límite no existe.

De lo anterior se puede definir los *límites laterales* como:

El límite de una función f, cuando x se aproxima por la derecha a un número real a es igual $a\ L_1$. Esto se denota como: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$

El límite de una función f, cuando x se aproxima por la izquierda a un número real a es igual $a\ L_2$. Esto se denota como: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$

Observación: si el resultado del límite por la derecha es igual al límite por la izquierda, entonces el límite existe. Esto es:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x \to a^+} f(x) = L \ y \ \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

En caso de que los límites laterales de la función no sean iguales, se dice que el límite no existe.

Ejemplo

Calcular el límite para la siguiente función:

$$\lim_{x \to -1} h(x)\ ; \qquad h(x) = \begin{cases} 2x + 5 \ para \ x \leq -1 \\ 3 \quad para \ x > -1 \end{cases}$$

Solución:

Para resolverlo se usa el concepto de límites laterales y proponemos valores cercanos a -1 por la izquierda, utilizando la función $2x + 5$ para $x \leq -1$, y proponemos valores por la derecha cercanos a -1 utilizando la función constante 3 para $x > -1$.

Tabulando para calcular los límites:

Por la izquierda $\lim_{x \to -1^-} 2x + 5$

x	$f(x) = 2x + 5$
-1.5	2(-1.5) + 5 = 2
-1.1	2(-1.1) + 5 = 2.8
-1.01	2(-1.01) + 5 = 2.98
-1.001	2(-1.001) + 5 = 2.998

Observamos que cuando más nos acercamos a -1, el valor de la función se acerca a 3. Es decir:

$$\lim_{x \to -1^-} 2x + 5 = 3$$

Por la derecha: $\lim_{x \to -1^+} 3$

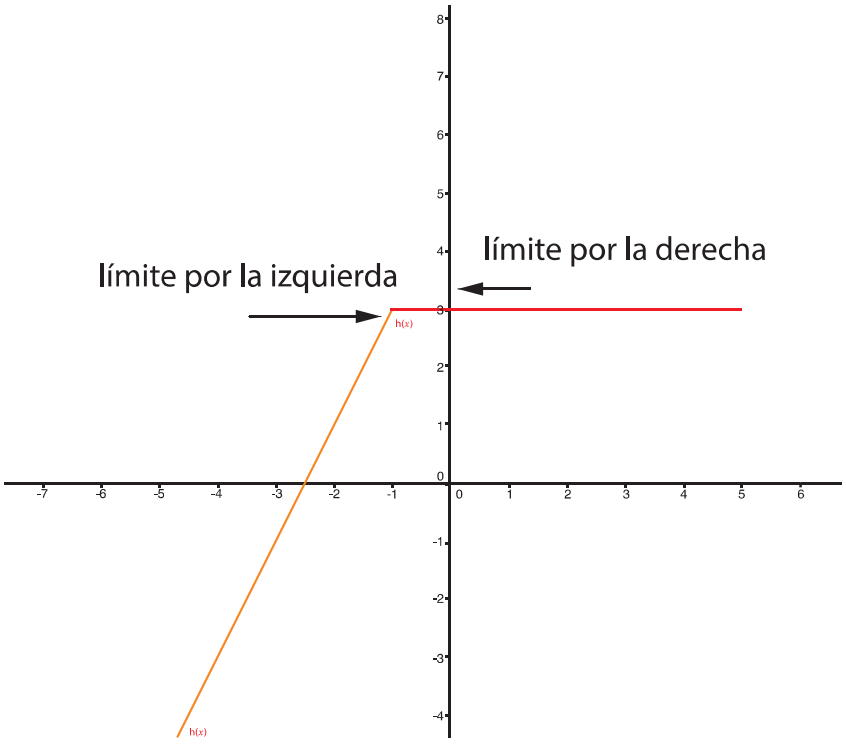
x	3
-0.5	3
-0.9	3
-0.99	3
-0.999	3

Observamos que el valor de $f(x)$ siempre es 3. Es decir:

$$\lim_{x \to -1^+} 3 = 3$$

Como los límites por la izquierda y por la derecha son iguales, entonces el límite es 3.

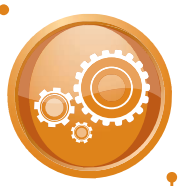
Esto gráficamente es:



Ejercicio

Calcular el límite de la siguiente función cuando $x \to 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{para } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$$



3. Cálculo del límite de una función aplicando teoremas

3.1. Teoremas para calcular el límite de funciones algebraicas

Para poder calcular los límites, como hemos visto antes, se pueden obtener gráficamente o bien utilizando procedimientos algebraicos y trigonométricos, mediante el uso de los siguientes teoremas:

Sea $c \in \mathbb{R}$ y además los límites de $f(x)$ y $g(x)$ de las funciones existen, entonces:

1. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)\,g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.
6. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$ con n entero positivo
7. $\lim\limits_{x \to a} c = c$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite mediante el uso de los teoremas:

$\lim_{x \to 2}(2x^2 - 3x + 2)$

Solución:

Utilizando teoremas de límites:

$$\lim_{x \to 2}(2x^2 - 3x + 2) = \lim_{x \to 2} 2x^2 - \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} 2$$

$$= 2 \lim_{x \to 2} x^2 - 3 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 2$$

$$2(2)^2 - 3(2) + 2 = 8 - 6 + 2 = 4$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 2}(2x^2 - 3x + 2) = 4$$



Ejercicio

Calcular el siguiente límite:

$\lim_{x \to 2}(3x^2 - 2x + 1)$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}; x-2\neq 0$$

Solución:

Al sustituir el valor de 2 en la variable x, nos queda 0 sobre 0 (a esto se le conoce como *forma indeterminada*).

Por lo que factorizamos el numerador:

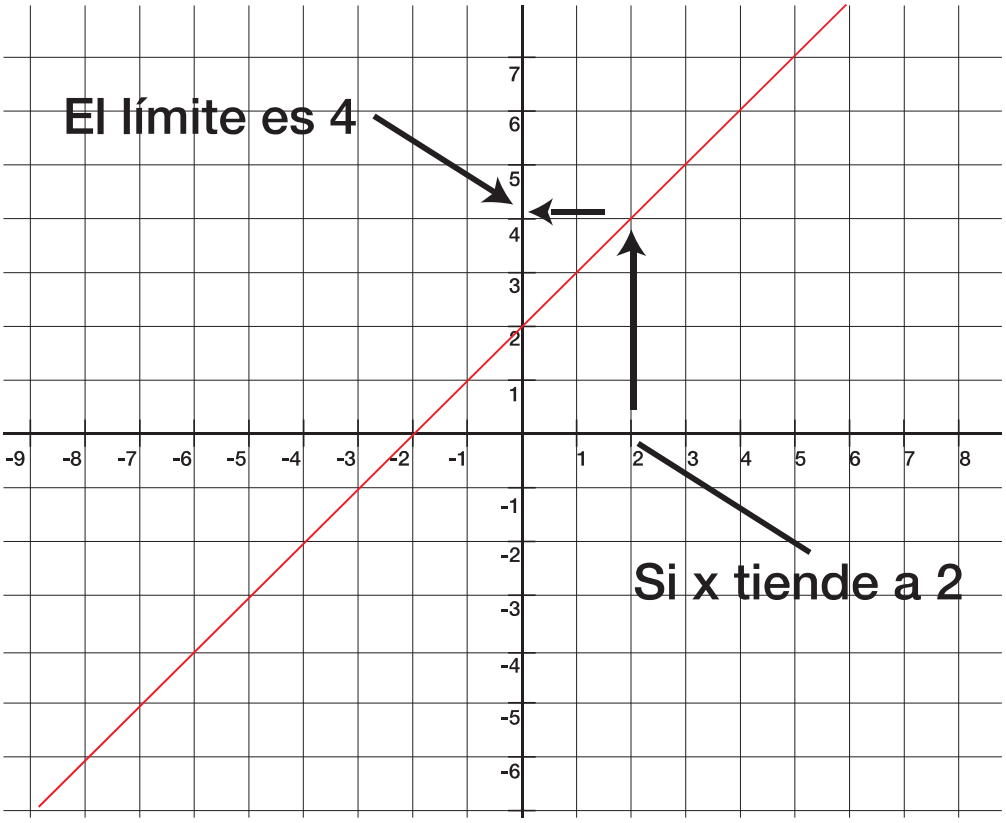
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

Simplificando $\lim_{x\to 2}(x+2)$

Finalmente sustituimos el valor de la variable:

$$\lim_{x\to 2}(2+2)=4$$

Veamos esto gráficamente:



Ejercicio

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{\sqrt{3x}-\sqrt{6}}$$

Solución:

Primero racionalizamos el denominador multiplicando por su conjugado, (únicamente se cambia el signo intermedio)

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{\sqrt{3x}-\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{6}}{\sqrt{3x}+\sqrt{6}}\right)$$

En el denominador tenemos una diferencia de cuadrados $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Simplificando:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(3x-6)(\sqrt{3x}+\sqrt{6})}{(\sqrt{3x})^2-(\sqrt{6})^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-6)(\sqrt{3x}+\sqrt{6})}{3x-6}$$

Simplificando numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3x}+\sqrt{6}$$

Sustituyendo el valor de la variable:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3(2)}+\sqrt{6}=2\sqrt{6}$$

Ejercicio

Calcular el siguiente límite:

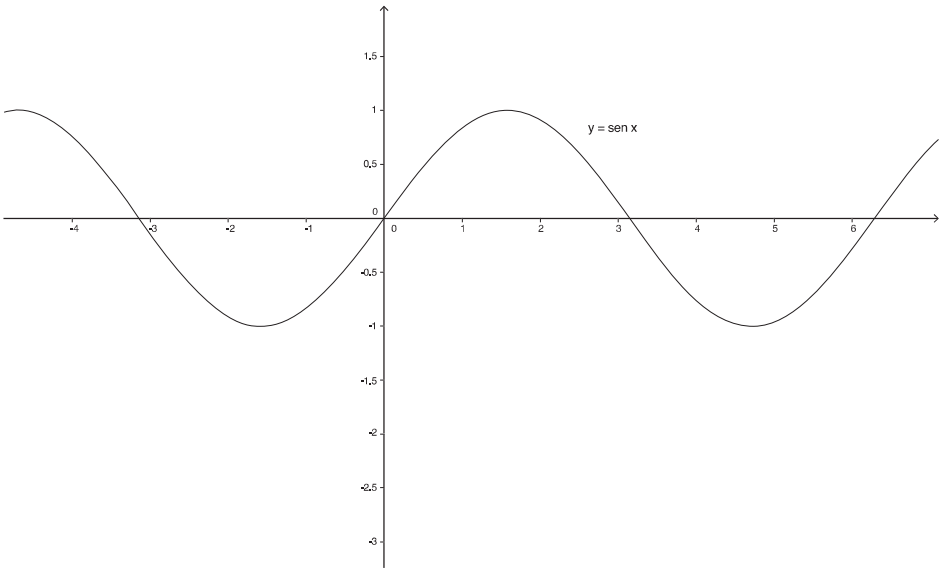
$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

3.2. Teoremas para calcular el límite de las funciones trigonométricas

Para calcular el límite de una función trigonométrica se utilizan algunos teoremas e identidades trigonométricas para su simplificación correspondiente.

A continuación analizamos algunos de ellos y después se generalizan.

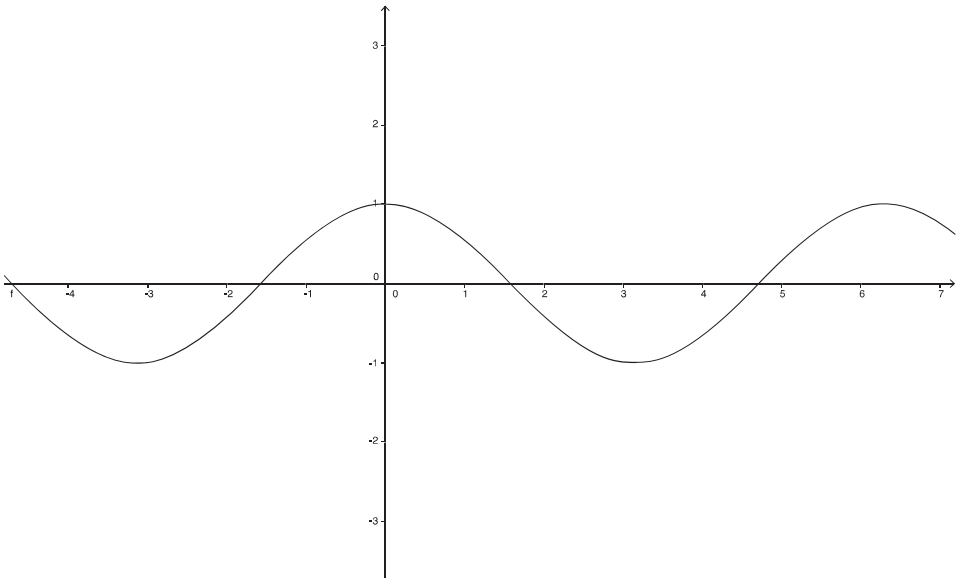
Por ejemplo, si tenemos la gráfica de la función seno.



Si observamos el límite cuando x tiende a 0, el límite de la función también vale 0; esto es:

$$\lim_{x \to 0} sen\ x = 0$$

De la misma manera, si observamos el comportamiento de la función coseno:



Si observamos el límite cuando x a tiende a 0, el límite de la función tiende a 1; esto es:

$$\lim_{x \to 0} cos\, x = 1$$

Ahora evaluemos el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x}$$

Para evaluar este límite calculamos los límites laterales de la siguiente manera:

x	$\frac{sen\, x}{x}$	x	$\frac{sen\, x}{x}$
- π / 2 = -1.57	0.6369	1.57	0.6369
- π / 4 = -0.7854	0.9003	0.7854	0.9003
- π / 8 = -0.3927	0.9744	0.3927	0.9744
- π / 16 = -0.1963	0.9935	0.1963	0.9935
- π / 32 = -0.0981	0.9983	0.0981	0.9983

Como podemos observar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

De estos resultados podemos establecer los siguientes teoremas:

1. $\lim_{u\to 0} \cos u = 1$
2. $\lim_{u\to 0} \frac{sen\ u}{u} = 1$
3. $\lim_{u\to 0} \frac{u}{sen\ u} = 1$
4. $\lim_{u\to 0} \frac{u}{\tan u} = 1$
5. $\lim_{u\to 0} \frac{\tan u}{u} = 1$

Recordando algunas identidades trigonométricas.

$$Csc\ A \equiv \frac{1}{Sen\ A}$$

$$Sec\ A \equiv \frac{1}{Cos\ A}$$

$$Tan\ A \equiv \frac{Sen\ A}{Cos\ A}$$

$$Cot\ A \equiv \frac{Cos\ A}{Sen\ A}$$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 3} \frac{3sen^2(x-3)}{x^2-6x+9}$$

Solución:

Descomponiendo el sen^2 en dos factores y factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 3} \frac{3sen^2(x-3)}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to 3} \frac{3sen(x-3)sen(x-3)}{(x-3)(x-3)}$$

Utilizando el teorema de $\frac{sen\ u}{u} = 1$ en el que $u = x - 3$

$$\lim_{x\to 3} \frac{3sen^2(x-3)}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to 3} \frac{3sen(x-3)sen(x-3)}{(x-3)(x-3)}$$

$$= 3(1)(1) = 3$$

Ejercicio

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{7sen^2(x-2)}$$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2+6x-4}{tan(2x-1)}$$

Solución:

Factorizando el numerador:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2+6x-4}{tan(2x-1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2x+4)}{tan(2x-1)}$$

Utilizando el teorema de $\frac{u}{\tan u}=1$ en el que $u=2x-1$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x+4$$

Sustituyendo el valor de la variable:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x+4=2\left(\frac{1}{2}\right)+4=5$$

Ejercicio

Calcular el siguiente límite:



$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)\tan(x-1)}{2x-2}$$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{(8x+4)\sec(2x+1)}{4x^2-1}$$

Solución:

Factorizando numerador y denominador y $\sec(2x+1)=\dfrac{1}{\cos(2x+1)}$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4(2x+1)\dfrac{1}{\cos(2x+1)}}{(2x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{\dfrac{4(2x+1)}{\cos(2x+1)}}{\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{1}}$$

Multiplicando extremos por extremos, medios por medios:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)\cos(2x+1)}$$

Simplificando términos:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4}{(2x-1)\cos(2x+1)}$$

Sustituyendo el valor de la variable y recordando que *cos* (0) = 1

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4}{(2x-1)\cos(2x+1)}=\frac{4}{\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)\cos\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)}$$

$$=\frac{4}{-2(1)}=-2$$

M 1 Basado en Competencias

Ejercicio

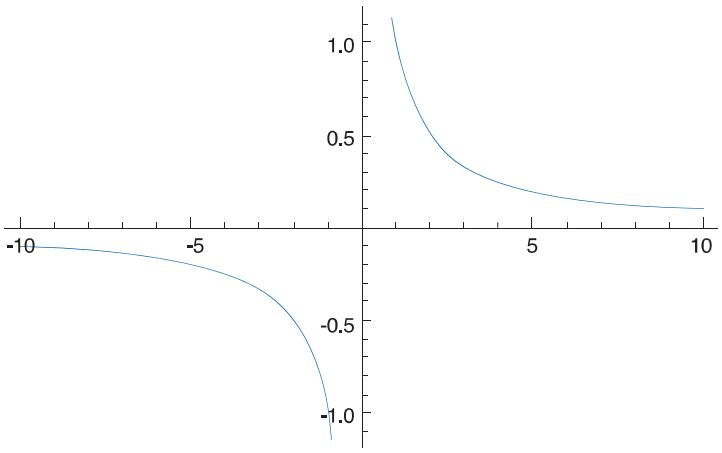
Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{(x + 2)sec(x + 2)}$$

4. Límites de funciones en que la variable tiende a infinito

Explicación intuitiva

Si graficamos la función $f(x) = \frac{1}{x}$, se tiene la siguiente imagen:



Observemos que la gráfica (la curva derecha de la figura anterior) va descendiendo conforme el valor de la x crece. Analicemos la tabla de la derecha, para que comprendamos su comportamiento más a fondo. Sólo se presentará la tabla con números positivos para x.

Analizando la tabla, notamos que conforme va creciendo el valor de la variable x, el valor de $\frac{1}{x}$ se hace cada vez más pequeño. Por ello, el límite de $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a ∞ es 0 y se denota como:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ahora si hacemos que el denominador se haga más grande elevándolo a cierta potencia entera positiva, tendríamos $\frac{1}{x^n}$ y nos acercaríamos más rápido al 0. Analicemos la siguiente tabla cuando $n = 2$.

Para $n = 2$, tendríamos: $\frac{1}{x^2}$

Observando los resultados de la tabla, se concluye que el límite de $\frac{1}{x^2}$ cuando $x \to \infty$ resulta 0, es decir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

El siguiente teorema nos ayudará a generalizar el análisis anterior:

> Teorema
>
> $$\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^n} = 0, \quad \text{para } k \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
1	$f(1) = \frac{1}{1} = 1$
2	$f(2) = \frac{1}{2} = 0.5$
3	$f(3) = \frac{1}{3} = 0.33$
4	$f(4) = \frac{1}{4} = 0.25$
5	$f(5) = \frac{1}{5} = 0.2$
6	$f(6) = \frac{1}{6} = 0.16$
7	$f(7) = \frac{1}{7} = 0.14$
8	$f(8) = \frac{1}{8} = 0.12$
9	$f(9) = \frac{1}{9} = 0.11$
10	$f(10) = \frac{1}{10} = 0.1$
100	$f(100) = \frac{1}{100} = 0.01$
1000	$f(1000) = \frac{1}{1000} = 0.001$

x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
1	$f(1) = \frac{1}{1^2} = 1$
2	$f(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$
3	$f(3) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0.11$
4	$f(4) = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0.06$
5	$f(5) = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0.04$
6	$f(6) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} = 0.02$
7	$f(7) = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49} = 0.02$
8	$f(8) = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64} = 0.01$
9	$f(9) = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81} = 0.01$
10	$f(10) = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$
100	$f(100) = \frac{1}{100^2} = \frac{1}{10000} = 0.0001$
1000	$f(1000) = \frac{1}{1000^2} = \frac{1}{1000000} = 0.000001$

Los siguientes ejemplos muestran cómo se aplica el teorema anterior:

$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^3} = 0$ donde $k = 2, \quad n = 3$

$\lim_{x\to\infty} \frac{-5}{x^4} = 0$ donde $k = -5, \quad n = 4$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{7}}{x^5} = 0$ donde $k = \frac{3}{7}, \quad n = 5$

$\lim_{x\to\infty} \frac{0.5}{x^6} = 0$ donde $k = 0.5, \quad n = 6$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{x^2} = 0$ donde $k = \pi, \quad n = 2$

El siguiente recuadro ayudará a calcular límites de funciones cuando $x \to \infty$.

Sea c un número real

a) $\infty + \infty = \infty, c + \infty = \infty, c - \infty = -\infty$

b) Si $c > 0$ entonces $c \cdot \infty = \infty, \frac{\infty}{c} = \infty, c \cdot (-\infty) = -\infty, \frac{-\infty}{c} = -\infty$

c) Si $c < 0$ entonces $c \cdot \infty = -\infty, \frac{\infty}{c} = -\infty, c \cdot (-\infty) = \infty, \frac{-\infty}{c} = \infty$

d) $\frac{c}{\infty} = 0$

e) $\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, INDETERMINACIONES$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$\lim_{x\to\infty} 7x + 5$

Solución:

$\lim_{x\to\infty} 7x + 5 = 7(\infty) + 5 = \infty + 5 = \infty$



Ejercicio

Calcular el siguiente límite:

$\lim_{x\to\infty} x^2 - 12$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$\lim_{x\to\infty}(x^5+1)(x^3-8)$

Solución:

$\lim_{x\to\infty}(x^5+1)(x^3-8) = (\infty^5+1)(\infty^3-8) = (\infty)(\infty) = \infty$

Ejercicio



Calcular el siguiente límite:

$\lim_{x\to\infty}(x^4+3)(x^5-7)$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$\lim_{x\to\infty}\frac{7}{(x-3)^4}$

Solución:

$\lim_{x\to\infty}\frac{7}{4} = \frac{7}{(\infty-3)^4} = \frac{7}{\infty^4} = \frac{7}{\infty} = 0$

Ejercicio

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-4}{(2x-1)^3}$$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{9-x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{9-x} = \sqrt{9-(-\infty)} = \sqrt{9+\infty} = \sqrt{\infty} = \infty$$

Ejercicio

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{4-2x}$$

El siguiente teorema nos ayudará a calcular límites de funciones racionales cuando $x \to \infty$.

Teorema

Si $f(x)$ es una función racional y $a_n x^n$ y $a_m x^m$ son monomios en el numerador y denominador, respectivamente, con las mayores potencias en x; entonces:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{a_m x^m}$$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 10}{6x - 8}$$

Solución:

Observando el numerador y denominador de la función racional $\frac{2x^3+10}{6x-8}$ y según el teorema anterior, tendríamos lo siguiente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 10}{6x - 8} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{6x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{6} = \frac{2(\infty)^2}{6} = \frac{\infty}{6} = \infty$$

Ejercicio



Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 + 10}{3x + 15} =$$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

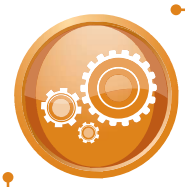
$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+10}{3x^5+15}$$

Solución:

Observando el numerador y denominador de la función racional $\frac{5x^3+10}{3x^5+15}$ y según el teorema anterior, tendríamos lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+10}{3x^5+15}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{3x^5}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{3x^2}=\frac{5}{3(\infty)^2}=\frac{5}{3(\infty)}=\frac{5}{\infty}=0$$



Ejercicio

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+12}{2x^2-1}$$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$$

Solución:

Este es un caso de indeterminación $\infty - \infty$. Para evitar la indeterminación multiplicaremos por el conjugado, con la finalidad de llevar la expresión a una en la que se puedan emplear las propiedades del límite.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+3-x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} =$$

$$\frac{3}{\sqrt{\infty+3} + \sqrt{\infty}} = \frac{3}{\sqrt{\infty} + \sqrt{\infty}}$$

$$\frac{3}{\infty+\infty} = \frac{3}{\infty} = 0$$

Problema

Si el costo total de un producto está dado por la función $c = 300x + 6$, en la cual x representa el número de unidades producidas y c el costo que genera producirlas, ¿cuál es el valor límite del costo promedio?

Solución:

$$Costo\ promedio\ (C_p) = \frac{costo\ total}{cantidad}$$

$$C_p = \frac{c}{x} = \frac{300x+6}{x} = \frac{300x}{x} + \frac{6}{x} = 300 + \frac{6}{x}$$

$$C_p = 300 + \frac{6}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} C_p = \lim_{x\to\infty} 300 + \frac{6}{x} = \lim_{x\to\infty} 300 + \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x} = 300 + 0 = 300$$

Problema

Para una relación huésped-parásito se determinó que cuando la densidad del huésped (número por unidad de área) es x, el número de huéspedes parasitados en un periodo de tiempo es:

$$y = \frac{900x}{10 + 50x}$$

Si la densidad de los huéspedes estuviera creciendo indefinidamente, ¿cuántos parásitos habría?

Solución:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{900x}{10 + 50x} = \lim_{x \to \infty} \frac{900x}{50x} = \lim_{x \to \infty} \frac{900}{50} = \frac{900}{50} = \frac{90}{5} = 18$$

Ejercicios adicionales



I. Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{9^2-5^2}{x}$

2. $\lim_{x\to -1} g(x);\ donde\ g(x)=\begin{cases}5-2x & para\ x<-1\\ 2x & para\ x\geq -1\end{cases}$

3. $\lim_{x\to 0} h(x);\ donde\ h(x)=\begin{cases}x^2 & para\ x<0\\ 0.5x^2 & para\ x\geq 0\end{cases}$

4. $\lim_{x\to 8} \frac{x^2-64}{x-8}$

5. $\lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{3-x}$

6. $\lim_{x\to -1} \frac{3x^2-9x-12}{3x+3}$

7. $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{1-x-2x^2}{1-2x}$

8. $\lim_{x\to -7} \frac{x^2-49}{x+7}$

9. $\lim_{x\to -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$

10. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x-18}{x-3}$

11. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2+3x}{x+3}$

12. $\lim_{x\to -5} \frac{2x^2+7x-15}{x+5}$

13. $\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{4x+1}}{x^2-2x}$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

15. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{7sen^2(x-2)}$

16. $\lim_{x\to -3} \frac{(x+3)^2\cos(x+3)}{x^2+6x+9}$

17. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(7x-14)\cos(x-2)}$

18. $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2+6x-4}{\tan(2x-1)}$

II. Calcular los siguientes límites cuando x tiende a infinito

1. $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^3-2x^2+4x+2}{2x^3-1}$

2. $\lim_{x\to \infty} \frac{2-3x^4}{4-6x^7}$

3. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^5+5x^4+7x}{3x^2+6x-1}$

4. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^4+2x^3+4}{8x^4-7x}$

5. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x-6x^5}{7x^3-8x^5}$

6. $\lim_{x\to \infty} \frac{6x-1}{x+10}$

7. $\lim_{x\to \infty} \frac{5-5x}{x+5}$

8. $\lim_{x\to \infty} \frac{(x+2)(2x+2)}{x^2+2}$

9. $\lim_{x\to \infty} \frac{10x^2+12x-13}{20x^2+2x+10}$

10. $\lim_{x\to \infty} \frac{90x^3-40x}{20-30x^3}$

11. $\lim_{x\to \infty} \frac{4x+12}{\sqrt{x^2-10}}$

12. $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{9x^2+1}-3x)$

Problemas de aplicación

1. La cantidad de una droga en la corriente sanguínea t horas después de inyectada intramuscularmente está dada por la función $f(t) = \frac{10t}{t^2+1}$. Al pasar el tiempo, ¿cuál es la cantidad límite de droga en la sangre?

2. En un experimento biológico, la población de una colonia de bacterias (en millones) después de x días está dada por:

$$y = \frac{4}{2 + 8e^{-2x}}$$

a) ¿Cuál es la población inicial de la colonia?
b) Calculando el siguiente límite

$$\lim_{x \to +\infty} y$$

se obtiene información acerca de si la población crece indefinidamente o tiende a estabilizarse en algún valor fijo. Determine cuál de estas situaciones ocurre.

3. La federación de caza de cierto estado introduce 50 ciervos en una región. Se cree que el número de ciervos crecerá siguiendo el modelo:

$$N(t) = \frac{10(5 + 3t)}{1 + 0.04t}$$

en el cual t es el tiempo en años.

a) Calcule el número de animales que habrá luego de 5 y 10 años.
b) ¿A qué valor tenderá la población cuando t tiende a infinito?

4. Un cultivo de bacterias crece siguiendo la ley

$$y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4t}}$$

donde el tiempo $t \geq 0$ se mide en horas y el peso del cultivo en gramos.

a) Determine el peso del cultivo transcurridos 60 minutos.
b) ¿Cuál será el peso de éste cuando el número de horas crece indefinidamente?

5. En una academia de mecanografía el número medio de palabras N por minuto escritas luego de t semanas de lecciones prácticas está dado por:

$$N(t) = \frac{157}{1 + 5.4e^{-0.12t}}$$



a) Calcule el número medio de palabras por minuto que puede escribir una persona luego de haber recibido lecciones durante 10 semanas.
b) Determine el número medio de palabras por minuto que pueden escribirse cuando la cantidad de semanas crece indefinidamente.

6. Los ingenieros industriales han estudiado un trabajo particular en una línea de montaje. La función

$$y = f(t) = 120 - 80e^{-0.3t}$$

es la función de la curva de aprendizaje que describe el número de unidades terminadas por hora para un empleado normal de acuerdo con el número de horas de experiencia t que él tiene en su trabajo.

a) Determine el número de unidades que puede terminar un empleado en el momento que ingresa a esa empresa y luego de su primera hora de experiencia.
b) ¿Cuántas unidades puede terminar un empleado cuando el número de horas de experiencia en la fábrica crece indefinidamente?

7. Una institución está planeando una campaña para recaudar fondos. Por experiencia se sabe que los aportes totales son función de la duración de la campaña. En una ciudad se ha determinado esta función respuesta que expresa el porcentaje de la población R (expresado en fracción decimal) que hará un donativo en función del número de días de la campaña. La expresión de la misma es

$$R = 0.7(1 - e^{-0.05t})$$

a) ¿Qué porcentaje de la población hará un donativo a los 10 días de haberse iniciado la campaña y luego de 20 días?
b) Calcule el porcentaje de la población que habrá contribuido con la institución si la campaña publicitaria continúa por tiempo indefinido.

8. Un banco ofrece una tarjeta de crédito. Por datos obtenidos a lo largo del tiempo, han determinado que el porcentaje de cobranza de las que se otorgan en un mes cualquiera es función del tiempo transcurrido después de concederlas. Esta función es

$$P = f(t) = 0.9(1 - 3^{-0.08t})$$

en la cual P es el porcentaje de cuentas por cobrar t meses después de otorgar la tarjeta.

a) ¿Qué porcentaje se espera cobrar luego de 2 y 5 meses?
b) Si el número de meses transcurridos desde el otorgamiento de la tarjeta crece indefinidamente, determine el porcentaje de las mismas que se espera cobrar.

9. El tejido vivo sólo puede ser excitado por una corriente eléctrica si ésta alcanza o excede un cierto valor que se designa con v. Este valor v depende de la duración t de la corriente. La ley de Weiss establece que

$$v = \frac{a}{t} + b$$

en el cual a y b son constantes positivas. Analice el comportamiento de v cuando:

a) t se aproxima a 0.
b) t tiende a infinito.

Respuestas

I.

1) ∄
2) ∄
3) 0
4) 16
5) 6
6) -5
7) ½
8) -14
9) -7
10) 9
11) -3
12) -13
13) -1/3
14) ¼
15) 1/7
16) 1
17) 1/7
18) 5

II.

1) 2
2) 0
3) ∞
4) ¼
5) ¾
6) 6
7) -5
8) 2
9) ½
10) -3
11) 4
12) 0

Problemas de aplicación*

1) 0
2) a) 0.4 millones = 400 000 bacterias
b) se estabiliza en 2 millones de bacterias
3) a) N(5) = 166 ciervos; N(10) = 250 ciervos
b) 750 ciervos
4) a) 1.07 g
b) 1.25 gramos
5) a) Aproximadamente 60 palabras/min
b) 157 palabras/min
6) a) 40 unidades, 60 unidades
b) 120 unidades
7) a) 27.54%; 44.25%
b) 70%
8) a) 14.51%; 32%
b) 90%
9) a) ∞
b) b

*http://www.fca.unl.edu.ar/Limite/Problemas%20Aplicaci%F3n%20cap2%20L%EDmite.htm



imagen: https://cdn.line.do/uploads/55e7a203b31471807316b3ef_1441244031766_2048.jpg

Módulo 2

Continuidad de una función



Imagen: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=11594&directory=67



Módulo 2

Continuidad de una función

Competencias genéricas y atributos

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
   - 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
   - 1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
   - 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
   - 4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
   - 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
   - 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
   - 8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
   - 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
   - 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo

Competencias disciplinares básicas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimentalmente o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

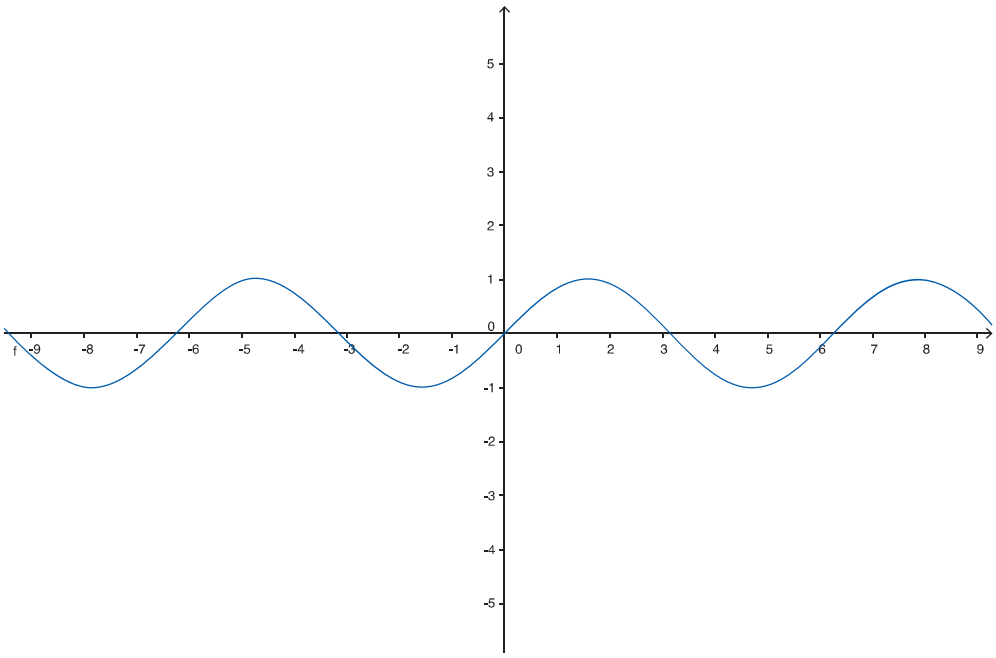
Introducción

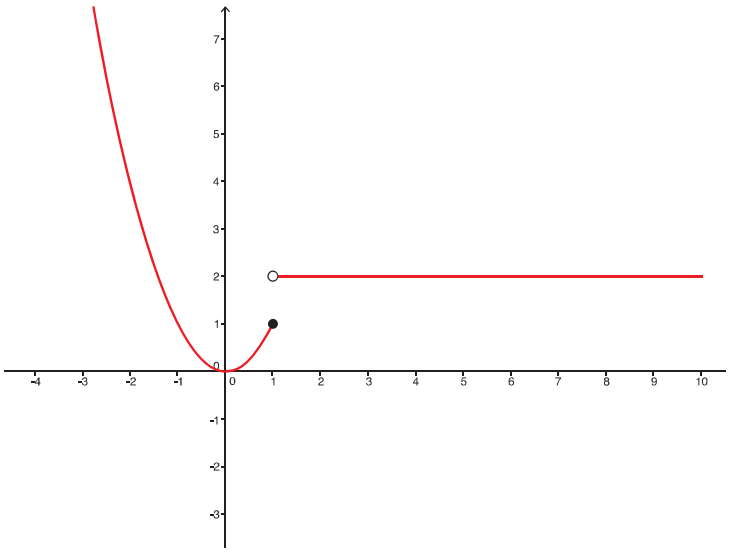
Cuando se comenzó a desarrollar el cálculo, la mayor parte de las funciones con las que se trabajaba eran continuas, y por lo tanto no se sentía la necesidad de penetrar en el significado exacto de continuidad. Fue entrado el siglo XVIII que se presentaron algunas funciones discontinuas en conexión con distintas clases de problemas físicos. En particular, los trabajos de J. B. J. Fourier (1758-1830) sobre la teoría del calor obligaron a los matemáticos de principios de siglo XIX a examinar cuidadosamente el significado de los conceptos de función y continuidad.

Una definición matemática satisfactoria de continuidad fue formulada por primera vez en 1821 por el matemático francés Agustín-Louis Cauchy (1789-1857).

1. Continuidad de una función

La idea intuitiva de función continua gráficamente es aquella que no "da saltos", aquella que se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.

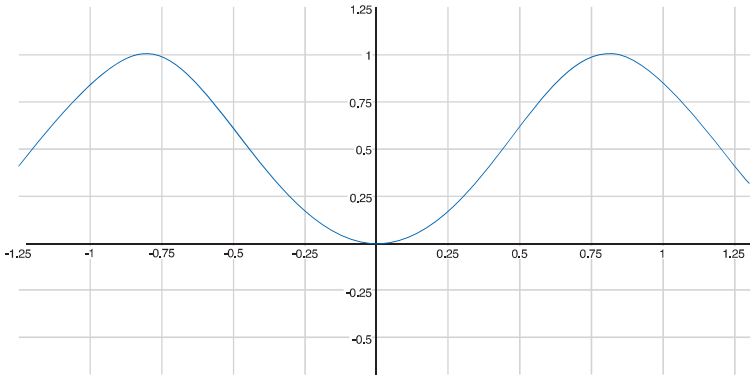




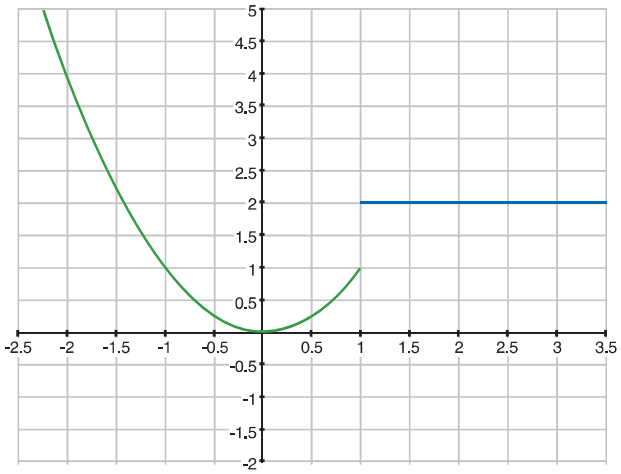
En las gráficas anteriores se puede decir de manera intuitiva que la primera corresponde a una función continua, pues se puede trazar sin levantar el lápiz, mientras que la segunda corresponde a una función no continua, pues para realizar su trazo es necesario levantar el lápiz.

Ejercicio

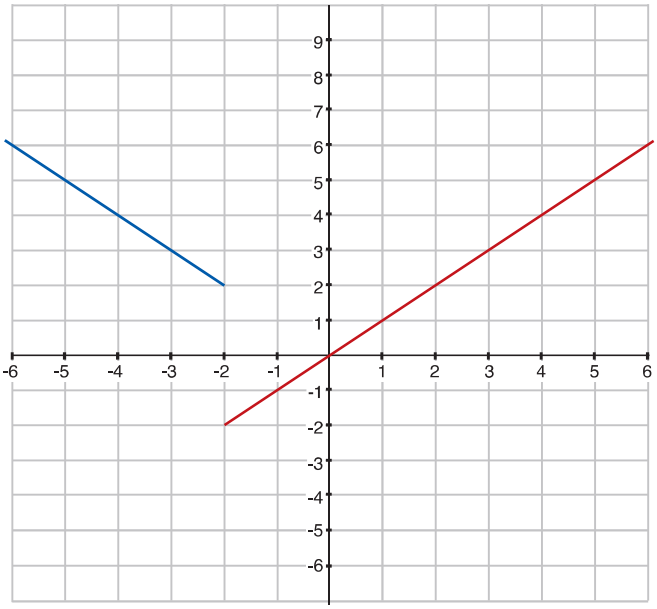
De las siguientes gráficas indicar cuáles son continuas, (de manera intuitiva).



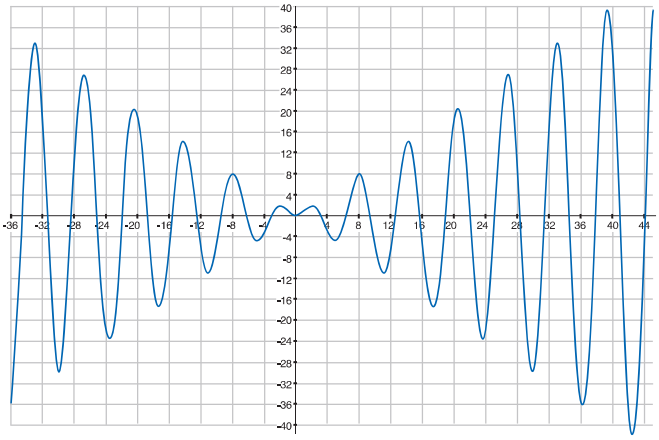
1. ¿Es continua la función?



2. ¿Es continua la función?



3. ¿Es continua la función?



4. ¿Es continua la función?

1.1 Condición de continuidad en un punto

La definición de continuidad de una función en un punto es:

> Una función $y = f(x)$ es *continua* en un punto $x = c$ cuando existe el límite de la función en el punto $x = c$ y dicho límite es $f(c)$.

Esta definición da lugar a tres condiciones que debe cumplir la función para ser continua en el punto c:

a) $f(c)$ existe; es decir, c pertenece al dominio de f.

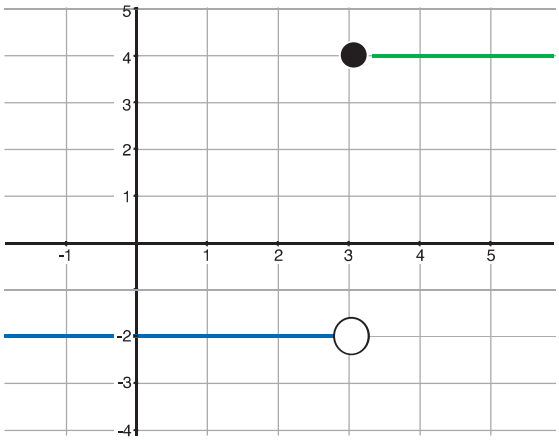
b) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe; es decir, los límites laterales son finitos e iguales.

c) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Esto quiere decir que para que una función sea continua no basta que tenga límite, sino que además dicho límite tiene que coincidir con el valor de la función en el punto correspondiente.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 4 \text{ si } x \geq 3 \\ -2 \text{ si } x < 3 \end{cases}$. ¿Es continua en $c = 3$?



Solución:

a) $f(3) = 4$ Por lo que $3 \epsilon D_f$

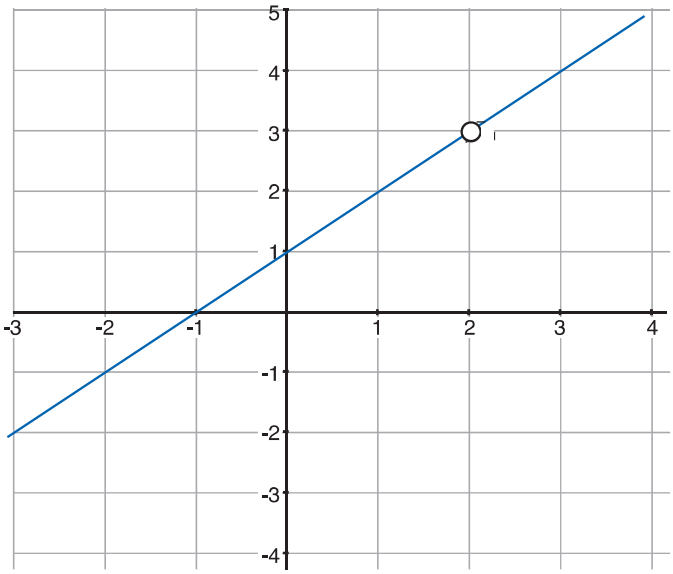
b) Si se estudian los límites de esta función en el punto $c = 3$ se tiene que:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -2 \text{ y } \lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$$

Como los límites laterales no son iguales, entonces el límite de la función no existe. Por consiguiente la función f no es continua en $c = 3$.

Ejemplo

Verificar si la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ es continua en $c = 2$.



Solución:

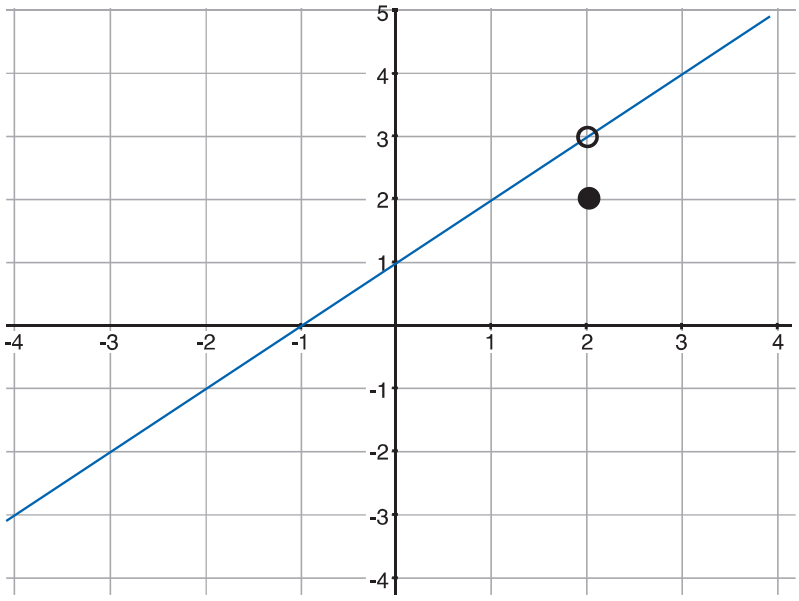
a) Puesto que $f(2) = \frac{2^2 - 2 - 2}{2-2} = \frac{0}{0}$, entonces $f(2)$ no está definido. Ver la gráfica.

b) Si se estudian los límites de esta función en el punto $c = 2$, se tiene que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$. Como los límites laterales son iguales entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.

La función no es continua en $c = 2$. No se cumple la condición a.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$. ¿Es continua en $c = 2$?



Solución:

Analizando las tres condiciones se tiene:

1. $f(2) = 2$, entonces 2 pertenece al dominio de f.

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3.$

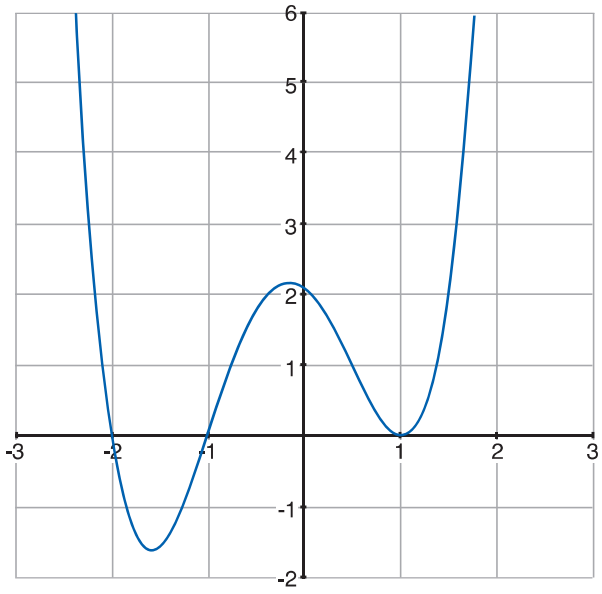
   Esto muestra que el límite existe y es igual a 3.

3. Se tiene que $f(2) = 2$ y $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$. Esto muestra que $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$.

   Entonces no se cumple la tercera condición. Por lo tanto la función no es continua en $c = 2$.

Ejemplo

Considere la función $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$. ¿Es continua en $c = 1$?



Solución:

Analizando las tres condiciones se tiene:

1. $f(1) = (1)^4 + (1)^3 - 3(1)^2 - (1) + 2 = 1 + 1 - 3 - 1 + 2 = 0$; entonces 1 pertenece al dominio de f.
2. $\lim\limits_{x \to 1}(x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2) = (1)^4 + (1)^3 - 3(1)^2 - (1) + 2 = 0$.
   Esto muestra que el límite existe y es igual a 0.
3. Se tiene que $f(1) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$. Esto muestra que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$
   Por lo tanto la función es continua en $c = 1$.

Observación
Las funciones polinomiales son continuas en todo su dominio.

1.2 Tipos de discontinuidad

La discontinuidad de una función f en el punto $x = a$ se puede clasificar en los siguientes casos:

a) Discontinuidad evitable o restringible (en algunos textos le llaman de hueco)
b) Discontinuidad infinita y asintótica
c) Discontinuidad de salto (finito e infinito)

En la siguiente tabla se muestran las condiciones que presenta cada tipo de discontinuidad.

Discontinuidad evitable o restringible	Discontinuidad infinita		Discontinuidad de salto	
	Infinita	Asintótica	Finito	Infinito
$f(a) = \nexists$. $\lim_{x\to a} f(x) = \exists$	1. La función no está definida en a. 2. Los límites laterales existen y son infinitos con el mismo signo. $\lim_{x\to a^-} f(x) =$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ o \\ -\infty \end{cases}$	1. La función no está definida en a. 2. Los límites laterales existen y son infinitos, pero con signo distinto. Caso 1 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ $= \infty$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ $= -\infty$ Caso 2 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ $= -\infty$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$	1. La función no necesariamente está definida en a. 2. Los límites laterales existen y son finitos, pero son distintos. $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$ $\neq \lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$	1. La función no necesariamente está definida en a. 2. Los límites laterales existen, pero uno es finito y el otro es infinito. $\lim_{x\to a^-} f(x) = L \neq$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ $\neq \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

Discontinuidad evitable o restringible

Ejemplo

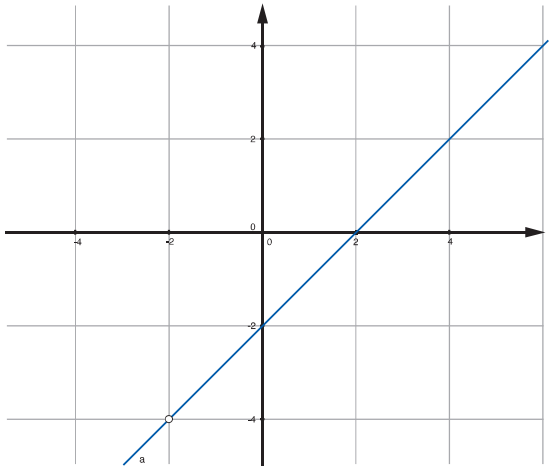
Verificar que la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ presenta discontinuidad evitable en el punto $a = -2$.

Solución:

1. $f(-2) = \frac{-2^2-4}{-2+2} = \frac{0}{0}$, de manera que la función f no está definida en -2.

2. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} x - 2 = 4$; el límite existe.

Entonces la función f presenta una discontinuidad restringible.



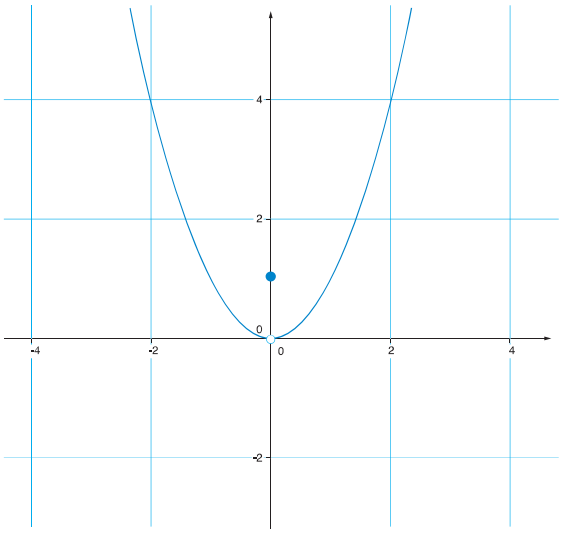
Ejemplo

Verificar que la función $g(x)$ presenta una discontinuidad evitable en el punto $a = 0$.

Sea $g(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$

Solución:

1. $g(0) = 1$; es decir, la función g está definida en el punto 0.
2. $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$, es decir, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 \neq 1 = f(0)$.



Entonces la función presenta una discontinuidad evitable en el punto 0.

M2 Basado en Competencias

Ejercicio

Verificar que la función $g(x)$ presenta una discontinuidad evitable en el punto $a = 0$.

$$g(x) = \begin{cases} x^3, & -2 \leq x < 0, \\ -1, & x = 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Discontinuidad infinita o asintótica

Ejemplo

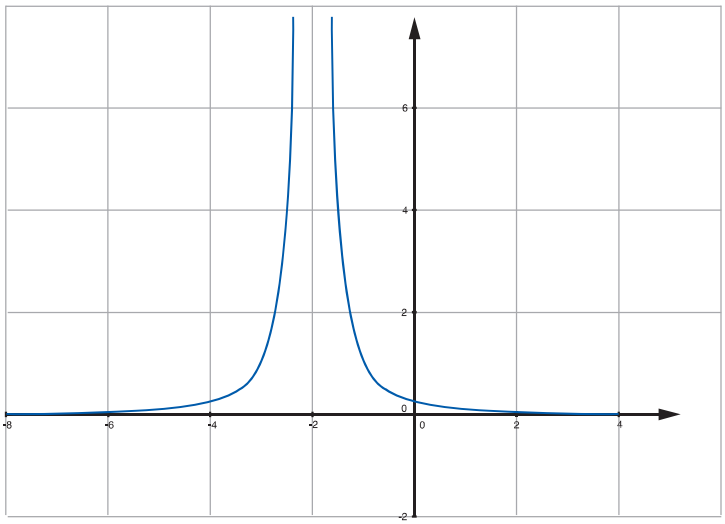
Verificar que la función $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ presenta una discontinuidad infinita en el punto $a = -2$.

Solución:

1. $f(-2) = \frac{1}{(-2+2)^2} = \frac{0}{0}$; es decir, la función no está definida en -2.

2. $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2}$; es decir, como los límites laterales existen y son iguales, entonces $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

Entonces la función f presenta discontinuidad infinita en el punto -2.



Ejercicio

Verificar que la función $f(x) = \frac{1}{-x^2}$ presenta una discontinuidad infinita en el punto $a = 0$.

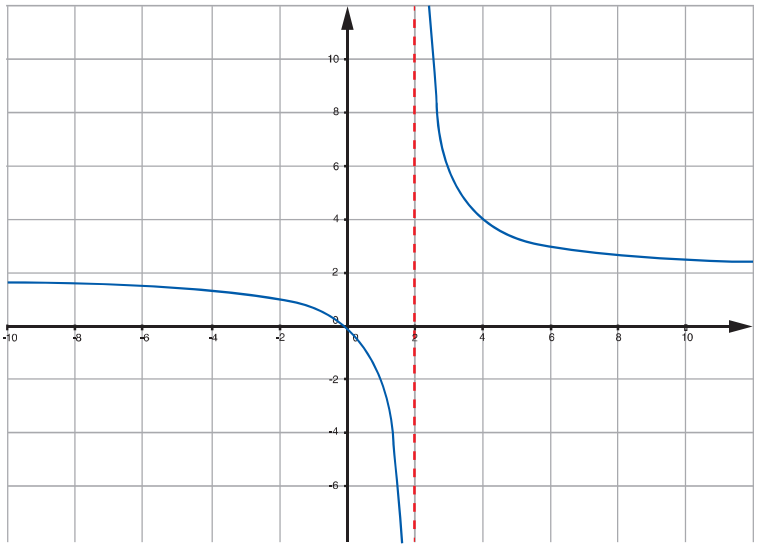
Ejemplo

Verificar que la función $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ presenta una discontinuidad asintótica en el punto $a = 2$.

Solución:

1. $f(2) = \frac{2(2)}{2-2} = \frac{4}{0}$, de manera que f no está definida en el punto 2.
2. $\lim_{x \to 2^-} \frac{2x}{x-2} = -\infty$ y $\lim_{x \to 2^+} \frac{2x}{x-2} = \infty$; es decir, el $\lim_{x \to 2} \frac{2x}{x-2}$ no existe.

   Entonces la función f presenta una discontinuidad asintótica.





Ejercicio

Verificar que la función $f(x) = \frac{x}{x-6}$ presenta una discontinuidad asintótica en el punto $a = 6$.

Discontinuidad de salto (finito o infinito)

Ejemplo

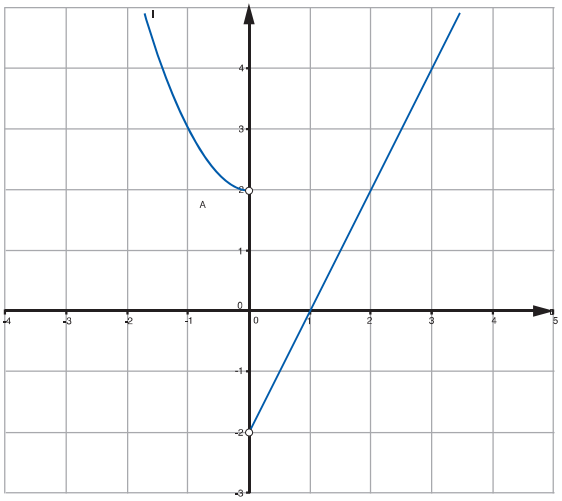
Verificar que la función $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en el punto $a = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución:

1. $f(0) = (0)^2 + 2 = 2$; es decir, la función está definida en el punto 0.
2. $\lim\limits_{x \to 0^-} x^2 + 2 = 2$ y $\lim\limits_{x \to -0^+} 2x - 2 = -2$; es decir, los límites laterales existen, pero son distintos.

   Entonces la función f presenta una discontinuidad de salto finito en el punto $a = 0$.



Ejercicio

Verificar que la función $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en el punto $a = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejemplo

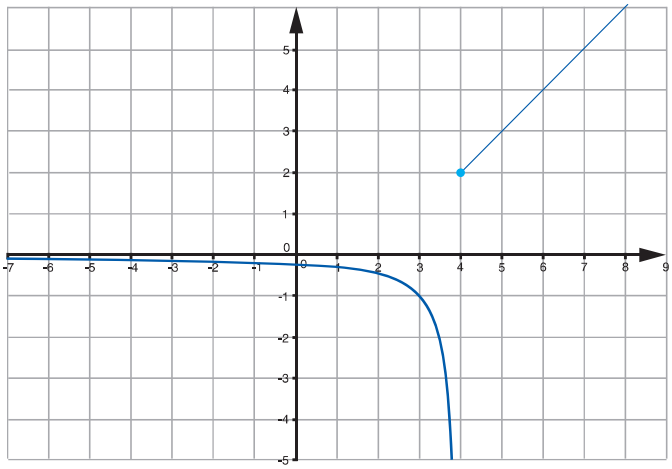
Verificar que la función $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en el punto $a = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & \text{si } x < 4 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Solución:

1. $f(4) = 4 - 2 = 2$; es decir, la función está definida en 4.
2. $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{1}{x-4} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 4^+} x - 2 = 2$; los límites laterales son distintos: uno finito y otro infinito.

   Entonces la función presenta una discontinuidad de salto infinito en el punto 4.



Ejercicio

Verificar que la función $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en el punto $a = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Ejemplo

Determinar los puntos de discontinuidad de la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8}$.

Solución:

Factorizando el denominador de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8} = \frac{x^2 - 3}{(x + 4)(x - 2)}$$

El denominador se hace 0 cuando ocurre que:

$x + 4 = 0$ o $x - 2 = 0$

$x = -4$ o $x = 2$

Por lo que $x = -4$ y $x = 2$ no pertenecen al dominio de la función; es decir, $f(-4)$ y $f(2)$ no existen.

Entonces f es discontinua en estos puntos.

Observación

Una función racional es discontinua en los puntos en los que el denominador es igual a 0 y continúa en todos los demás puntos. A estos puntos se les llama *puntos de discontinuidad de la función.*

Ejemplo

Sea $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \\ 3 \text{ si } x > 0 \end{cases}$. Determinar los puntos de discontinuidad de la función.

Solución:

Se trata de una función definida en trozos, la cual está compuesta por dos funciones constantes y un punto. El dominio de la función son todos los números reales. El único punto posible de discontinuidad puede ser el valor de x en el que se corta el dominio de la función; es decir, el valor de $x = 0$.

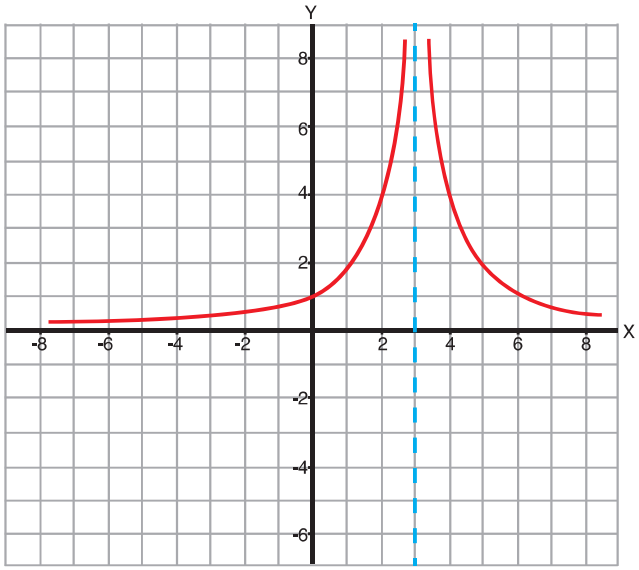
Analizando la continuidad en $x = 0$, se tiene:

1. $f(0) = 2$. El 0 pertenece al dominio de la función.
2. $\lim_{x \to 0} f(x)$. Para calcular este límite se procederá a calcular sus límites laterales cuando $x \to 0$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 3 = 3$. Esto verifica que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

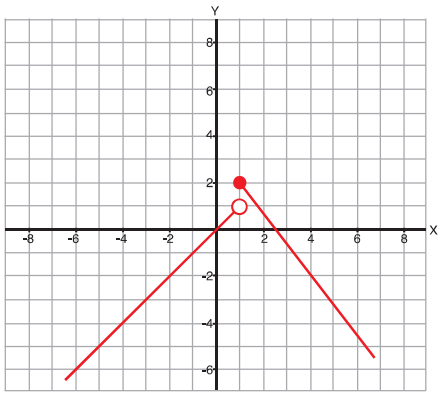
Por consiguiente f no es continua en $x = 0$.

Ejercicios

1. A partir de la gráfica de $f(x)$ señalar si es continua o no en $x = 0$ y en $x = 3$. En el caso de no ser continua, indicar el tipo de discontinuidad.



2. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$:

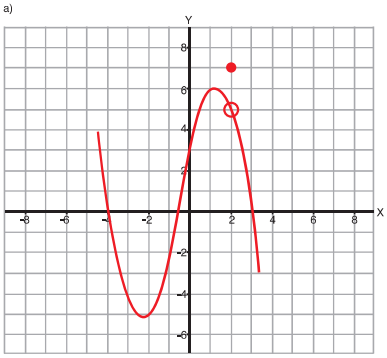


Analizar la continuidad de la función en $x = 1$ y en $x = 2$. Justificar la respuesta.

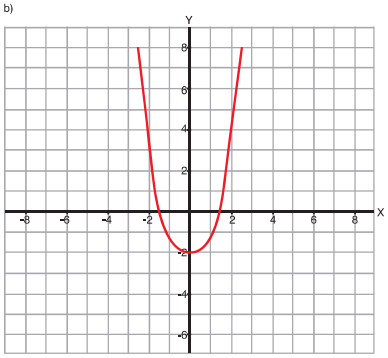
M2 Basado en Competencias

3. ¿Son continuas las siguientes funciones en $x = 2$? Justificar la respuesta.

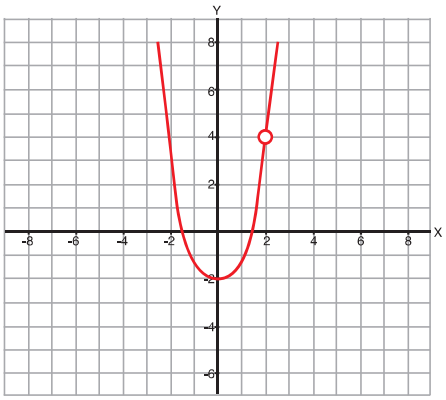
a)



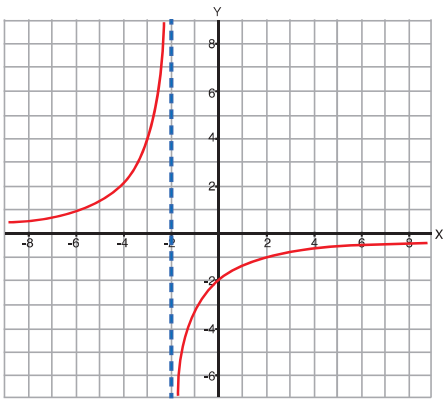
b)



4. Dada la gráfica de $f(x)$:
   a) ¿Es continua en $x = 1$?
   b) ¿Y en $x = 2$?
   Justificar la respuesta.



5. Se muestra la gráfica de la función $f(x)$:



   a) ¿Es continua en $x = 2$?
   b) ¿Y en $x = 0$?



6. Analizar la continuidad de la siguiente función en $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & si \ x \leq 3 \\ 3x - 1, & si \ x > 3 \end{cases}$$

7. Analizar si la siguiente función es continua en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & si \ x < 0 \\ \dfrac{x-2}{2}, & si \ x \geq 0 \end{cases}$$

8. Analizar si la siguiente función es continua en $x = 2$. Justificar la respuesta.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \ \ x \leq 2 \\ x + 2, & \text{si} \ \ x > 2 \end{cases}$$

9. Analizar la continuidad de la función en $x = 4$. Justificar la respuesta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{3}, & \text{si} \ \ x \leq 4 \\ x^2 - 15, & \text{si} \ \ x > 4 \end{cases}$$

2. Continuidad en un intervalo

Definición

Una función $y = f(x)$ es *continua en un intervalo abierto* (a, b) si lo es en todo valor del intervalo.

Una función $y = f(x)$ es *continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$ si es continua en (a, b) y además $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^+} f(x) = f(b)$. Es decir, es continua por la derecha de a, y continua por la izquierda de b.

Ejemplo

Dada $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, verificar si f es continua en el intervalo cerrado $[-2, 2]$

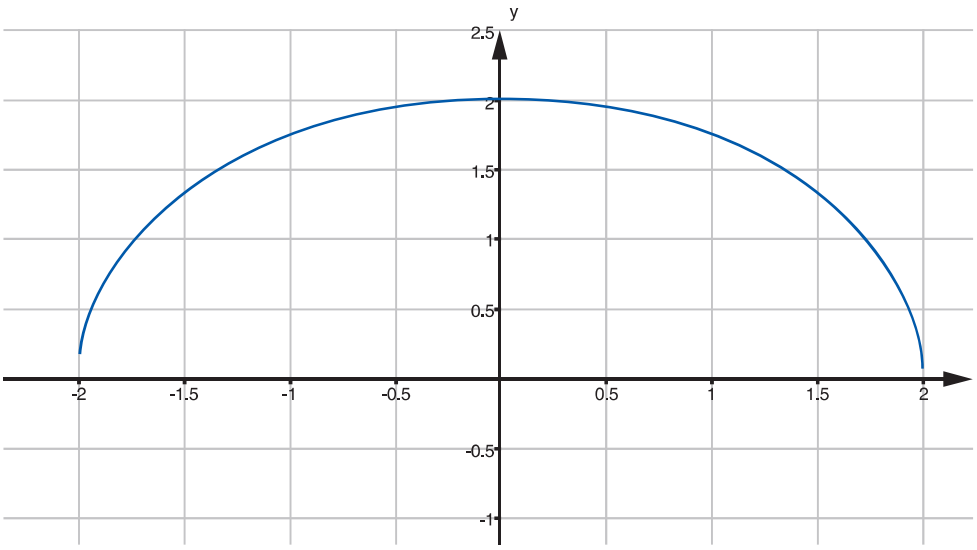
Solución:

Se verificará primero que es continua en el intervalo (-2, 2).
Sea $x = a$ cualquier número en el intervalo (-2, 2).
Se verificará que cumple las tres condiciones de continuidad en $x = a$.

1. $f(a) = \sqrt{4 - a^2}$, ya que a está en el dominio de f y $(4 - x^2) > 0$, entonces $f(a)$ está definida.

2. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - a^2}$, por lo tanto también existe el límite.

3. Puesto que $f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \sqrt{4 - a^2}$, entonces f es continua en (-2, 2).



Además se debe mostrar que la función es continua por la derecha del -2 y por la izquierda de 2. Por lo tanto se debe verificar que $f(-2)$ está definida y que $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ existe y que estos valores son iguales.

También se debe verificar que $f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$.

Esto es:

$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(-2)$ y que $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(2)$ por lo tanto f es continua en [-2, 2].

Ejemplo

Analizar la continuidad de la función $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ en el intervalo [0, 5].

Solución:

Analizando las tres condiciones de continuidad para un intervalo cerrado se tiene:

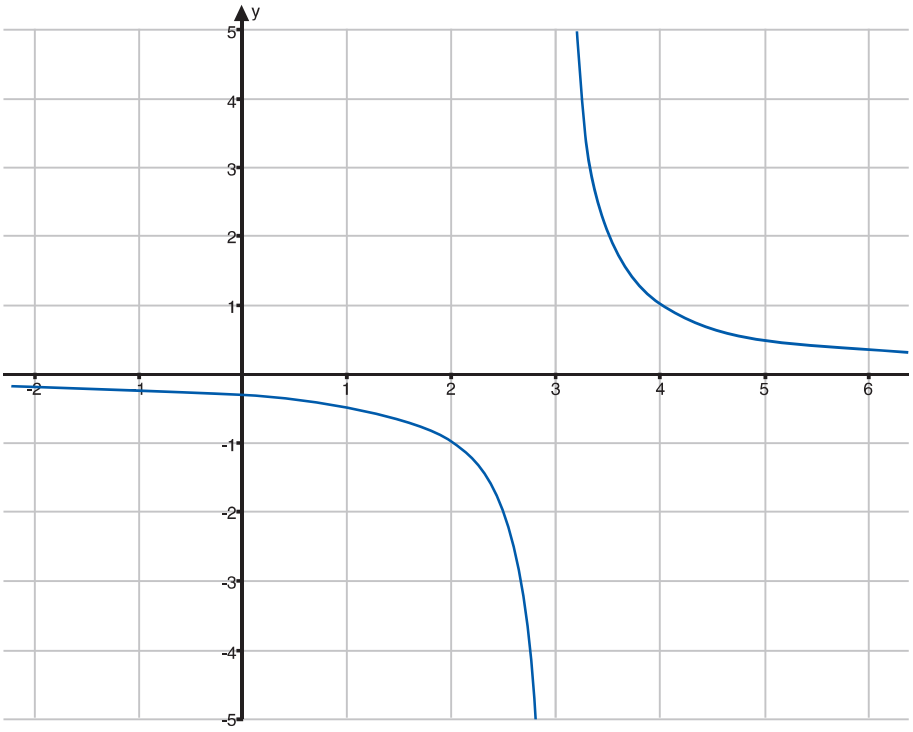
Se verificará primero que es continua en el intervalo (0, 5).

Se obtienen los puntos de discontinuidad de esta función; como se trata de una función racional, se iguala a 0 el denominador y se despeja a x:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3.$$

La función presenta una discontinuidad en $x = 3$, $3 \in (0,5)$. Por lo tanto la función es discontinua en el intervalo [0, 5].



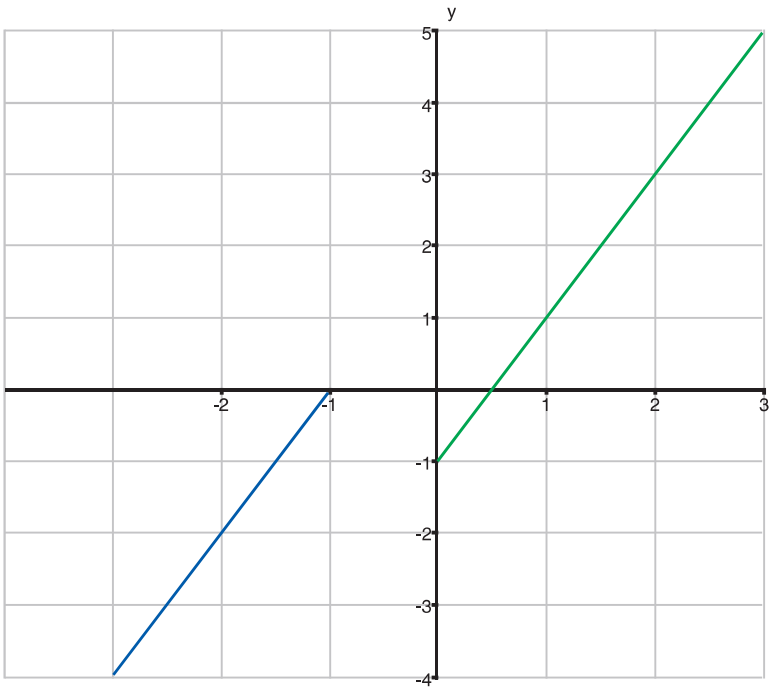
Ejemplo

Sea $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } -3 \le x \le -1 \\ 2x-1 & \text{si } 0 \le x \le 3 \end{cases}$. ¿Es f continua en todo su dominio?

Solución:

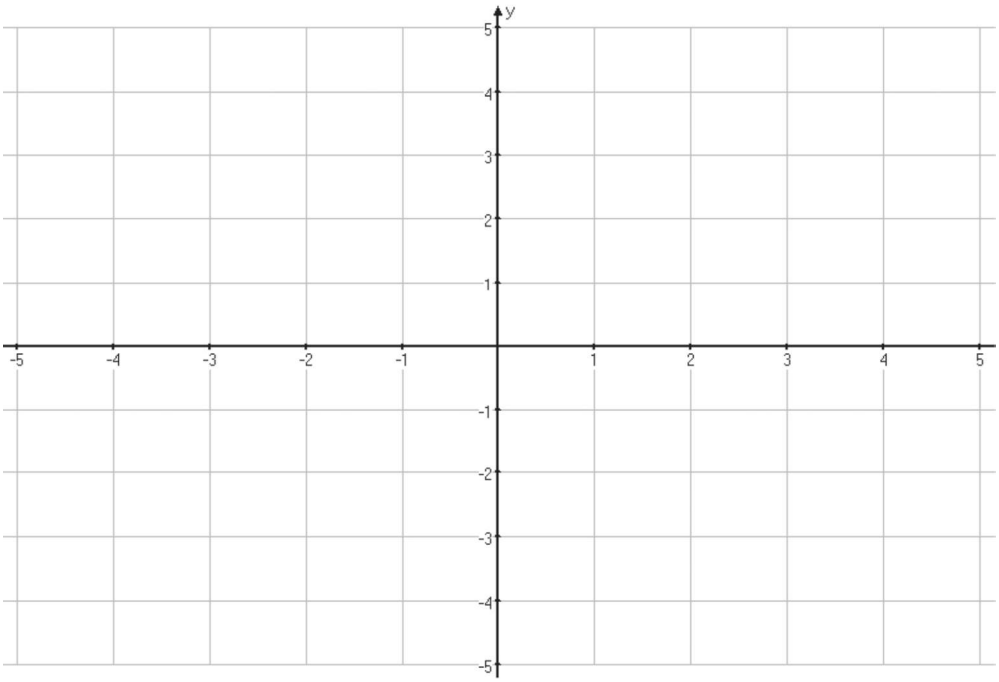
En este caso el dominio de la función está conformado por la unión de dos intervalos $[-3,-1] \cup [0,3]$; no hay un valor que corte este dominio (ver en la siguiente gráfica).

La función está compuesta por dos segmentos de recta y las rectas son continuas en su dominio. Por lo tanto la función es continua en todo su dominio.

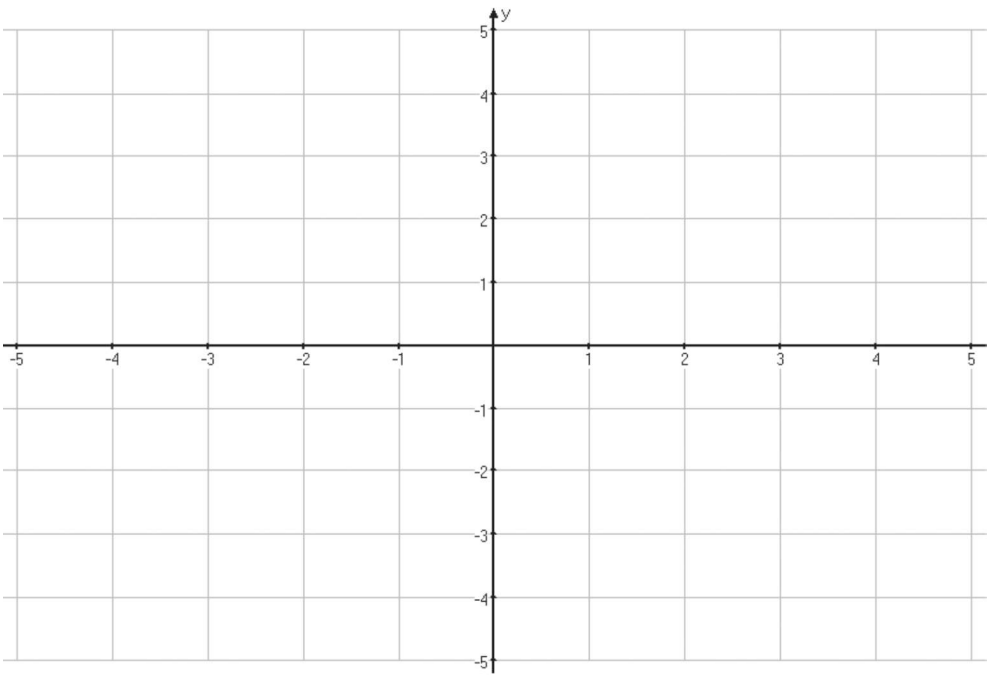


Ejercicios

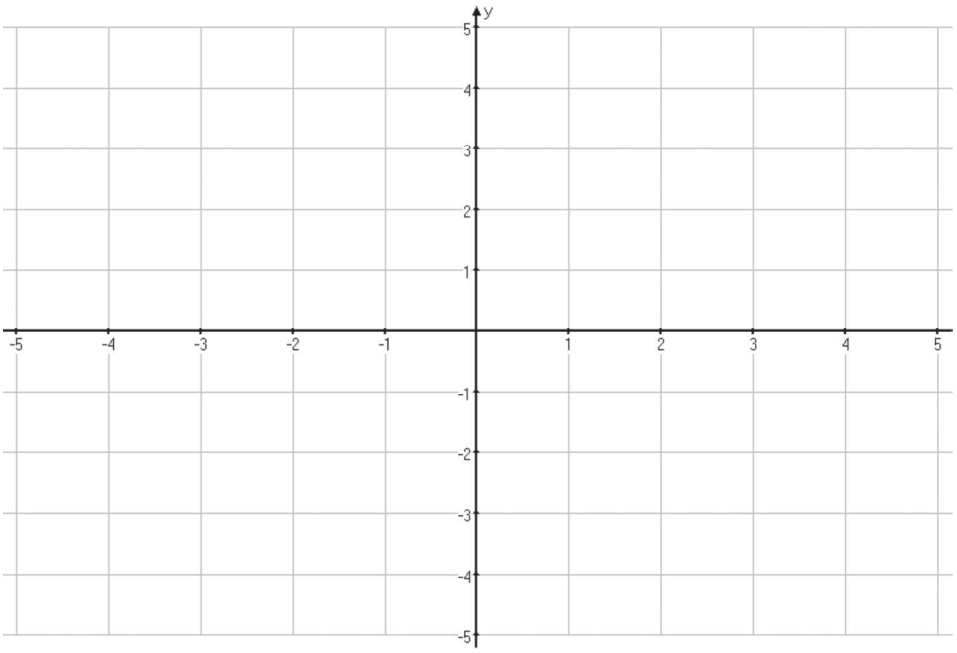
1. Analizar la continuidad de la función $f(x)\sqrt{9-x^2}$ en el intervalo [-3, 3]. Graficar la función.



2. Analizar la continuidad de la función $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ en el intervalo [-1, 1]. Graficar la función.



3. Sea $f(x) = \begin{cases} 5x - 1 & \text{si } -5 \leq x \leq 0 \\ x + 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$. ¿Es f continua en todo su dominio? Graficar la función.



Ejercicios adicionales



I. En los siguientes ejercicios decir si la afirmación dada es falsa o verdadera. Justificar la respuesta.

1. Si $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$ entonces se puede asegurar que f es continua en 3.
2. Si f es continua en 5 y $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 4$ entonces se puede asegurar que $\lim_{x\to 5} f(x) = 4$.
3. Si f es una función continua en 2 y $f(2) = 4$, entonces se puede asegurar que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.
4. Si $\lim_{x\to 7^+} f(x) = 6$ y $f(7) = 6$, entonces se puede asegurar que f es continua en 7.

II. Determinar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones e indicar el tipo de discontinuidad que presentan.

1. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$
3. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+1}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+8}$
6. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 3 \\ 2x+3 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

III. Determinar si la función f dada es continua en el valor c indicado. En caso contrario especificar el tipo de discontinuidad que presenta.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1,\ c = 3$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1},\ c = 2$
3. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le 2 \\ x^2+1 & \text{si } x > 2 \end{cases},\ c = 2$

4. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{si } x > -1 \\ -2 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$, $c = -1$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 5 \\ x^2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$, $c = 3$, $c = 5$

IV. En los siguientes ejercicios determinar en qué intervalos es continua la función dada. Utilizar un paquete graficador.

1. $f(x) = x^4 + x^2 - x + 1$

2. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

3. $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{10-x}}{x-5}$

5. $f(x) = \frac{x}{x^3-125}$

V. Analizar la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo indicado y trazar su gráfica correspondiente.

1. $f(x) = 5x - 3$ en [-1, 5]

2. $f(x) = \sqrt{81 - x^2}$ en [-9, 9]

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ en (-1, 1)

4. $f(x) = sen\, x$ en [0, 2π]

5. $f(x) = \frac{3}{5x-2}$ en [0, 1]

6. $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ en [0, 4]

Respuestas

I.

1. Falso 2. Verdadero 3. Verdadero 4. Falso

II.

1. No presenta discontinuidades
2. En $x = 1$, $x = -1$, en $x = 1$ evitable en $x = -1$ asintótica
3. En $x = -1$, infinita
4. En $x = -1$, evitable
5. En $x = -2$, asintótica
6. En $x = 0$, salto finito

III.

1. Es continua en $c = 3$
2. Es continua en $c = 2$
3. Es continua en $c = 2$
4. Es discontinua en $c = -1$, salto finito
5. Es continua en $c = 3$, discontinua en $c = 5$, salto finito

IV.

1. Continua en todo $\mathbb{R}$
2. Continua en $(-\infty, -2)$
3. Continua en $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$
4. Continua en $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$
5. Continua en $(-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$

V.

1. Si es continua en [-1, 5]
2. Si es continua en [-9, 9]
3. No es continua en (-1, 1)
4. Si es continua en [0, 2π]
5. No es continua en [0, 1]
6. No es continua en [0, 4]



Imagen: https://euclides59.files.wordpress.com/2012/12/josc3a9_de_ribera_-_arquc3admedes.jpg

Módulo 3

Derivada de una función



Imagen: https://www.google.com.mx/search?q=edifici+mas+grande+del+mundo

M3
Basado en Competencias

Módulo 3
Derivada de una función

Competencias genéricas y atributos

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
   - 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
   - 1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
   - 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
   - 4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
   - 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
   - 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
   - 8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
   - 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
   - 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares básicas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales
4. Argumenta la solución de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento
6. Cuantifica, representa y contrasta experimentalmente o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

M3 Basado en Competencias

Introducción

Hemos llegado al módulo 3, en el que encontrarás cómo determinar derivadas de funciones utilizando primeramente su definición y posteriormente los teoremas de derivadas hasta llegar a los problemas de aplicación.

Se piensa que trabajar con derivadas es algo muy complejo y que no tienen aplicación en la vida diaria, pero al profundizar en el tema, se descubrirá que es todo lo contrario.

La aplicación de derivadas se puede encontrar en áreas como la economía, la administración y la física, entre muchas otras, y éstas a su vez en conjunto ayudan a realizar grandes cálculos en importantes empresas, o simples operaciones en la economía familiar.

Entre las principales aplicaciones de la derivada están:

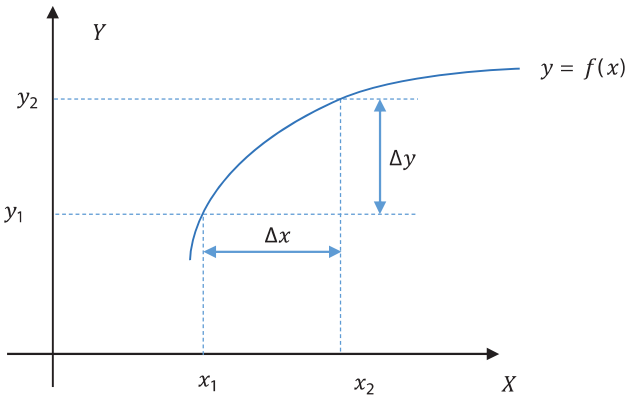
- Cálculo de movimientos de una partícula, como velocidad y aceleración.
- Cálculo de máximos y mínimos.

En una fábrica, o en un negocio de abarrotes, es importante saber cuál es la mayor ganancia que se puede obtener en cierto periodo, o con cierto producto, pero a la vez, igualmente es primordial calcular si existen pérdidas en estos productos o en un lapso de tiempo.

1. Incremento de una función

El *incremento* de la *variable independiente* x denotado por Δx (léase delta x), se define como la diferencia $x_2 - x_1$, en la que x_1 es el valor inicial y x_2 el valor final. De manera análoga para la *variable dependiente* y, el incremento de esta variable será la diferencia $y_2 - y_1$, y se denota Δy (léase delta y).

Gráficamente se tiene:



Los incrementos de las variables se escriben de la siguiente manera:

- $\Delta x = x_2 - x_1$
- $\Delta y = y_2 - y_1$

Ahora bien, dada una función f, con regla de correspondencia $y = f(x)$, el incremento de la función se define como la diferencia de su valor final con su valor inicial; es decir:

$$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$$

Si $\Delta x = x_2 - x_1$; entonces $x_2 = x_1 + \Delta x$, y al sustituirla en el incremento de $f(x)$ se tiene que:

$$\Delta f(x) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Ejemplo

En una investigación que se realizó para observar qué cantidad de desperdicios en toneladas se tira diariamente en un municipio del Estado de México para un periodo vacacional de una semana, se anotaron los siguientes datos:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Días (x)	1	2	3	4	5	6	7
Ton. de desperdicio (y)	0.3	1.2	2.7	4.8	7.5	10.8	14.7

Determinar el incremento entre los días 6 y 7 y el incremento de toneladas que se generan de basura entre estos días.

Solución:

El incremento entre los días $x_1 = 6$ y $x_2 = 7$ es:

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

$$\Delta x = 7 - 6 = 1$$

El incremento de las toneladas de basura entre estos días es:

$$\Delta y = 14.7 - 10.8 = 3.9$$



Ejercicio

Con la información del ejemplo anterior determinar el incremento entre los días 2 y 5 y el incremento de toneladas que se generan de basura entre estos días.

Ejemplo

Dada la función $f(x) = x^2 + 5x - 6$, calcular el incremento de la función.

Solución:

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

Como: $f(x) = x^2 + 5x - 6$

Entonces:

$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 6$

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5x + 5\Delta x - 6 - (x^2 + 5x - 6)$

$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5\Delta x$

$= (2x + \Delta x + 5)\Delta x$

Ejercicio

Dada la función $f(x) = x^2 - 4x - 2$, calcular el incremento de la función.



Ejemplo

Determinar el cociente $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ para la función $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$.

Solución:

El incremento de la función se obtiene en el numerador y se divide entre el Δx; simplificamos y determinamos el cociente de incrementos, como se muestra en este ejercicio.

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 6)) - (3x^2 + 5x + 6)}{\Delta x}$$

$$= \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5x + 5\Delta x + 6 - (3x^2 + 5x + 6)}{\Delta x}$$

$$= \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{(6x + 3\Delta x + 5)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 6x + 3\Delta x + 5$$

Ejercicio

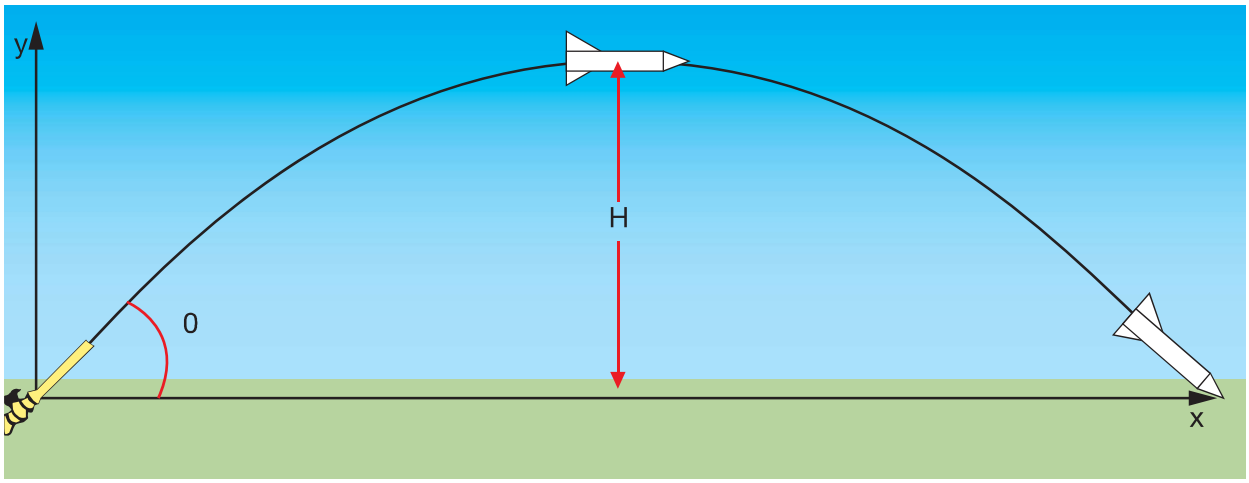
Determinar el cociente $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ para la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.



2. Derivada de una función

Probablemente has escuchado algún comentario acerca de videojuegos de computadora, y quizás has jugado alguno, como el tiro de misiles.

De manera general, este juego consiste en calcular el ángulo y la velocidad que deberá tener un misil, el cual es lanzado por un cañón en un punto *A* para darle al blanco ubicado en el punto *B*, que se encuentra en otro punto o viceversa. Según se muestra en el dibujo siguiente, en algunas ocasiones es necesario eliminar obstáculos para dar en el blanco.



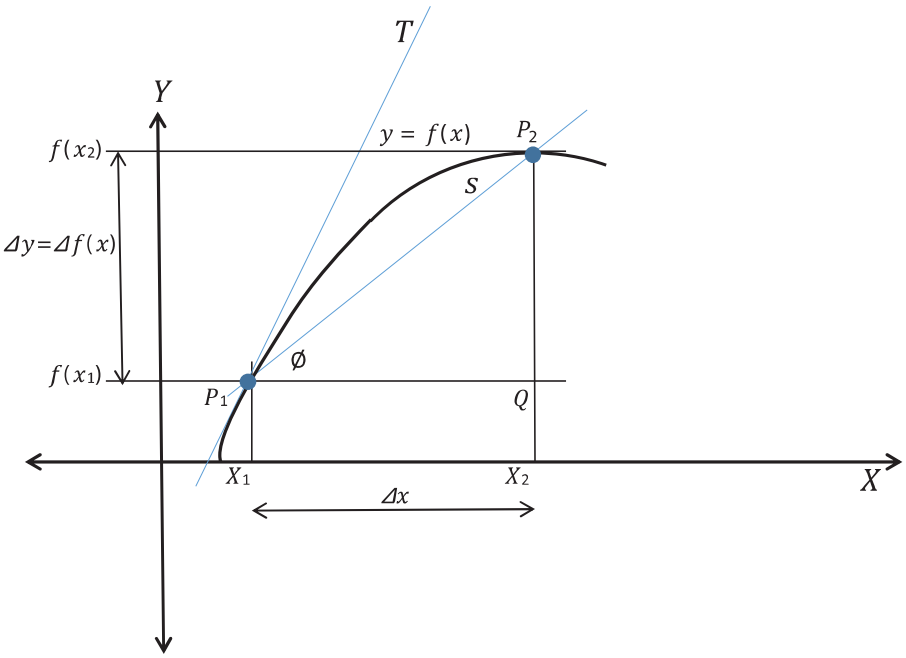
Fuente: tomado de https://www.google.com.mx/ search?q=ni%C3%B1os+pensantes+en+caricatura&espv=2&biw=1024&bih=475&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwi2p6uEpdPLAhWE1CYKHZRxCjIQ_AUIBigB#tbm=isch&q=trayectoria+de+un+misil&imgrc=ojSAIW6qcWs81M%3A

La mayoría de las personas que juegan este videojuego hacen aproximaciones *por tanteo*, pero seguramente recordarás que este método no es preciso ni rápido y para ganar en el juego necesitas precisión para dar exactamente en el blanco y rapidez para encontrar en el menor número de veces el ángulo y la velocidad del lanzamiento adecuado.

Una forma de lograrlo es sistematizando los movimientos y sus variaciones al cambiar el ángulo y la velocidad, otra es aplicando los conocimientos sobre razón de cambio, límites, continuidad y la función de la derivada; si el objetivo es ganar en el juego, quizá a corto plazo la mejor alternativa sea la primera, pero a futuro la segunda te permitirá tomar decisiones más acertadas y pronosticar los cambios que experimentan dos magnitudes relacionadas funcionalmente, en este caso el ángulo y la velocidad.

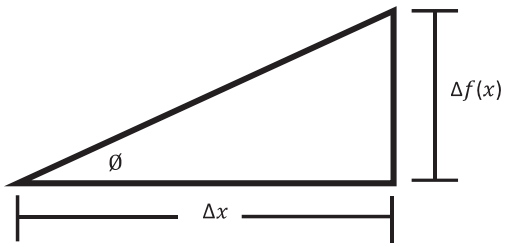
Interpretación geométrica de la derivada de una función

Considere una función continua $y = f(x)$ y su gráfica



- Por el punto $P_1\ (x_1, f(x_1))$ se traza una recta tangente (T) y por los puntos $P_1\ (x_1, f(x_1))$ y $P_2\ (x_2, f(x_2))$ se traza una recta secante (S) con un ángulo de inclinación Ø a la curva $y = f(x)$.
- Posteriormente se marca el incremento de la variable independiente Δx, donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y la variable dependiente Δy, donde $\Delta y = \Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$.
- Se marca el triángulo $P_1 Q P_2$

Se puede observar en el siguiente triángulo el cociente de incrementos $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, es la razón trigonométrica tangente; es decir, el cateto opuesto entre el cateto adyacente del triángulo representado; o sea, la tangente trigonométrica del ángulo ø, que a su vez es la pendiente de la recta secante (S) a $y = f(x)$ en los puntos P_1 y P_2.



Como el ángulo ø de la recta secante varía en cada una de las posiciones del punto P_2 al mantener fijo el punto P_1 y al ir moviendo sobre la curva al punto P_2 de manera que se aproxime cada vez más al punto P_1, también variará entonces el valor de la tangente trigonométrica dada por el cociente $\frac{\Delta f(x)}{\Delta_x}$.

Como la curva $y = f(x)$ es continua, el punto P_2 se puede aproximar a P_1 en intervalos infinitamente pequeños, tan pequeños como se quiera; esto es:

$$\text{Si } \Delta x \to 0, \text{también } \Delta f(x) \to 0$$

Entonces, la recta secante (S) irá aproximándose a la recta tangente (T) a medida que $\Delta_x \to 0$.

Se puede observar que si $\Delta_x \to 0$, entonces la pendiente m_s tiende a m_T es decir: $m_s \to m_T$,

$$m_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ o } \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - f(x)}{h}$$

Al límite anterior se le conoce como la *derivada de la función* $f(x)$; es decir, la derivada en cualquier punto $P_o(x_o, y_o)$ representa geométricamente la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P_o(x_o, y_o)$.

Definición

La derivada de una función continua $y = f(x)$ está definida como el límite del cociente del incremento de la función $f(x)$ entre el incremento de la variable independientemente x, cuando ese incremento tiende a 0; esto es:

$$\text{Derivada de } \underset{\Delta x \to 0}{f(x)} = lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

La derivada también se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\text{Derivada de } f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si se considerara $\Delta x = h$

$$\text{Derivada de } \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Notación

La derivada de una función continua $y = f(x)$ se denota de las siguientes formas:

$$D_x f(x), \quad D_x y, \quad f'(x), \quad y', \quad \frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{dy}{dx}$$

Ejemplo

Determinar la derivada de la función $f(x) = 3x^2 + 6x - 8$ utilizando la definición de derivada.

Solución:

$f(x) = 3x^2 + 6x - 8$

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta f(x) = [3(x + \Delta x)^2 + 6(x + \Delta x) - 8\,] - (3x^2 + 6x - 8)$

Realizando operaciones y simplificando

$\Delta f(x) = 3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 6(x + \Delta x) - 8 - 3x^2 - 6x + 8$

$= 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 6\,x + 6\Delta x - 8 - 3x^2 - 6x + 8$

$= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 6\Delta x$

$= (6x + 3\Delta x + 6)\Delta x$ Al factorizar Δx

$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(6x + 3\Delta x + 6)\Delta x}{\Delta x}$ Al dividir Δx

$\frac{\Delta f(x)}{\Delta f} = 6x + 3\Delta x + 6$

$D_x f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x + 6)$

$D_x\, f(x) = 6x + 6$

Ejercicio

Determinar la derivada de la función utilizando la definición de derivada $f(x) = 4x^2 - 3x - 5$.



Ejemplo

Determinar la derivada de la función utilizando la definición de derivada.

$f(x) = 3x^3 - 2$

Solución:

$$f(x+h) = 3(x+h)^3 - 2$$

$$= 3(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 2$$

$$= 3x^3 + 9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 - 2$$

Al sustituir en la definición de derivada

$$D_x f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Resulta:

$$D_x f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^3 + 9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 - 2 - (3x^3 + 2)}{h}$$

$$\frac{Df(x)}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{9x^2h + 9xh^2 + 3h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(9x^2 + 9xh + 3h^2)h}{h}$$ Factorizando h y simplificando

$$= \lim_{h \to 0} 9x^2 + 9xh + 3h^2$$ Evaluando el límite

$$D_x f(x) = 9x^2$$



Ejercicio

Determinar la derivada de la función utilizando la definición de derivada.

$g(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

Ejemplo

Determinar la derivada de la función utilizando la definición de derivada.

$f(x) = \frac{2}{3x-1}$ para $x \neq \frac{1}{3}$

Solución:

Aplicando la definición de derivada

$$D_x f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Resulta:

$$D_x f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{(3x+h)-1} - \frac{2}{3x-1}}{h}$$

Realizando operaciones y simplificando

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2(3x-1) - 2(3x+3h-1)}{(3x+3h-1)(3x-1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{6x-2-6x-6h+2}{(3x+3h-1)(3x-1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-6h}{(3x+3h-1)(3x-1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-6h}{h\,(3x+3h-1)(3x-1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-6}{(3x+3h-1)(3x-1)}$$

Evaluando el límite

$$= \frac{-6}{(3x-1)(3x-1)}$$

Por lo tanto la derivada de la función es:

$$D_x y = \frac{-6}{(3x-1)^2}$$

M 3 Basado en Competencias

Ejercicio

Obtener la derivada de la función utilizando la definición de derivada.

$g(x) = \frac{4}{x+1} \quad para \quad x \neq -1$

Ejemplo

Determinar la derivada de la función utilizando la definición de derivada.

$f(x) = \sqrt{3x-4}$ si $x \geq 4/3$

Solución:

$f(x+h) = \sqrt{3(x+h)-4}$

Al sustituir en la definición de derivada:

$$D_x f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)-4} - \sqrt{3x-4}}{h}$$

Al multiplicar por el conjugado del numerador

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sqrt{3x+3h-4} - \sqrt{3x-4}}{h} \right] \left[\frac{\sqrt{3x+3h-4} + \sqrt{3x-4}}{\sqrt{3x+3h-4} + \sqrt{3x-4}} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sqrt{3x+3h-4}^2 - \sqrt{3x-4}^2}{(h)[\sqrt{3x+3h-4} + \sqrt{3x-4}]} \right]$$

Al simplificar

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{(3x+3h-4) - (3x-4)}{(h)\sqrt{3x+3h-4} + \sqrt{3x-4}} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{3x+3h-4-3x+4}{(h)[\sqrt{3x+3h-4} + \sqrt{3x-4}]} \right]$$

$$D_x f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{(h)\sqrt{3x+3h-4} + \sqrt{3x-4}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{3}{\sqrt{3x+3h-4} + \sqrt{3x-4}} \right]$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3x-4} + \sqrt{3x-4}}$$

$$D_x f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-4}}$$

Ejercicio

Determinar la derivada de la función utilizando la definición de derivada.

$g(x) = \sqrt{5x + 2}$ si $x \geq -2/5$



3. Cálculo de la derivada de una función por teoremas

Para calcular las derivadas de funciones reales de variable real, se aplican los siguientes teoremas.

1. $D_x(k) = 0$ si k es una constante
2. $D_x(x) = 1$
3. $D_x(kx) = k$ si k es una constante
4. $D_x(x^n) = n\,x^{n-1}$ para $n \in R$

   Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales de variable real continuas, entonces:
5. Suma de funciones $D_x\,(f(x) + g(x)) = D_x f(x) + D_x\,g(x)$
6. Derivada de un producto

   $D_x(f(x) \cdot g(x)) = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$
7. Derivada de un cociente

   $D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\,D_x f(x) - f(x)\,D_x g(x)}{(g(x))^2}$ si $g(x) \neq 0$
8. Derivada de una función elevada a una potencia (regla de la cadena)

   $D_x[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} D_x f(x)$

   Este teorema generalmente se expresa como:

   $D_x u^n = nu^{n-1} D_x u$, donde u es una función de x.
9. Derivada de una constante por una función.

   $D_x kf(x) = kD_x f(x)$ donde k es una constante.

El uso de estos teoremas se puede observar en los ejemplos resueltos en los ejercicios planteados a continuación:

Ejemplo

Calcular la derivada de la siguiente función:

$f(x) = -4x^3 + 8x^2 - 5x + 9$

Solución:

$$D_x f(x) = D_x(-4x^3) + D_x(8x^2) - D_x(5x) + D_x(9)$$

$$= 3(-4)x^{3-1} + 2(8)x^{2-1} - 5 + 0$$

$$= -12x^2 + 16x - 5$$



Ejercicio

Calcular la derivada de la siguiente función:

$g(x) = 5x^3 + 13x^2 - 2x + 11$

Ejemplo

Calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = 4x^5 + \frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{5}{8} \quad \text{si } x > 0$$

Solución:

Como $\frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$ y $\sqrt{x} = x^{1/2}$

Entonces:

$$f(x) = 4x^5 + 3x^{-2} - x^{1/2} + {}^{5}/_{8} \quad \text{si } x > 0$$

Derivando:

$$D_x f(x) = D_x(4x^5 + 3x^{-2} - x + {}^{5}/_{8})$$

$$D_x f(x) = D_x(4x^5) + D_x(3x^{-2}) - D_x(x^{1/2}) + D_x(5/8)$$

$$= 20x^4 - 6x^{-3} - {}^{1}/_{2}\, x^{-1/2} + 0$$

$$= 20x^4 - \frac{6}{x^3} - \frac{{}^{1}/_{2}}{x^{1/2}}$$

$$= 20x^4 - \frac{6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejercicio

Calcular la derivada de la siguiente función:

$f(x) = 5x^4 - \frac{6}{x^2} + \sqrt[3]{x} - \frac{4}{7}$ si $x \neq 0$

Ejemplo

Calcular la derivada de la siguiente función:

$f(x) = (6x + 4x^2)(2x + 3x^5)$

Solución:

$D_x f(x) = (6x - 4x^2)\, D_x(2x + 3x^5) + (2x + 3x^5) D_x(6x - 4x^2)$

$= (6x + 4x^2)(2 + 15x^4) + (2x + 3x^5)(6 - 8x)$ Simplificando

$= 36x^6 + 108x^5 + 8x^2 + 8x$

Ejercicio

Calcular la derivada de la siguiente función:

$g(x) = (2x^2 - 5x^3)(-2x^4 + 7x^5)$

Ejemplo

Calcular la derivada de la siguiente función:

$g(x) = (2x^2 - 3x)(-4x^3 + 5x^4)(6x^5 - 7)$

Solución:

$$D_x g(x) = D_x[(2x^2 - 3x)(-4x^3 + 5x^4)](6x^5 - 7)$$

$$= (2x^2 - 3x)(-4x^3 + 5x^4)\, D_x(6x^5 - 7) + (6x^5 - 7)\, D_x[(2x^2 - 3x)(-4x^3 + 5x^4)]$$

$$= (2x^2 - 3x)(-4x^3 + 5x^4)(30x^4) + (6x^5 - 7)\,[(2x^2 - 3x)\, D_x(-4x^3 + 5x^4) + (-4x^3 + 5x^4)\, D_x(2x^2 - 3x)]$$

$$= (2x^2 - 3x)(-4x^3 + 5x^4)(30x^4) + (6x^5 - 7)[(2x^2 - 3x)(-12x^2 + 20x^3) + (-4x^3 + 5x^4)(4x - 3)]$$

$$= (2x^2 - 3x)(-4x^3 + 5x^4)(30x^4) + (6x^5 - 7)(2x^2 - 3x)(-12x^2 + 20x^3) + (6x^5 - 7)(-4x^3 + 5x^4)(4x - 3)$$

Simplificando

$$D_x g(x) = 660x^{10} - 1380x^9 + 648x^8 - 420x^5 + 805x^4 - 336x^3$$



Ejercicio

Calcular la derivada de la siguiente función:

$g(x) = (2x - 4x^2)(6x - 8x^3)(5x^5 - 9)$

Ejemplo

Calcular la derivada de la siguiente función:

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^3 - 4x^2}$ si $x > 0,\ x \neq 2$

Solución:

$$D_x f(x) = D_x \left[\frac{\sqrt{x}}{2x^3 - 4x^2}\right]$$

$$= \frac{(2x^3 - 4x^2)\, D_x\,(x^{1/2}) - (x^{1/2})\, D_x(2x^3 - 4x^2)}{[2x^3 - 4x^2]^2}$$

$$= \frac{(2x^3 - 4x^2)\,((1/2)x^{-1/2}) - (x^{1/2})(6x^2 - 8x)}{[2x^3 - 4x^2]^2}$$

$$= \frac{\frac{2x^3 - 4x^2}{2\sqrt{x}} - (6x^2 - 8x)\sqrt{x}}{[2x^3 - 4x^2]^2}$$

Ejercicio



Calcular la derivada de la siguiente función:

$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x - 16}$ si $x > 0,\ x \neq 8$

Ejemplo

Calcular la derivada de la siguiente función:

$f(x) = (2x^3 + 9x)^6$

Solución:

$$D_x f(x) = D_x(2x^3 + 9x)^6$$

$$= 6(2x^3 - 9x)^{6-1}\, D_x(2x^3 - 9x)$$

$$= 6(2x^3 - 9x)^5\,(6x^2 - 9)$$

Ejercicio

Calcular la derivada de la siguiente función:

$f(x) = (6x^5 + 4x)^3$

Ejemplo

Calcular la derivada de la siguiente función:

$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 8}$

Solución:

$$D_x f(x) = D_x \sqrt[3]{x^3 - 3x + 8}$$

$$= D_x [x^3 - 3x + 8]^{1/3}$$

$$= \frac{1}{3}[x^3 - 3x + 8]^{1/3 - 1} \; D_x(x^3 - 3x + 8)$$

$$= \frac{1}{3}[x^3 - 3x + 8]^{-2/3} \cdot (3x^2 - 3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{[x^3 - 3x + 8]^{+2/3}} \cdot (3x^2 - 3)$$

$$= \frac{(3x^2 - 3)}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 8)^2}}$$

Ejercicio

Calcular la derivada de la siguiente función:

$g(x) = \sqrt{3x^2 - 4x}$, si $x > \frac{4}{3} \wedge x < 0$

Ejemplo

Calcular la derivada de la siguiente función:

$f(x) = \frac{4x^3 - 5x}{\sqrt{4x^2 - 16}}$ si $x > 2$

Solución:

$$D_x f(x) = D_x \frac{4x^3 - 5x}{\sqrt{4x^2 - 16}}$$

$$= \frac{(4x^2 - 16)^{1/2} D_x(4x^3 - 5x) - (4x^3 - 5x) D_x(4x^2 - 16)^{1/2}}{[\sqrt{4x^2 - 16}]^2}$$

$$= \frac{(4x^2 - 16)^{1/2}(12x^2 - 5) - (4x^3 - 5x)\left(\frac{1}{2}\right)(4x^2 - 16)^{1/2} D_x(4x^2 - 16)}{[\sqrt{4x^2 - 16}]^2}$$

$$= \frac{(4x^2 - 16)^{1/2}(12x^2 - 5) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(4x^3 - 5x)(8x)}{(4x^2 - 16)^{1/2}}}{4x^2 - 16}$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2 - 16} \cdot (12x^2 - 5) \cdot \frac{(4x^3 - 5x)(8x)}{2\sqrt{4x^2 - 16}}}{4x^2 - 16}$$

Ejercicio

Calcular la derivada de la siguiente función:

$f(x) = \frac{5x - 4x^3}{\sqrt{3x^2 - 27}}$ si $x > 3$



Derivadas de las funciones trigonométricas directas

Las derivadas de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante se calcularán aplicando los siguientes teoremas, en los cuales se considera a U como una función continua de x.

1. $D_x \operatorname{sen} U = \cos U D_x U$
2. $D_x \cos U = -\operatorname{sen} U D_x U$
3. $D_x \tan U = \sec^2 U D_x U$
4. $D_x \cot U = -\csc^2 U D_x U$
5. $D_x \sec U = \sec U \tan U D_x U$
6. $D_x \csc U = -\csc U \cot U D_x U$

A partir de los siguientes ejemplos y ejercicios se asume que las funciones son continuas y derivables en su dominio.

Ejemplo

Aplicar los teoremas y calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = sen\,5x + 2\cos 6x^2$$

Solución:

$$\begin{aligned} D_x f(x) &= D_x(sen\,5x + 2\,cos\,6x^2) \\ &= D_x(sen\,5x) + D_x(2\,cos\,6x^2) \\ &= cos\,5x\,D_x 5x + (2sen6x^2)\,D_x 6x^2 \\ &= 5cos5x + 2(-sen6x^2)(12x) \\ &= 5cos5x - 24x\,sen6x^2 \end{aligned}$$



Ejercicio

Aplicar los teoremas y calcular la derivada de la siguiente función:

$$g(x) = 3\,tan\,7x - 2cot\,x^3$$

Ejemplo

Aplicar los teoremas y calcular la derivada de la siguiente función:

$$h(x) = \sqrt[3]{csc\,8x^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} D_x h(x) &= (csc8x^2)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3}(csc8x^2)^{-\frac{2}{3}}\,D_x\,csc8x^2 \\ &= \frac{1}{3} \neq \frac{1}{(csc8x^2)^{\frac{2}{3}}}\,[-csc8x^2 cot8x^2 D_x 8x^2] \\ &= \frac{-16x csc8x^2\,cot\,8x^2}{3\sqrt[3]{csc^2 8x^2}} \end{aligned}$$

Ejercicio

Aplicar los teoremas y calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{sec\ 2x}$$

Ejemplo

Aplicar los teoremas y calcular la derivada de la siguiente función:

$f(x) = \frac{sen\ x^2\ tan\ 3x}{cos\ 5x}$ si el $cos\ 5x \neq 0$

Solución:

$$D_x f(x) = D_x \frac{sen\ x^2\ tan\ 3x}{cos\ 5x}$$

$$= \frac{cos\ 5x\ D_x(sen\ x^2\ tan\ 3x) - senx^2\ tan\ 3x\ D_x(cos\ 5x)}{(cos\ 5x)^2}$$

$$= \frac{cos\ 5x(senx^2 D_x\ tan\ 3x + tan\ 3x\ D_x sen\ x^2) - senx^2\ tan\ 3x\ (-sen5x)\ D_x 5x}{(cos\ 5x)^2}$$

$$= \frac{cos\ 5x(senx^2\ sec^2\ 3x\ D_x 3x + tan\ 3x\ cos\ x^2 D_x x^2) + 5senx^2\ tan\ 3x\ sen5x}{(cos\ 5x)^2}$$

$$= \frac{3\ cos\ 5x\ senx^2\ sec^2\ 3x + 2x\ tan\ 3x\ cos\ x^2 + 5senx^2\ tan\ 3x\ sen5x}{cos^2 5x}$$

Ejercicio

Aplicar los teoremas y calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{sec\ 3x\ sen\ 3x}{cot\ 5x} \text{ si } cot\ 5x \neq 0$$

Derivada de las funciones trigonométricas inversas

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas se obtienen aplicando los siguientes teoremas.

Debe considerarse que u es una función de x; esto es $u = f(x)$

1. $D_x \, arc\,tan\, u = \frac{1}{1+u^2} D_x u$
2. $D_x \, arc\,cot\, u = -\frac{1}{1+u^2} D_x u$
3. $D_x \, arc\,sen\, u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$
4. $D_x \, arc\,cos\, u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$
5. $D_x \, arc\,sec\, u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$
6. $D_x \, arc\,csc\, u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$

Ejemplo

Con base en los teoremas, calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = arc\,sen\,(2x^2 - 5)$$

Solución:

$$D_x f(x) = D_x arc\,sen\,(2x^2 - 5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2-5)^2}} D_x(2x^2 - 5)$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-5)^2}}$$

Ejercicio

Con base en los teoremas, calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = arc\,cos\,(4 - 2x^2)$
2. $f(x) = \frac{\sec 6x}{arc\cos x^2}$

Derivadas de las funciones exponenciales

Los teoremas que se usan para calcular la derivada de las funciones exponenciales se presentan a continuación; en éstos se considera a u como una función de x.

1. $D_x a^u = a^u \ ln \ a \ D_x u$
2. $D_x \ e^u = e^u \ D_x u$

Ejemplo

Obtener la derivada de la siguiente función usando los teoremas correspondientes:

$$f\,(x) = 3^{(\,x^2 - 9x\,)}$$

Solución:

$$\begin{aligned} D_x f(x) &= D_x \ 3^{(\,x^2 - 9x\,)} \\ &= 3^{(\,x^2 - 9x\,)} \ (ln \ 3) \ D_x(x^2 - 9x) \\ &= 3^{(\,x^2 - 9x\,)} \ (ln \ 3) \ D_x(2x - 9) \\ &= (2x - 9) \ 3^{(\,x^2 - 9x\,)} \ (ln\, 3) \end{aligned}$$

Ejercicio

Calcular la derivada de la siguiente función usando los teoremas correspondientes:

$$f(x) = 8^{(x^3 - x)}$$



Ejemplo

Calcular la derivada de la siguiente función usando los teoremas correspondientes:

$$h(x) = e^{csc\, x^3}$$

Solución:

$$\begin{aligned} D_x h(x) &= D_x \ e^{csc\, x^3} \\ &= e^{csc\, x^3} \ D_x csc\ x^3 \\ &= e^{csc\, x^3} (-csc\ x^3 \ cot\ x^3 \ (3x^2)) \\ &= -3x^2 \ csc\ x^3 \ cot\ x^3 \ e^{csc^3} \end{aligned}$$

M3 Basado en Competencias

Ejercicio

Calcular la derivada de la siguiente función usando los teoremas correspondientes:

$$f(x) = e^{sen\, x^2}$$

Ejemplo

Calcular la derivada de la siguiente función usando los teoremas correspondientes:

$$g(x) = tan\, 2^{3x+5} + ln\, sec\, e^{7x-3}$$

Solución:

$$D_x f(x) = D_x(tan\, 2^{3x+5} + ln\, sec\, e^{7x-3})$$

$$= sec^2\, 2^{3x+5}\; D_x 2^{3x+5} + \frac{Dx\, sec\, e^{7x-3}}{sec\, e^{7x-3}}$$

$$= sec^2\, 2^{3x+5}\; ln2\; Dx(3x+5) + \frac{sec\, e^{7x-3}\; tan\, e^{7x-3}\; Dxe^{7x-3}}{sec\, e^{7x-3}}$$

$$= sec^2\; 2^{3x+5}\; ln\; 2\,(3) + tan\, e^{7x-3}\; e^{7x-3}\; Dx(7x-3)$$

$$= 3\; sec^2\; 2^{3x+5}\; 2^{3x+5}\; ln\; 2 + tan\, e^{7x-3}\; e^{7x-3}\; Dx(7)$$

$$= 3\; sec^2\; 2^{3x+5}\; 2^{3x+5}\; ln\; 2 + 7\; tan\, e^{7x-3}\; e^{7x-3}$$

Ejercicio

Calcular la derivada de la siguiente función usando los teoremas correspondientes:

$$f(x) = cot(4^{3-2x}) + ln\,(sen\, e^{2x-1})$$

Derivada de las funciones logarítmicas

Para calcular la derivada de las funciones logarítmicas, se aplicarán los siguientes teoremas, considerando que $u = f(x)$.

1. $D_x log_a U = \frac{DU}{U} log_a e$
2. $D_x \ln U = \frac{DU}{U}$

Ejemplo

Usando los teoremas, derivar la siguiente función:

$$f(x) = log_6(8x^2 + 4x + 15)$$

Solución:

$$D_x f(x) = D_x log_6(8x^2 + 4x + 15)$$

$$= \frac{D(8x^2 + 4x - 15)}{8x^2 + 4x + 15}$$

$$= \frac{16x + 4}{8x^2 + 4x - 15} log_6 e$$

Ejercicio

Usando los teoremas, derivar la siguiente función:

$$f(x) = log_2 (x^3 + 4x^2 - 2x + 1)$$



Ejemplo

Con el uso de los teoremas, derivar la siguiente función:

$$g(x) = log_4 \sec 2x$$

Solución:

$$D_x g(x) = D_x log_4 \sec 2x$$

$$= \frac{Dx \sec 2x}{\sec 2x} log_4 e$$

$$= \frac{\sec 2x \tan 2x \, Dx \, 2x}{\sec 2x} log_4 e$$

$$= \frac{\sec 2x \tan 2x \, 2}{\sec 2x} log_4 e$$

$$2 \tan 2x \, log_4 e$$

M3 Basado en Competencias

Ejercicio

Con el uso de los teoremas, derivar la siguiente función:

$$h(x) = log\ tan\ 5x$$

Ejemplo

Con el uso de los teoremas, derivar la siguiente función:

$$f(x) = ln(3x^4 - 7x^2)$$

Solución:

$$D_x f(x) = D_x\, ln(3x^4 - 7x^2)$$

$$= \frac{Dx\,(3x^4 - 7x^2)}{3x^4 - 7x^2}$$

$$= \frac{12x^3 - 14\,x}{3x^4 - 7x^2}$$

Ejercicio

Con el uso de los teoremas, derivar la siguiente función:

$$h(x) = ln(5x^3 + 8x^2)$$

3.1 Derivación implícita

Hasta este momento, las funciones presentadas en el texto se han enunciado de forma *explícita*. Por ejemplo, en la ecuación

$$y = 3x^2 - 2, \ldots \quad (1)$$

la variable y está escrita explícitamente en términos de la variable x, y decimos que y es una *función de* x, ya que podemos escribir:

$$y = f(x), \text{ en donde } f(x) = 3x^2 - 2$$

Sin embargo la ecuación

$$3x^2 - y = 2, \ldots \quad (2)$$

define la misma función f, ya que al despejar y obtenemos la ecuación (1).
En el caso de la ecuación (2) decimos que y es una *función implícita de* x o que f está definida *implícitamente* por la ecuación (2).

Así, una regla de correspondencia de la forma $f(x, y) = 0$; es decir, cuando ninguna variable está despejada en términos de la otra, representará una función *implícita*. Son ejemplos de este tipo de funciones las siguientes:

$$xy + x - 2y - 1 = 0, \ x^2 - xy + y^2 = 3, \ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \ y^2 senx + y = arctanx$$

La derivada y' de estas funciones se puede determinar por dos procedimientos:

1. Despejando y en la función y calculando y' directamente (salvo para funciones muy sencillas, este procedimiento resulta pocas veces viable o impráctico).
2. Se considera primeramente a y como función de x; es decir, $y = f(x)$; después se derivan ambos miembros de la igualdad con respecto a x, se efectúan operaciones, se trasponen todos los términos que contengan a y' al primer miembro, se factoriza y' y finalmente se le despeja.

A este segundo procedimiento se le llama *derivación implícita* y para aplicarlo se deben tomar en cuenta las siguientes condiciones:

a) $D_x y = y'$

b) $D_x(xy) = xy' + y$ (teorema del producto ya que $y = f(x)$)

c) $D_x y^n = ny^{n-1}y'$ (teorema de función compuesta o regla de la cadena)

d) $D_x x^n y^n = x^n n y^{n-1} y' + y^n n x^{n-1}$ (teorema del producto y regla de la cadena)

Cabe aclarar que no toda ecuación $f(x, y) = 0$ representa una función, sino que puede ser una relación, como por ejemplo $x^2 + y^2 = 1$.

En los siguientes ejemplos aplicaremos la derivación implícita y supondremos que la ecuación dada en x y y, es una función derivable f.

Ejemplo

Mediante derivación implícita, determinar la derivada con respecto a x de la función $5x^2y^3 + 2x^2 = 3 + y^2$.

Solución:

Derivamos todos los términos con respecto a x y se aplican las condiciones mencionadas

$$D_x(5x^2y^3) + D_x(2x^2) = D_x(3) + D_x(y^2)$$

$$[5x^2D_x(y^3) + y^3D_x(5x^2)] + 4x = 0 + 2yy'$$

$$5x^2(3y^2y') + y^3(10x) + 4x = 2yy'$$

Efectuamos operaciones y ordenamos

$$15x^2y^2y' + 10xy^3 + 4x = 2yy'$$

Trasponemos los términos que contienen a y' al primer miembro y los demás al segundo

$$15x^2y^2y' - 2yy' = -10xy^3 - 4x$$

Factorizamos a y' como factor común

$$y'(15x^2y^2 - 2y) = -10xy^3 - 4x$$

Finalmente despejamos a y' pasando el otro factor dividiendo al segundo miembro y se tendrá la derivada pedida

$$y' = \frac{-10xy^3 - 4x}{15x^2y^2 - 2y}$$



Ejercicio

Mediante derivación implícita, determinar la derivada con respecto a x de la función $4y^4 + x^3 = 2x + xy^2$.

Ejemplo

Mediante derivación implícita, determinar la derivada con respecto a x de la función $y^3cosx + 2y - 5xy = arctanx$.

Solución:

Derivamos todos los términos con respecto a x y se aplican las condiciones mencionadas

$$[y^3 D_x(cosx) + cosxD_x(y^3)] + 2yy' - [5xD_x(y) + yD_x(5x)] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y^3(-senx) + cosx(3y^2y') + 2yy' - 5xy' - y(5) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$-y^3 senx + 3cosxy^2y' + 2yy' - 5xy' - 5y = \frac{1}{1+x^2}$$

Dejamos los términos que contienen a y' en el primer miembro y trasponemos los demás al segundo

$$3cosxy^2y' + 2yy' - 5xy' = y^3 senx + 5y + \frac{1}{1+x^2}$$

Factorizamos a y' como factor común

$$y'(3cosxy^2 + 2y - 5x) = y^3 senx + 5y + \frac{1}{1+x^2}$$

Finalmente despejamos a y'

$$y' = \frac{y^3 senx + 5y + \frac{1}{1+x^2}}{3cosxy^2 + 2y - 5x}$$

Ejercicio

Mediante derivación implícita, determinar la derivada con respecto a x de la función $ln(x+y) + x^2 - 2y^3 = 10$.



Ejemplo

Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $3(x^2+y^2)^2 = 100x^2 - 100y^2$ en el punto (4, 2).

Solución:

Recordemos que la derivada y' representa geométricamente a la pendiente de la recta tangente en el punto considerado.

Entonces derivamos implícitamente:

$$3(2)(x^2+y^2)D_x(x^2+y^2) = D_x(100x^2) - D_x(100y^2)$$

$$6(x^2+y^2)(2x+2yy') = 200x - 200yy'$$

$$(6x^2+6y^2)(2x+2yy') = 200x - 200yy'$$

$$12x^3 + 12x^2yy' + 12xy^2 + 12y^3y' = 200x - 200yy'$$

$$12x^2yy' + 12y^3y' + 200yy' = 200x - 12x^3 - 12xy^2$$

$$y'(12x^2y + 12y^3 + 200y) = 200x - 12x^3 - 12xy^2$$

$$y' = \frac{200x - 12x^3 - 12xy^2}{12x^2y + 12y^3 + 200y}$$

Podemos dividir entre 4 ambas expresiones de la fracción:

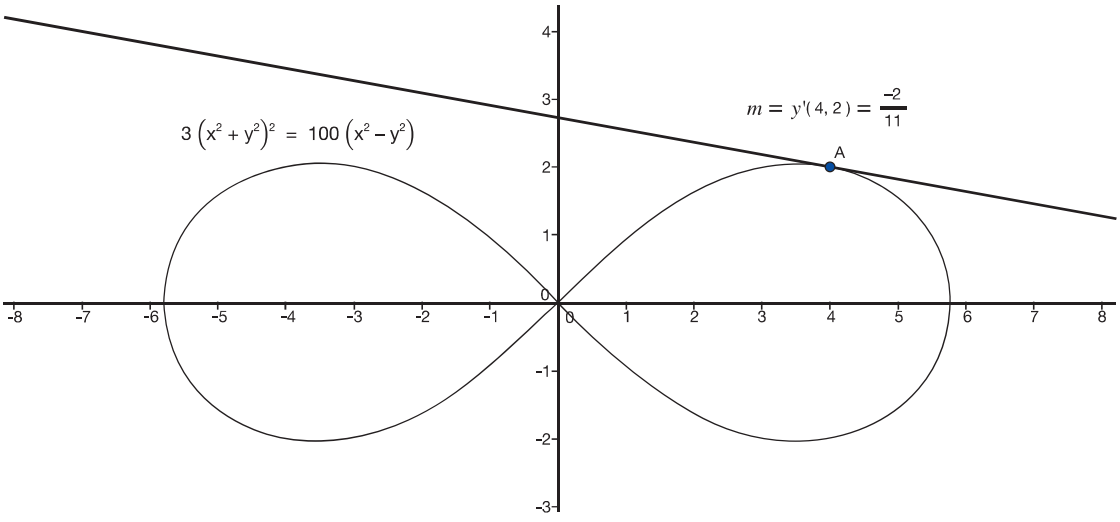
$$y' = \frac{50x - 3x^3 - 3xy^2}{3x^2y + 3y^3 + 50y}$$

Finalmente evaluamos a y' en el punto solicitado:

$$y' = \frac{50(4) - 3(4)^3 - 3(4)(2)^2}{3(4)^2(2) + 3(2)^3 + 50(2)}$$

$$y' = \frac{-40}{220} = \frac{-2}{11}$$

La gráfica de la relación junto con la tangente en el punto considerado se realiza con un paquete graficador y se presenta en la siguiente figura (a la curva se le llama *lemniscata*):

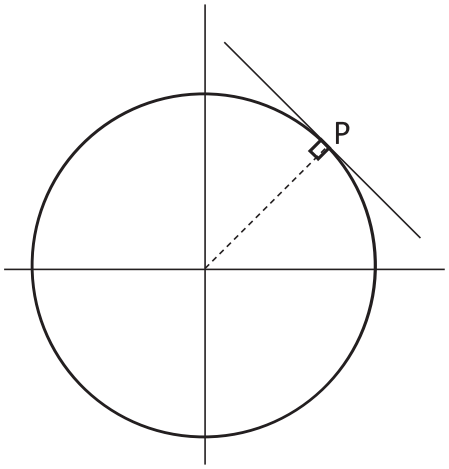


Ejercicio

Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ en el punto (1, 3) y trazar la gráfica con un paquete graficador.

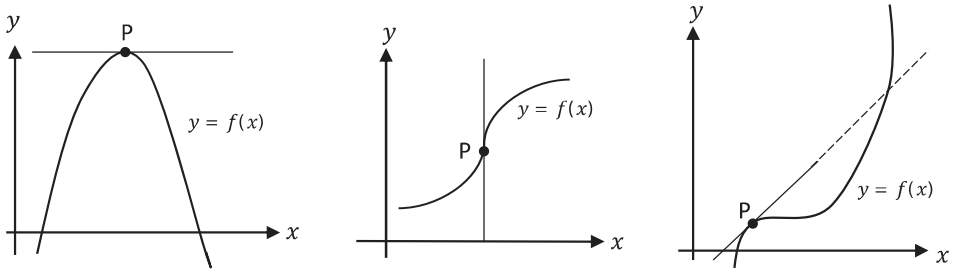
4. Ecuación de la recta tangente y normal a una curva

¿Qué significa que una recta sea tangente a una curva en un punto? En geometría plana, una recta tangente en un punto *P* sobre una circunferencia; es la recta perpendicular al radio que pasa por *P*, como se muestra:



Sin embargo, esa definición no puede extenderse a curvas más complejas, ya que una recta tangente puede intersectar a una curva varias veces. Por ejemplo, ¿cómo se podrían definir las rectas tangentes que se observan en las siguientes figuras?, ¿diciendo que una recta es tangente a una curva en un punto *P* si toca a la curva en *P* sin atravesarla? Tal definición sería correcta para la primera curva de las tres que mostramos, pero no para la segunda. También se podría decir que una recta es tangente a una curva si la toca o hace intersección en ella

exactamente en el punto *P*, definición que serviría para una circunferencia, pero no para curvas más generales, como la tercera curva.



Para definir la recta tangente en un punto *P* sobre la gráfica de una ecuación, es suficiente dar la *pendiente* m de la tangente, ya que ésta determina completamente a la recta (junto con el punto por supuesto). Así pues, el problema de encontrar la recta tangente en un punto *P* de una curva se reduce al de calcular su pendiente en ese punto. Para esto aplicaremos lo visto en el tema 2 del presente módulo, en el cual se estableció que la derivada $f'(x)$ de una función representa geométricamente la pendiente de la recta tangente en un punto considerado y también emplearemos la ecuación punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ vista en geometría analítica.

Así entonces, sea una función $f(x)$ continua y derivable en $x = x_1$, entonces la función tiene una *recta tangente* en el punto de coordenadas $(x_1, f(x_1))$ y su ecuación es de la forma.

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

en la que $f'(x_1)$ es la pendiente de la recta tangente en $x = x_1$.

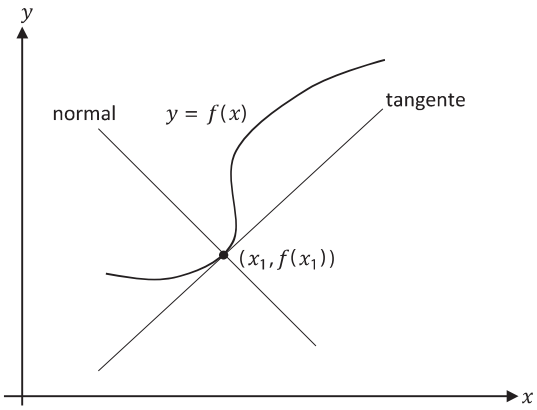
Por otra parte, una recta normal a una curva en un punto dado es la recta perpendicular a la recta tangente en ese mismo punto, denominado punto de tangencia, y cuya pendiente será, recordando la condición de perpendicularidad $m_1 m_2 = -1$,

$$m_N = -\frac{1}{f'(x_1)}$$

y su ecuación tendrá la forma

$$y - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x\ )}(x - x_1)$$

Gráficamente se tiene



Si al evaluar la derivada de una función en un punto de abscisa x_1, resulta que no está definida, entonces la recta tangente en ese punto es vertical, y tendrá por ecuación $x = x_1$.

Igualmente, si al evaluar la derivada de una función en un punto de abscisa x_1, el resultado es 0, indicará que la recta tangente es horizontal con ecuación $y = f(x_1)$.

Ejemplo

Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 5x + 2$ en el punto de abscisa $x_1 = 0$. Trazar la gráfica de la función y las gráficas de la recta tangente y normal en un mismo plano.

Solución:

Calculamos primeramente la ordenada del punto de tangencia sustituyendo $x_1 = 0$ en la regla de correspondencia de la función

$$f(x_1) = f(0) = (0)^2 + 5(0) + 2$$

$$f(x_1) = f(0) = 2, \text{ entonces}$$

$$P_T = (0,2)$$

Después se calcula la derivada de la función y la evaluamos en $x_1 = 0$ para tener la pendiente de la recta tangente

$$f'(x) = 2x + 5$$

$$f'(x_1) = f'(0) = 2(0) + 5$$

$$f'(x_1) = f'(0) = 5 = m_T$$

Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación de la recta tangente y simplificamos para llegar a la forma general de la ecuación de esta recta

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

$$y - 2 = 5(x - 0)$$

$$y - 2 = 5x$$

$$5x - y + 2 = 0$$

Posteriormente sustituimos los valores en la ecuación de la recta normal para obtener su forma general

$$y - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

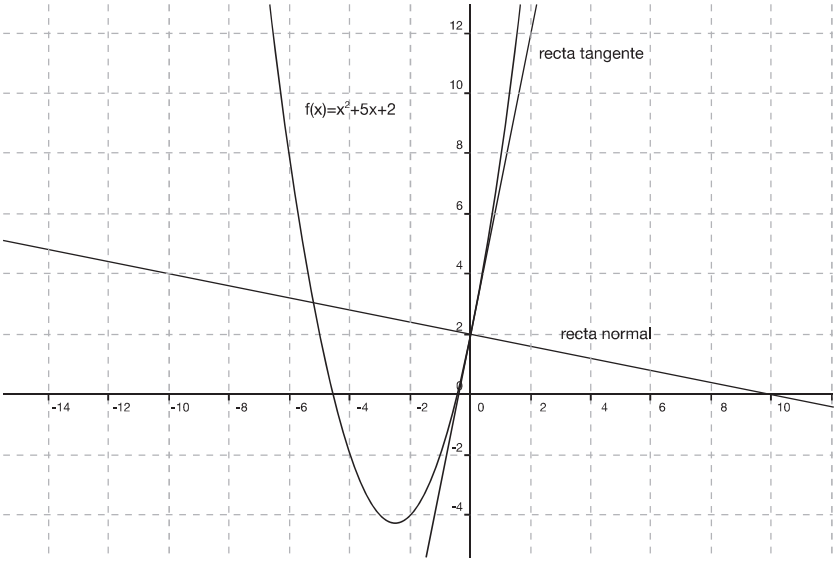
$$y - 2 = -\frac{1}{5}(x - 0)$$

$$5(y - 2) = -1(x)$$

$$5y - 10 = -x$$

$$x + 5y - 10 = 0$$

La gráfica de la función con las rectas tangente y normal en el punto (0,2) es la siguiente



Ejercicio

Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x_1 = 0$. Trazar la gráfica de la función y las gráficas de la recta tangente y normal en un mismo plano.

Ejemplo

Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 2x + 2$ que tiene pendiente $m = -2$.

Dos soluciones.

Solución:

Derivamos la función

$f'(x) = -3x^2 - 6x - 2$

Como la derivada es la pendiente de la tangente, la igualamos con -2 que es la condición pedida

$f'(x) = -3x^2 - 6x - 2 = -2$

simplificamos

$-3x^2 - 6x = 0$

Resolvemos la ecuación cuadrática resultante por factorización

$(-3x)(x + 2) = 0$

Igualamos cada factor con cero

$-3x = 0, (x + 2) = 0$

De donde

$x_1 = 0, x_2 = -2$

Por tanto tendremos dos puntos de tangencia que se obtienen al sustituir los valores anteriores en la función

Punto *P*

$$f(-2) = -(-2)^3 - 3(-2)^2 - 2(-2) + 2$$
$$f(-2) = 2$$
$$P(-2, 2)$$

Punto *Q*

$$f(0) = -(0)^3 - 3(0)^2 - 2(0) + 2$$
$$f(0) = 2$$
$$Q(0, 2)$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes serán

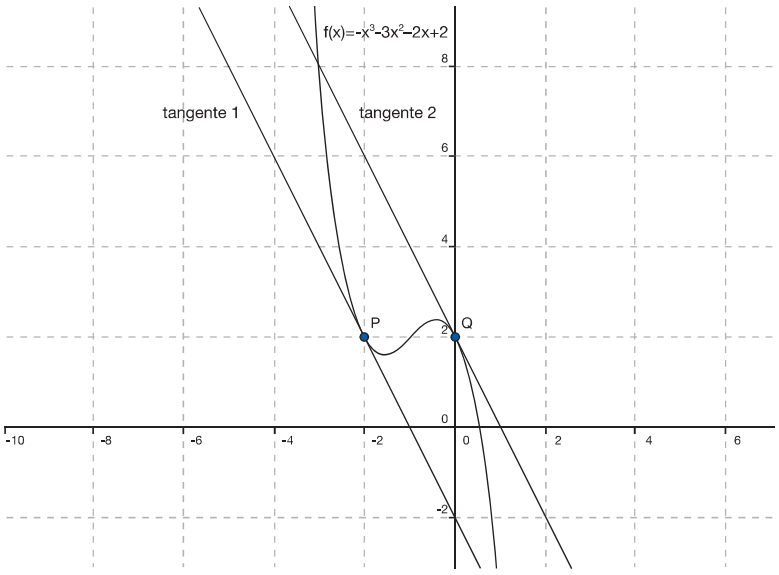
Tangente 1

$$y - 2 = -2(x - (-2))$$
$$y - 2 = -2(x + 2)$$
$$y - 2 = -2x - 4$$
$$2x + y + 2 = 0$$

Tangente 2

$$y - 2 = -2(x - 0)$$
$$y - 2 = -2x$$
$$2x + y - 2 = 0$$

La gráfica de la función con las dos tangentes es la siguiente:



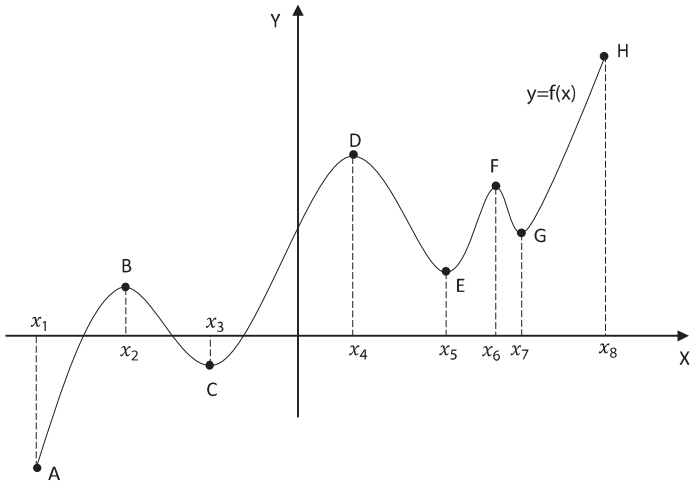
M3 Basado en Competencias

Ejercicio

Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ que tiene pendiente $m = 3$. Dos soluciones.

5. Función creciente y decreciente

Supongamos que la siguiente figura representa la gráfica de una función f continua para toda x en el intervalo cerrado $[x_1, x_8]$.



La figura anterior muestra que cuando un punto se desplaza a lo largo de la curva, digamos de *A* a *B*, los valores de la función crecen cuando la abscisa crece, y que cuando un punto se mueve a lo largo de la curva, por ejemplo de *B* a *C*, los valores de la función decrecen cuando la abscisa crece. Se habla entonces de que f es *creciente* en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ y que es *decreciente* en el intervalo cerrado $[x_2, x_3]$.

De lo anterior podemos establecer las siguientes definiciones.

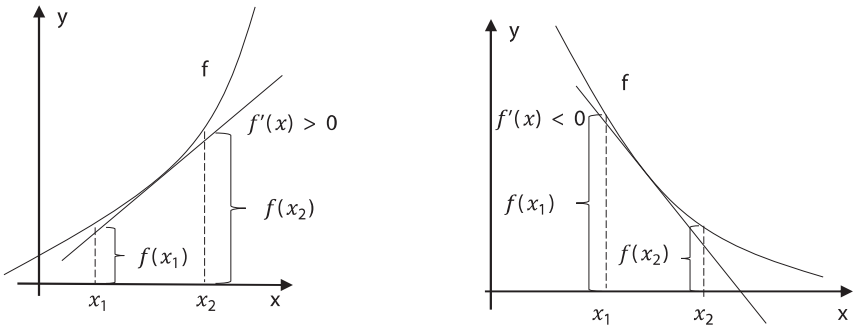
Si una función f está definida en un intervalo I, entonces:

I) f es creciente en I si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$.

II) f es decreciente en I si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$.

La función de la figura es creciente en los intervalos cerrados $[x_1, x_2]$; $[x_3, x_4]$; $[x_5, x_6]$; $[x_7, x_8]$; y es decreciente en los intervalos $[x_2, x_3]$; $[x_4, x_5]$; $[x_6, x_7]$.

En la siguiente figura se dan interpretaciones geométricas de las definiciones anteriores (si f fuera constante, su gráfica sería un segmento de recta horizontal).



Observemos que en el intervalo en el que la función es creciente, el ángulo de inclinación de una tangente es agudo; es decir, su pendiente es positiva y como la pendiente de la tangente es la derivada, entonces $f'(x) > 0$.

Igualmente, cuando la función es decreciente, el ángulo de inclinación de una tangente es obtuso, por lo que su pendiente es negativa y entonces $f'(x) < 0$.

5.1. Máximos y mínimos de una función

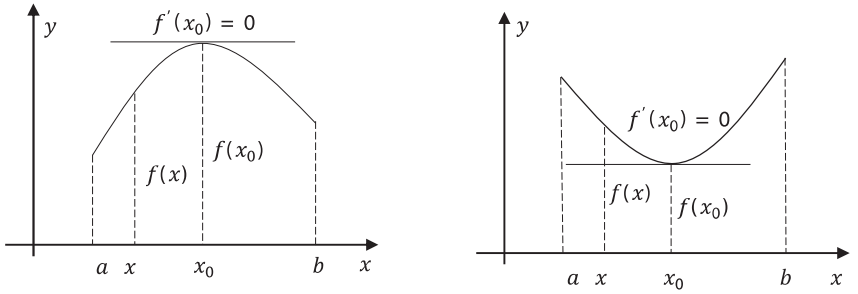
En este tema y en el siguiente se verá un método para determinar los valores máximos y mínimos de las funciones y la utilidad de éstos para trazar un esbozo de la gráfica de una función.

Para esto, definiremos primeramente lo que es el máximo y el mínimo de una función.

Definición
Si una función f está definida en intervalo I y x_0 es un número en I; entonces $f(x_0)$ es el valor máximo de f en I si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $(\forall\, x \in I)$, $f(x_0)$ es el valor mínimo de f en I si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $(\forall\, x \in I)$

En otras palabras, para que el valor de f en x_0 sea un máximo, debe ser mayor o igual a todos los valores de f en los puntos próximos y para que el valor de f en x_0 sea un mínimo, debe ser menor o igual a todos los valores de f en los puntos próximos.

En las siguientes figuras se ilustran gráficamente un valor máximo y uno mínimo de una función en un intervalo cerrado [a, b].



Los valores máximo y mínimo de f se llaman *valores extremos* o simplemente *extremos* de f.

Mencionaremos a continuación un teorema que sirve para determinar los extremos de una función:

> Si f tiene un extremo en un punto x_0, entonces $f'(x_0) = 0$ o bien $f'(x_0)$ no existe

De esta manera, si f es diferenciable en un punto en el que tiene un extremo, entonces la gráfica de f tiene una tangente horizontal en ese punto.

Cabe aclarar que, aunque las gráficas en las figuras anteriores tienen una tangente horizontal en el punto $(x_0, f(x_0))$, también pueden aparecer valores máximos y mínimos en las abscisas de los puntos en los que las gráficas tienen esquinas o en los puntos extremos de los dominios.

Igualmente, cabe mencionar que algunas funciones pueden tener un máximo y un mínimo más de una vez y otras pueden tener un valor máximo, pero no uno mínimo en un intervalo o viceversa. Otras funciones pueden no tener un valor máximo ni uno mínimo.

5.2. Criterio de la segunda derivada

El criterio de la segunda derivada; es decir, la derivada de la primera derivada (denota como $f''(x)$) sirve para saber si una función tiene un máximo, o un mínimo, en un determinado valor y se establece de la siguiente manera.

> Si $f(x)$ es diferenciable en un intervalo abierto que contiene un valor x_0 de f y $f''(x_0)$ existe; entonces:
> si $f''(x_0) < 0$, f tiene máximo en x_0
> si $f''(x_0) > 0$, f tiene mínimo en x_0

Los pasos que enunciamos a continuación resumen lo visto en los puntos 5, 5.1 y el criterio de la segunda derivada y sirven para determinar los valores extremos de una función $f(x)$, así como los intervalos en los que es creciente y decreciente.

1. Se obtiene la derivada de la función
2. Se iguala con 0 esta derivada
3. Se resuelve la ecuación resultante $f'(x) = 0$ para obtener los valores o números críticos.*
4. Se obtiene la segunda derivada de la función
5. Se evalúa la segunda derivada en cada uno de los valores críticos obtenidos en el paso 3 y se aplica el criterio de la segunda derivada
6. Se obtiene la ordenada de los puntos máximos y mínimos (llamados *puntos críticos*) sustituyendo los valores críticos en la función original
7. Se localizan en el plano cartesiano los puntos máximos y mínimos y se traza un esbozo de la gráfica de la función

* Un número x_0 en el dominio de $f(x)$ tal que $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no esté definido, se llama *número o valor crítico* de $f(x)$. En este paso la condición $f'(x_0) = 0$ no garantiza que la función tenga un extremo en x_0.

8. Se establecen los intervalos en los que la función es creciente y decreciente; en un punto máximo la función cambia de creciente a decreciente y en un punto mínimo de decreciente a creciente.

Los pasos descritos se aplican en los siguientes ejemplos.

Ejemplo

Trazar la gráfica de la siguiente función determinando sus puntos máximos y mínimos, así como los intervalos en los cuales es creciente y decreciente.

$$f(x) = 3x^2 + 3x - 2$$

Solución:

Primero calculamos la primera derivada $f'(x) = 6x + 3$
Igualamos con 0 y resolvemos la ecuación: $6x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$; a este punto se le llama *valor crítico*

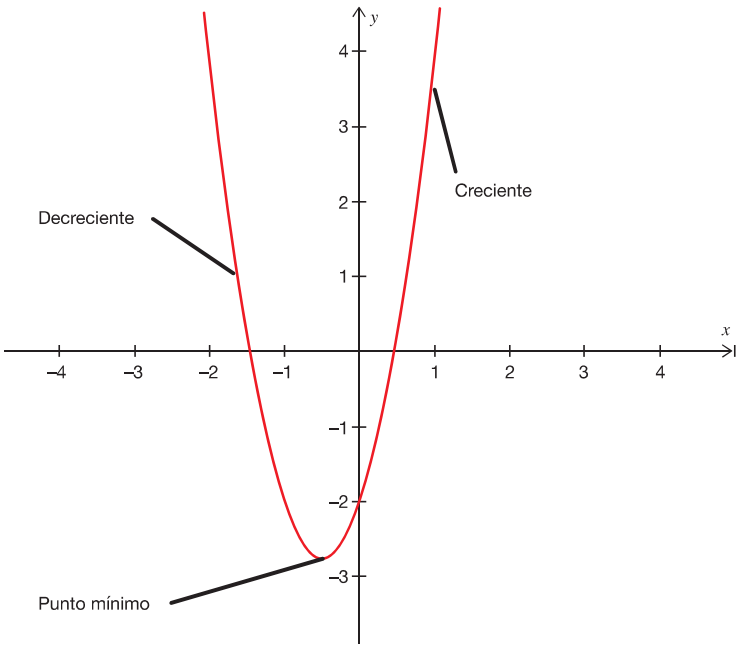
Calculando la segunda derivada: $f''(x) = 6$
$f''(x) = 6 > 0$, como la segunda derivada es mayor que 0, tenemos un punto mínimo.

En $x = -\frac{1}{2}$, sustituyendo en la función original

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - 2 = -\frac{11}{4}$$

Por lo que el punto mínimo es $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$
Gráficamente



Intervalo donde la función es creciente: $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$

Intervalo donde la función es decreciente: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

Ejercicio

Trazar la gráfica de la siguiente función determinando sus puntos máximos y mínimos, así como los intervalos en los cuales es creciente y decreciente.

$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

Ejemplo

Trazar la gráfica de la siguiente función determinando sus puntos máximos y mínimos, así como los intervalos en los cuales es creciente y decreciente.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

Solución:

Primero calculamos la primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 3$
Igualamos con 0 y resolvemos la ecuación de segundo grado:

$3x^2 - 12x + 3 = 0$

$3x^2 - 12x + 3 = 0$ aplicando fórmula general: $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$

Sustituyendo los datos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

Por lo que una solución es con el signo positivo: $\frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{7.46}{2} = 3.73$

Y otra con el signo negativo: $\frac{4 - \sqrt{12}}{2} = \frac{0.5358}{2} = 0.2679$

A los puntos x = 3.73 y x = 0.2679 se les llama *valores críticos*.

Calculando la segunda derivada: $f''(x) = 6x - 12$

Sustituyendo los puntos críticos en la segunda derivada para encontrar los puntos máximos y mínimos:

Si x = 3.73, entonces $f''(x) = 6x - 12 = 6(3.73) - 12 = 10.38$

Como la segunda derivada $f''(x) = 10.38 > 0$, tenemos un punto mínimo.

Y se encuentra sustituyendo el valor de x en la función original.

Si x = 3.73:

$$f(3.73) = (3.73)^3 - 6(3.73)^2 + 3(3.73) + 10 =$$

$$= 51.9 - 83.47 + 11.19 + 10 = -10.38$$

Y el punto mínimo es (3.73,-10.38)

Si x = 0.2679, entonces $f''(x) = 6x - 12 = 6(0.2679) - 12 = -10.39$

Como la segunda derivada $f''(x) = -10.39 < 0$, tenemos un punto máximo.

Y se encuentra sustituyendo el valor de x en la función original.

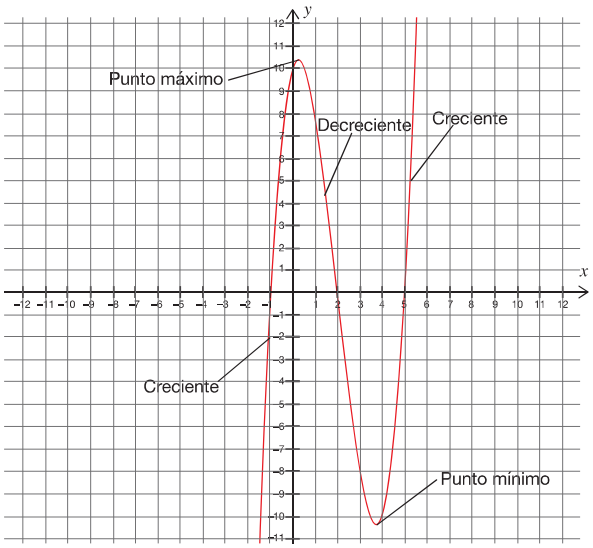
Si x = 0.2679:

$$f(0.2679) = (0.2679)^3 - 6(0.2679)^2 + 3(0.2679) + 10 =$$

$$= 0.01922 - 0.4306 + 0.8037 + 10 = 10.39$$

El punto máximo es (0.2679,10.39)

La gráfica queda de la siguiente manera:



Intervalo donde la función es creciente: $(-\infty, 0.2679]$ $[3.73, \infty)$

Intervalo donde la función es decreciente: [0.2679, 3.73]

Ejercicio

Trazar la gráfica de la siguiente función determinando sus puntos máximos y mínimos, así como los intervalos en los cuales es creciente y decreciente.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$$



Ejemplo

Trazar la gráfica de la siguiente función determinando sus puntos máximos y mínimos, así como los intervalos en los cuales es creciente y decreciente.

$$f(x) = x^4 - 3x^2$$

Solución:

Primero calculamos la primera derivada: $f'(x) = 4x^3 - 6x$

Igualamos con 0 y resolvemos la ecuación: $4x^3 - 6x = 0$

$x(4x^2 - 6) = 0$

$x = 0$

$(4x^2 - 6) = 0 \quad x = \pm\sqrt{\frac{6}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

A los puntos $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, se les llama *valores críticos*.

Calculando la segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 6$

Sustituyendo los valores críticos en la segunda derivada para encontrar los puntos máximos y mínimos:

Si $x = 0$

$f''(0) = 12(0)^2 - 6 = -6 < 0$, hay un punto máximo

Sustituyendo en la función original

$f(0) = (0)^4 - 3(0)^2 = 0$, por lo que el punto máximo está en (0, 0)

Si $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$f''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 12\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 6 = 12 > 0$, hay un punto mínimo

Sustituyendo en la función original

$f(x)=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4-3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=-\frac{9}{4}$, por lo que el punto mínimo está en $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{9}{4}\right)$

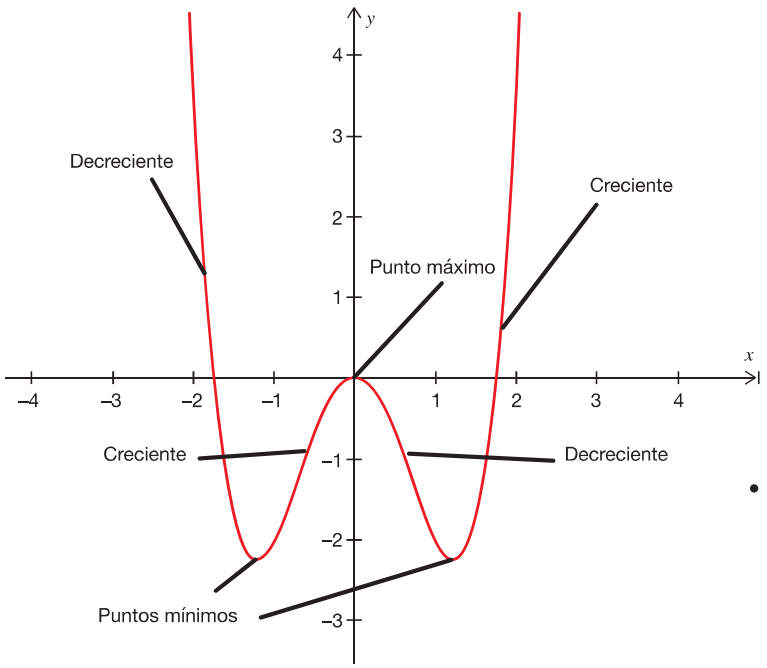
Si $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$f''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=12\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-6=12>0$, hay un punto mínimo

Sustituyendo en la función original

$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4-3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=-\frac{9}{4}$, por lo que el punto mínimo está en $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{9}{4}\right)$

Gráficamente



Intervalo donde la función es creciente: $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)\cup\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$

Intervalo donde la función es decreciente: $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cup\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

Ejercicio



Trazar la gráfica de la siguiente función determinando sus puntos máximos y mínimos, así como los intervalos en los cuales es creciente y decreciente.

$$f(x) = 2x^4 - 2x^2$$

6. Problemas de optimización

Optimización es determinar valores críticos de la variable independiente que hacen que la función tenga un valor máximo o un valor mí

El concepto de derivada se puede aplicar en problemas de optimización en los que se requiera calcular ganancias máximas, gastos mínimos, materiales mínimos, entre otros; en la mayoría de estos problemas se presentan dos condiciones –área y volumen, volumen y costo, costo y área, y más–, lo que nos permite hacer el cálculo de una variable y otra queda en función de la primera. Lo importante es observar qué datos se citan y cuál es la función a optimizar.

Los problemas de optimización se resuelven con la aplicación de un máximo o un mínimo de una función.

Para dar solución a un problema de optimización se requiere plantear una función de la presentación del problema, mediante la extracción de los datos que se requieren para poder aplicar los conceptos de máximos y mínimos.

Se sugiere seguir los siguientes pasos para resolver ejercicios de optimización.

1. Leer el problema para identificar los siguientes elementos:
   - Datos del problema
   - Condiciones del problema
   - Comprender lo que se pide optimizar del problema
2. Asignar las variables que usarás en el problema para plantearlo y resolverlo.
3. Realizar un dibujo de ser necesario, el cual te permitirá tener una visión más amplia del problema.
4. Plantear la función objetivo en término de las variables propuestas. Esta será la que te permitirá optimizar; puede quedar con dos variables.
5. Establecer una ecuación para cada una de las condiciones o restricciones del problema.
6. Despejar una variable de las ecuaciones que se generen en el paso 5.
7. Sustituir en la función objetivo generada en el paso 4.
8. Obtener máximos o mínimos de la función generada en el paso 7.
9. Concluir el problema y realizar una comprobación con los resultados obtenidos.

Ejemplo

La suma de los números es 12. Obtener los números si el producto del doble del primero por el triple del segundo es máximo.

Solución:

Se consideran los números x, y.

Entonces $x + y = 12$ (1)

Tal que $P = (2x)(3y)$ debe ser máximo

Despejando y de la ecuación (1)

$$y = 12 - x \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en *P*.

$$P = (2x)\,3\,(12 - x)$$

$P = -6x^2 + 72x$ función de la cual se desea obtener el producto máximo

Derivando la función en P e igualándola a 0, se tiene:

$$P' = -12x + 72 = 0$$

$$3(-4x + 24) = 0$$

$x = 6$ valor crítico.

Calculando P'' y analizando para el valor crítico:

$$P = -12$$

$P'' = 12 < 0$, se presenta un máximo para la función en $x = 6$.

$x = 6$ corresponde a uno de los números;

para calcular el otro se sustituye en la ecuación (2):

$$y = 12 - 6 = 6$$

Por lo tanto, los números son 6 y 6, obteniéndose un máximo producto del doble del primero por triple del segundo igual a 216.

Ejercicio

La suma de dos números es 14; obtenga los números si el producto del quíntuplo del primero por el doble del segundo es máximo.

Ejemplo

Se requiere conseguir un recipiente cilíndrico, sin tapa, empleando 480 cm^2 de lámina, ¿qué dimensiones debe tener el cilindro para que el volumen contenido en él sea máximo?

Solución:

Considérese:
r = radio de la base
h = altura del cilindro

Entonces la superficie es:

$$\pi r^2 + 2\pi r h = 480 \quad (1)$$

Y el volumen: $V = \pi r^2 h$ debe ser máximo

Despejando h de la ecuación (1):

$$h = \frac{480 - \pi r^2}{2\pi r} \quad (2)$$

Y sustituyendo (2) en el volumen V:

$$V = (\pi r^2)\frac{480 - \pi r^2}{2\pi r}$$

$$V = 240\, r - \frac{\pi r^3}{2}$$

Derivando la función V e igualado a 0, se tiene

$$V' = 240 - \frac{3}{2}\pi r^2 = 0$$

Entonces:

$$r^2 = \frac{2(240)}{3\pi}$$

$$r^2 = \frac{160}{\pi}$$

$$r = \pm\sqrt{160 / \pi}$$

Como el radio no puede tener un valor negativo, o no habría recipiente

$$r = 7.14\ cm$$

Calculando V'' y analizando el punto crítico:

$$r = -3\,\pi\, r$$

$$V''(7.14) = -3(3.1416)(7.14) = -67.29 < 0,$$

Así que la función presenta un máximo en $r = 7.14\ cm$

Sustituyendo $r = 7.14\ cm$ en la ecuación (2), se tiene:

$$h = \frac{480 - \pi(7.14)^2}{2\pi(2\,14)}$$

$$h = 7.14\ cm$$

El recipiente cilíndrico debe tener en su base un radio de $r = 7.14\ cm$ y su altura deber ser $h = 7.14\ cm$.

Ejercicio



Se requiere construir un recipiente cilíndrico, con tapa, empleando *720 cm*^{2} de lámina, ¿qué dimensiones debe tener el cilindro para que el volumen contenido en él sea máximo?

Ejemplo

Un balón es pateado de una esquina de la cancha de futbol y describe una trayectoria parabólica, la cual está definida por la siguiente función:

$$h = -t^2 + 50\,t$$

Donde h es la altura (en centímetros) y t el tiempo (en segundos). Calcular el tiempo que tarda el balón en alcanzar la altura máxima y encontrar su valor.

Solución:

$$h' = -2t + 50$$

$$-2t + 50 = 0$$

$$t = 25$$

$t = 25$: es el valor crítico.

Calculando h'' y analizándola para el valor t

$h'' = -2 < 0$ se presenta un máximo de la función en

$t = 25$ segundos:

Sustituyendo el valor de t en h, se obtiene la altura máxima:

$$h = -(25)^2 + 50\,(25)$$

$$h = 625 \text{ centímetros}$$

Se ha calculado que el balón tarda 25 segundos en alcanzar la altura máxima, que es de 625 cm.

M3 Basado en Competencias

Ejercicio

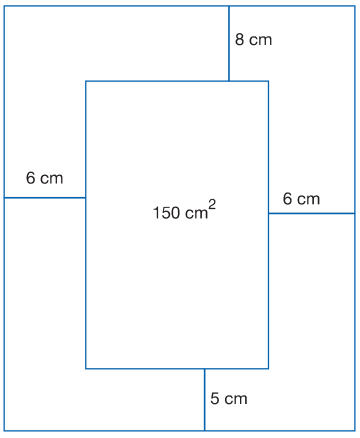
Una canica es lanzada del piso y describe una trayectoria parabólica, la cual está dada por la siguiente función:

$$h(t) = 15t - 5\,t^2$$

Donde h es la altura (en metros) y t el tiempo (en segundos). Calcular el tiempo que tarda la canica en alcanzar la altura máxima y encontrar su valor.

Ejemplo

Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 150 cm^2, el margen superior debe medir 8 cm, el inferior 5 cm y los márgenes laterales 6 cm cada uno. Calcular las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.



Solución:

El problema establece un área de impresión de 150 cm^2, se suponen como medidas del papel:
x = ancho
y = alto
por lo que el ancho del área de impresión es $x - 12$
el alto del área de impresión queda como $y - 13$
por tanto, el área de impresión es $A = (x - 12)(y - 13) = 150$ (1)

Se despeja una de las variables de la ecuación (1): $y = \frac{150}{x-12} + 13$ (2)

y se considera la primera condición.

Para la segunda, se sabe que la cantidad de papel que usará el cartel se determina por el área dada por:

$$A = xy \qquad (3)$$

Que es la segunda condición y que se debe optimizar. Sustituyendo la ecuación (2) en (3) se tiene

$$A = x\left(\frac{150}{x-12} + 13\right)$$

$$A = \frac{150x}{x-12} + 13x$$

Esta es la función a optimizar. Utilizando los criterios estudiados, se deriva la expresión con respecto a x:

$$A'(x) = \frac{(x-12)150 - 150x}{(x-12)^2} + 13$$

Se iguala a 0 y se multiplica toda la expresión por $(x-12)^2$

De donde:

$$150x - 1800 - 150x + 13(x-12)^2 = 0$$

$$1800 = 13(x-12)^2$$

Por tanto

$$\frac{1800}{13} = (x-12)^2$$

$$x = 12 \pm \sqrt{\frac{1800}{13}}$$

$$x_1 = 23.77$$

$$x_2 = 0.23$$

Obteniendo la segunda derivada

$$A''(x) = \frac{3600}{(x-12)^3}$$

Sustituyendo x_1

$$A''(23.77) = \frac{3\,600}{(23.77-12)^2} = 2.20 > 0$$

Entonces la función tiene un mínimo en x_1 con x_2 el denominador es negativo y tendrá un máximo.

Por tanto las dimensiones son:

$$x = 23.77 \text{ cm}$$

$$y = \frac{150}{23.77-12} + 13 = 25.74 \text{ cm}$$

Y el área del papel es de:

$$A = \frac{150\,(23.77)}{23.77-12} + 13\,(23.77)$$

$$A = 611.94 \text{ cm}^2$$

M3 Basado en Competencias

Ejercicios adicionales

I. De acuerdo con la definición de derivada, calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x - 3$
2. $g(x) = 2x + 4$
3. $h(x) = 5x - 11$
4. $i(x) = \frac{3}{4}x - 1$
5. $F(x) = 4x^2 - 3x$
6. $G(x) = -5x^2 - 3x + 6$
7. $H(x) = x^3 + x^2 - x$
8. $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$
9. $g(x) = \frac{x}{x-3}$ si $x \neq 3$
10. $h(x) = \frac{8}{3x+9}$ si $x \neq -3$
11. $F(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$
12. $G(x) = \sqrt{x+1}$ si $x \geq -1$

II. Utilizando teoremas, calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $f(x) = 4x^3 - 10x^2 + 8x - 4$
2. $g(x) = 5x^3 + 11x^2 - 34 + 157$
3. $h(x) = 3x^4 - \frac{4}{x}$ si $x \neq$
4. $i(x) = 4x^5 + \frac{-3}{x^2} + \frac{2}{3x}$ si $x \neq 0$
5. $F(x) = 2x^4 - \frac{4}{x^3} + \sqrt{x} - \frac{2x}{5}$ si $x > 0$
6. $G(x) = 3x^5 + \frac{-4}{3x^2} + 2\sqrt[3]{4x-1}$ si $x \geq {}^1/_4$
7. $H(x) = (3x^2 - 2x)(2x + 3x^2)$
8. $I(x) = (2x - 3x^2)(-4x^3 + 5x^4)$
9. $f(x) = (-4x + 3x^2)(-3x^4 + 5x^3)$
10. $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ si $x \neq \pm 1, > 0$
11. $F(x) = (1 - x)^2$
12. $G(x) = (x^2 - 4x)^3$
13. $H(x) = (2x - 3)^5(5x - 6x^2)$
14. $I(x) = (4x^5 + 3x)^5(2x^3 - 4x)^2$
15. $F(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$ si $x \leq -1$
16. $G(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 4x}$

17. $H(x) = \frac{3x^2}{x^2-5x}$ si $x > 5$

18. $I(x) = \frac{5x^3+2x^2}{\sqrt[3]{x^3-4x^2}}$ si $x \neq 0,4$

19. $h(x) = \frac{\sqrt{2x-8}}{2x^2-4x}$ si $x > 4$

III. Derivar las siguientes funciones trigonométricas directas:

1. $f(x) = sen\, x + cos\, 4x$
2. $g(x) = 2tan\, 5x - 3\, sec\, 6x$
3. $h(x) = cot\, 2x + 7\, csc\, 3x^2$
4. $i(x) = 4sen^2 5x - 5\, cot\, 2x^3$
5. $j(x) = cos^2 3x\, sec^2 4x$
6. $k(x) = (tan\, 4x)(3x^2 - 5)$
7. $l(x) = \sqrt{sen^3 2x}$
8. $g(x) = \frac{tan\, x\, cos\, 2x}{3x+6}$ si $x \neq -2$
9. $f(x) = (sen\, 2x)(cos\, 3x)(tan\, 4x)$
10. $f(x) = sen(tan\, 2x)$

IV. Derivar las siguientes funciones trigonométricas inversas

1. $f(x) = arc\, sen\, (2x + 1)$
2. $f(x) = arc\, cos\, (2x^2 - 3)$
3. $f(x) = arc\, tan(x + 3x^2)$
4. $f(x) = arc\, sec\, (3 - x)$
5. $f(x) = \frac{sen\, x}{arc\, cos\, x^3}$

V. Derivar las siguientes funciones exponenciales

1. $f(x) = 2^{(x-1)}$
2. $f(x) = 4^{(x^2+x)}$
3. $f(x) = 8^{(3-2x^2)}$
4. $f(x) = 3^{(x^3+x^2)}$
5. $f(x) = e^{sen\, x}$
6. $f(x) = e^{cos\, x^2}$
7. $f(x) = tan\,(2^{4x-1}) + ln\,(cot\, e^{5x+6})$
8. $f(x) = sec\,(2^x) - ln\,(cos\, e^{4x})$

M3 Basado en Competencias

VI. Derivar las siguientes funciones logarítmicas

1. $f(x) = log_2 (x^4 + 4x^2)$
2. $f(x) = log_4 (3x^2 + 6x^4)$
3. $f(x) = ln (x^4 + 5x^2)$
4. $f(x) = ln \sqrt[3]{x^2 + 8}$
5. $f(x) = tan (ln\ x^2)$
6. $f(x) = sen (ln\ 3\ x^4)$
7. $f(x) = ln (\cos x)$
8. $f(x) = \frac{log_6 (5x^2\ 7)}{cos (\ 2x^4)}$
9. $f(x) = cot (ln\ 3x^4)$
10. $f(x) = ln\, x^4 + log_4 x^2)$

VII. Mediante derivación implícita, determinar la derivada con respecto a x de las siguientes funciones:

1. $x^3 - xy + y^2 = 7$
2. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$
3. $senx = x(1 + tany)$
4. $\cos(xy) = 2y$
5. $1 + xy = e^{xy}$
6. Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$ en el punto (1, 1) (a la curva se le llama *bifolio*)

VIII. Recta tangente y normal

1. Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = 4x^2$ en el punto de abscisa $x_1 = -1$. Trazar la gráfica de la función y las gráficas de la recta tangente y normal en un mismo plano.
2. Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = 5x^2 - 4x$ en el punto de abscisa $x_1 = 2$. Trazar la gráfica de la función y las gráficas de la recta tangente y normal en un mismo plano.
3. Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ en el punto de abscisa $x_1 = 2$. Trazar la gráfica de la función y las gráficas de la recta tangente y normal en un mismo plano.



4. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x_1 = 2$. Trazar la gráfica de la función y la gráfica de la recta tangente en un mismo plano.
5. Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de la relación $y^2(x^2 + y^2) = 2x^2$ en el punto (1, 1). Trazar la gráfica de la relación y la gráfica de la recta tangente y normal en un mismo plano con un paquete graficador.

IX. Trazar la gráfica de las siguientes funciones, determinando sus puntos máximos y mínimos, así como los intervalos en los cuales es creciente y decreciente.

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$
3. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

X. Resolver los siguientes ejercicios de optimización.

1. Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadrada que almacenará 10 000 litros de agua. El costo del concreto para la base y las caras laterales es de $180 por m^2 mientras que para la tapa es de $220 por m^2. ¿Cuáles deben ser las medidas de la cisterna para minimizar el costo de su construcción?
2. Se requiere construir un recipiente cilíndrico de metal sin tapa, que tenga una superficie total de 120 cm^2; determine las dimensiones de modo que se tenga el mayor volumen posible.
3. Un agricultor desea construir con 100 m de rollo de tela de alambre un corral de forma cuadrada o rectangular; determine las dimensiones del corral de tal manera que su área sea máxima.
4. Una imprenta tiene un contrato para hacer invitaciones para unos 15 años, de tal manera que la invitación tenga 180 cm^2 de material impreso, dejando en cada invitación 3 cm de margen superior e inferior y 2 de margen izquierdo y derecho. Determine las dimensiones que debe tener la invitación para que la imprenta utilice la menor cantidad de papel posible.

Respuestas

I.

1. $D_x f(x) = 1$
2. $D_x g(x) = 2$
3. $D_x h(x) = 5$
4. $D_x i(x) = \frac{3}{4}$
5. $D_x f(x) = 8x - 3$
6. $D_x g(x) = -10x - 3$
7. $D_x h(x) = 3x^2 + 2x - 1$
8. $D_x f(x) = -\frac{1}{x^2}$
9. $D_x g(x) = -\frac{3}{(x-3)^2}$
10. $D_x h(x) = -\frac{24}{(3x+9)^2}$
11. $D_x f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
12. $D_x g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

II.

1. $D_x f(x) = 12x^2 - 20x + 8$
2. $D_x g(x) = 15x^2 + 22x - 34$
3. $D_x h(x) = 12x^3 + \frac{4}{x^2}$
4. $D_x i(x) = 20x^4 + \frac{6}{x^3} - \frac{2}{3x^2}$
5. $D_x f(x) = 8x^3 + \frac{12}{x^{+4}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{5}$
6. $D_x g(x) = 15x^4 + \frac{24}{9x^3} + \frac{8}{3\sqrt[3]{(4x-1)^2}}$
7. $D_x h(x) = 2x(3x-2)(1+3x) + 2x(2+3x)(3x-1)$
8. $D_x i(x) = (2x - 3x^2)(-12x^2 + 20x^3) + (-4x^3 + 5x^4)(2 - 6x)$
9. $D_x f(x) = (-4 + 3x^2)(-12x^3 + 15x^2) + (-3x^4 + 5x^3)(-4 + 6x)$
10. $D_x g(x) = \frac{\frac{(x^2-1)}{2\sqrt{x}} 2\sqrt{x^3}}{(x^2-1)^2}$
11. $D_x f(x) = -2(1 - x)$
12. $D_x g(x) = 3(x^2 - 4x)^2(2x - 4)$
13. $D_x h(x) = (2x - 3)^5(5x - 12x) + 10(5x - 6x^2)(2x - 3)^4$
14. $D_x i(x) = 2(4x^5 + 3x)^5(2x^3 - 4x)^2(6x^2 - 4) + 5(2x^3 - 4x)^2(4x^5 + 3x)^4(20x^4 + 3)$

15. $D_x f(x) = \frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+5}}$

16. $D_x g(x) = \frac{6x-4}{\sqrt[3]{(3x^2-4x)^2}}$

17. $D_x h(x) = \frac{6x(x^2-5x)-3x^2(2x-5)}{(x^2-5x)^2}$

18. $D_x i(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3-4x^2}\,(15x^2+4x)-\frac{(5x^3+2x^2)}{\sqrt[3]{(x^3-4x^2)^2}}}{\sqrt[3]{(x^3-4x^2)^2}}$

19. $D_x h(x) = \frac{\frac{(2x^2-4x)}{\sqrt{2x-8}}-\sqrt{2x-8}\,(4x-4)}{(2x^2-4x)^2}$

III.

1. $D_x f(x) = \cos x - 4\,sen\,4x$
2. $D_x g(x) = 10\,sec^2 5\,x - 18\,sec\,6x\,tan\,6x$
3. $D_x h(x) = 2csc^2\,2x - 42x\,csc\,3x^2\,\,cot\,3x$
4. $D_x i(x) = 40sen5xcos5x + 30xcsc^2 2x^3$
5. $D_x j(x) = 8cos^2 3xsec^2 4xtan4x - 6sen^2 4xcos3xsen3x$
6. $D_x k(x) = 6xtan4x + 4(3x^2-5)sec^2 4x$
7. $D_x l(x) = 3\sqrt{sen2x}\,cos2x$
8. $D_x g(x) = \frac{-2(3x+6)tanxsen2x+(3x+6)cos2xsec^2 x-3tanxcos2x}{(3x+6)^2}$
9. $D_x f(x) = 4sen2xcos3xsec^2 4x - sen2xtan4xsen3x + 2cos3xtan4xcos2x$
10. $D_x f(x) = 2\cos(tan2x)\,sec^2 2x$

IV.

1. $D_x f(x) = \frac{2}{\sqrt{-4x^2-4x}}$
2. $D_x f(x) = \frac{4x}{\sqrt{-4x^4+12x^2-8}}$
3. $D_x f(x) = \frac{1+6x}{1+(x+3x^2)^2}$
4. $D_x f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+6x-8}}$
5. $D_x f(x) = \frac{arc\cos x^3\,\cos x + \frac{3xsenx}{\sqrt{1-x^3}}}{(arc\cos x^3)^2}$

V.

1. $D_x f(x) = 2^{(x-1)} In2$
2. $D_x f(x) = (2x + 1)4^{x^2+x} In4$
3. $D_x f(x) = -\ 8^{3-2x^2} 4x In8$
4. $D_x f(x) = (3x^2 + 2x)\ 3^{x^3+x^2} In3$
5. $D_x f(x) = e^{senx} cosx$
6. $D_x f(x) = -2xe^{cosx^2} sen\ x^2$
7. $D_x f(x) = 4(2^{4x-1}) sec^2(2^{4x-1}) In2 - \frac{5e^{5x+6} csc^2 e^{5x+6}}{\cot e^{5x+6}}$
8. $D_x f(x) = 2^x sec2^x tan2^x In2 + 4e^{4x}\ tane^{4x}$

VI.

1. $D_x f(x) = \frac{(4x^3 + 8x)\ log_2 e}{x^4 + 4x^2}$
2. $D_x f(x) = \frac{(6x + 24x^3)\ log_4 e}{3x^2 + 6x^4}$
3. $D_x f(x) = \frac{4x^3 + 10x}{x^4 + 5x^2}$
4. $D_x f(x) = \frac{2x}{3(x^2 + 8)}$
5. $D_x f(x) = \frac{2sec^2(In\ x^2)}{x}$
6. $D_x f(x) = \frac{2cos(In\ 3x^2)}{x}$
7. $D_x f(x) = -\ tan\ x$
8. $D_x f(x) = \frac{\frac{2cos2x^4\ log_6 e}{x} + 8x^3\ log_6 5x^2 sen\ 2x^4}{cos^2(2x^4)}$
9. $D_x f(x) = \frac{-4csc^2(In\ 3x^4)}{x}$
10. $D_x f(x) = \frac{4}{x} + \frac{2}{x} log_4 e$

VII.

1. $y' = \frac{y-3x^2}{2y-x}$
2. $y' = \frac{6xy-3x^2-2y^2}{4xy-3x^2}$
3. $y' = \frac{cosx-tany-1}{xsec^2y}$
4. $y' = \frac{ysen(xy)}{-(xsenxy+2)}$
5. $y' = \frac{y(e^{xy}-1)}{x(1-e^{xy})}$
6. $y'(1,1) = 0$

VIII.

1. $8x + y + 4 = 0; x - 8y + 33 = 0$
2. $16x - y - 20 = 0; x + 16y - 194 = 0$
3. $4x - y - 4 = 0; x + 4y - 18 = 0$
4. $x + 4y - 4 = 0$
5. $x - 3y + 2 = 0, 3x + y - 4 = 0$

IX.

1. $P_{max}\,(-3,\frac{43}{2})\,, P_{min}\,(2,\frac{2}{3})\,, creciente\,(-\infty,-3),(2,\infty),\ decreciente\,(-3,2)$
2. $P_{max}(1,-4), P_{min}(3,-8), creciente\,(-\infty,1),(3,\infty),\ decreciente\,(1,3)$
3. $P_{max}(0,16), P_{min}(-2,0), P_{min}(2,0)\ creciente\,(-2,0),(2,\infty), decreciente\,(-\infty,-2),(0,2)$

X.

1. $lado = 0.71\ m,\ h = 1.97\ m$
2. $radio = 3.56\ cm, h = 3.56\ cm$
3. $cuadrado\ de\ 25\ cm\ de\ lado$
4. $base = 14.95\ cm, altura = 22.43\ cm$

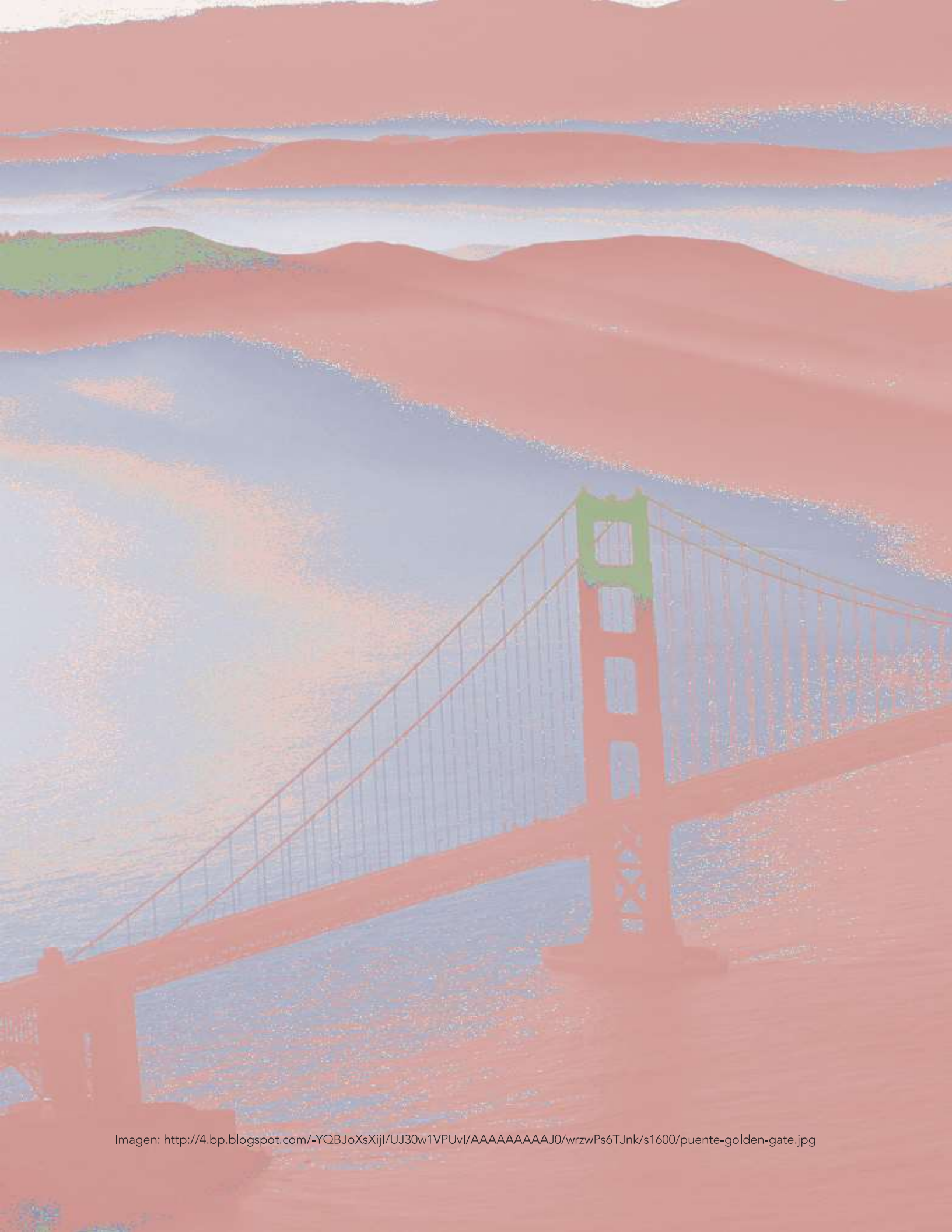


Imagen: http://4.bp.blogspot.com/-YQBJoXsXijI/UJ30w1VPUvI/AAAAAAAAAJ0/wrzwPs6TJnk/s1600/puente-golden-gate.jpg

Módulo 4

Diferencial de una función

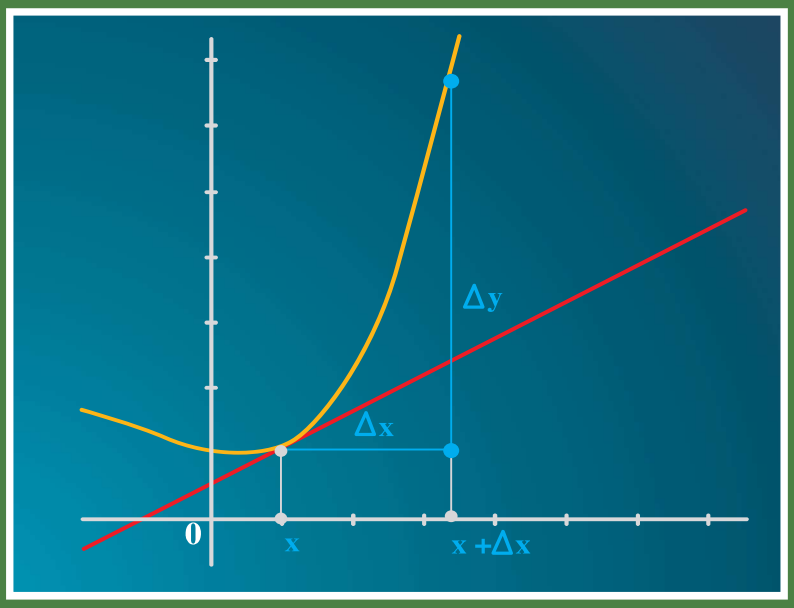


Imagen: https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSxDuz1eNuAtGYb-FH68qM050VvqD9ej1OHv1CnBcZoOtO-hrPQ9_Q

M 4
Basado en Competencias

Módulo 4

Diferencial de una función

Competencias genéricas y atributos

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
   - 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
   - 1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
   - 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
   - 4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
   - 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
   - 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
   - 8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
   - 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
   - 8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares básicas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimentalmente o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Introducción

Existen situaciones-problema, dentro y fuera de las matemáticas, en que necesitamos estimar una diferencia, como en el cálculo de errores al efectuar mediciones (valor real menos valor aproximado), o simplemente al calcular variaciones de la variable dependiente cuando la independiente varía. La mejor aproximación lineal es utilizando una recta tangente a una función en las cercanías del punto de tangencia. Las diferenciales son útiles para aproximar o estimar valores que mentalmente sería complicado calcular, como $\sqrt{38}$, $\sqrt{48}$, o $sen(61°)$; (esto por supuesto con la calculadora no sería problema). Para aproximar cálculos en problemas de aplicación utilizando la diferencial, es necesario determinar una función de la cual partir.

1. La diferencial de una función

Consideremos una función $y = f(x)$. En algunas aplicaciones se tiene que la variable independiente x varía ligeramente y se necesita encontrar la variación correspondiente de la variable dependiente y. Recordemos del módulo III que si x cambia de un valor inicial x_1 a uno final x_2, entonces la magnitud del cambio, denominado *incremento* de x (denotado por Δx), es la diferencia del valor final x_2 con el valor inicial x_1; es decir:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

De la igualdad anterior, se tiene:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

Análogamente Δy o $\Delta f(x)$, denominado *incremento de* y o *incremento de la función* $f(x)$, representa la variación de la variable dependiente y correspondiente al cambio Δx, y es la diferencia del valor de la función en x_2 con el valor de la función en x_1; es decir:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

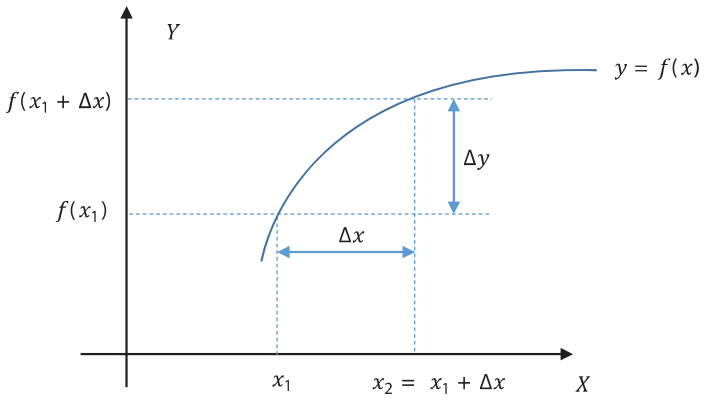
O bien

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

En general Δy puede escribirse como

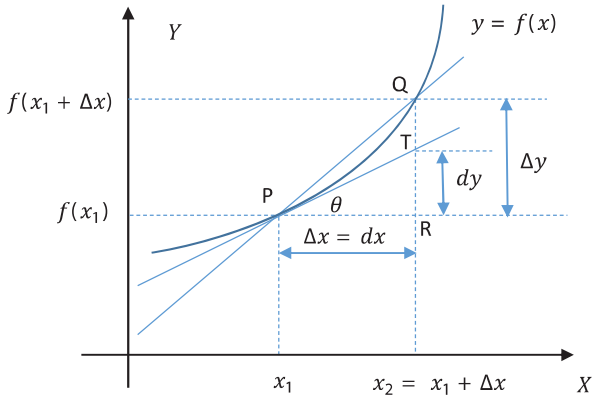
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Gráficamente se tiene:



1.1 Interpretación geométrica de la diferencial

Para aproximarse a la gráfica de una función, se utiliza una recta tangente como se muestra en la siguiente figura:



En la figura si x se incrementa una cantidad Δx, entonces la *diferencial de y* (denotada por dy) representa lo que sube (o baja) la *recta tangente*, cuando la variable independiente cambia de x_1 a $x_1 + \Delta x$, mientras que Δy indica qué tanto sube (o baja) *la gráfica* entre *P* y *Q*. En la figura se ha dibujado a Δx y a Δy como cantidades positivas, sin embargo, también éstas pueden ser negativas. Ahora bien, cuando Δx es pequeño, para una aproximación de este tipo, esta cantidad tradicionalmente se denota como dx y recibe el nombre de la *diferencial de x*; es decir, $\Delta x = dx$, Δy puede aproximarse de la siguiente manera:

Recordemos que la pendiente m de una recta se define como la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación θ y que la derivada de una función f, denotada por $f'(x)$ o y', es la pendiente de la recta tangente en un punto de la función. Así, observando el punto *P* y el triángulo *PTR* de la figura tenemos que:

$$f'(x) = m = tan\theta$$

$$f'(x) = \frac{TR}{PR}$$

Pero $TR = dy$ y $PR = \Delta x = dx$

de donde:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

y si se despeja dy, tenemos finalmente la fórmula para calcularlo:

$$dy = f'(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad dy = y'dx$$

Por otra parte, si Δx fuera aproximadamente igual a 0 (denotado por $\Delta x \approx 0$); es decir, que el valor de x_1 estuviera muy cercano al valor de x_2, entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que es la pendiente de la secante que pasa por *P* y *Q*, estaría muy cerca de la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente en *P*, de lo que se sigue que si f es derivable, entonces:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad si\ \Delta x \approx 0$$

Si despejamos Δy

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

$$\Delta y \approx f'(x)\,dx$$

$$\Delta y \approx dy$$

O bien

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$$

Entonces, si Δx es cercano a 0, se puede usar dy como una *aproximación* al incremento Δy, que es el cambio *real* en y, correspondiente a un incremento pequeño de la variable x. Este resultado es útil para las *aplicaciones* en las que no se necesita una estimación muy exacta del incremento de la variable y.

Ejemplo

Dada la función $y = x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, calcular:

a) dy

b) el valor de dy para $x = 2$ y $\Delta x = 0.1$

Solución:

a) Sea $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 3$; entonces

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$dy = (3x^2 + 8x - 2)\,dx$$

b) $dx = \Delta x$; sustituyendo $x = 2$ y $dx = 0.1$ en la fórmula para dy tenemos

$$dy = [3(2)^2 + 8(2) - 2](0.1) = 2.6$$

Ejercicio



Sea la función $y = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, calcular:

a) dy

b) el valor de dy para $x = 3$ y $\Delta x = 0.1$

Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^2 + 5x - 6$:

a) Determinar Δy cuando x cambia de 3 a 3.1

b) Usar dy para estimar Δy para el mismo cambio en x

Solución:

a) Datos $x = 3$, $x + \Delta x = 3.1$, $\Delta x = 0.1$

Para calcular Δy tenemos

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = f(3.1) - f(3)$

$\Delta y = [3.1^2 + 5(3.1) - 6] - [3^2 + 5(3) - 6]$

$\Delta y = 1.11$

b) Ahora para calcular dy tenemos

$dy = f'(x)\,dx$, $dx = \Delta x$

$dy = (2x + 5)\,dx$

$dy = (2(3) + 5)(0.1)$

$dy = 1.1$

El error en la aproximación es $= 1.11 - 1.1 = 0.01$



Ejercicio

Sea la función $y = 2x^2 + x - 8$:

a) Determinar Δy cuando x cambia de 2 a 2.1

b) Usar dy para estimar Δy para el mismo cambio en x

2. Cálculo de la diferencial de una función por teoremas

Cada uno de los teoremas de derivación que se estudiaron en el módulo III puede escribirse en *forma diferencial* de la siguiente manera:

Sean u y v funciones diferenciables en x, entonces:

$d(k) = 0$	en donde $k = constante$
$d(x) = dx$	
$d(kx) = kdx$	
$d(x^n) = nx^{n-1}dx$	
$d(u \pm v) = du \pm dv$	en donde $du = u'dx$ y $dv = v'dx$
$d(uv) = udv + vdu$	
$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$	$con\ v \neq 0$
$d(u^n) = nu^{n-1}u'dx$	

A partir de los siguientes ejemplos y ejercicios se asume que las funciones son continuas y diferenciables en su dominio.

Ejemplo

Calcular la diferencial de la función: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 5$

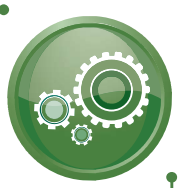
Solución:

$dy = f'(x)dx$

$dy = (6x^2 + 8x - 1)dx$

Ejercicio

Calcular la diferencial de la función: $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + x + 6$



Ejemplo

Calcular la diferencial de la función: $y = \frac{2}{x^3} + 5\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x^3}} + 10$

Solución:

Expresamos la función como potencias negativas o fraccionarias de x

$y = 2x^{-3} + 5x^{1/2} + x^{2/3} + 3x^{-3/2} + 10$

Entonces

$dy = y'dx$

$dy = (-6x^{-4} + \frac{5}{2}x^{-1/2} + \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{9}{2}x^{-5/2})\ dx$

$dy = (-\frac{6}{x^4} + \frac{5}{2}\frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{9}{2}\frac{1}{x^{5/2}})\ dx$

$dy = (-\frac{6}{x^4} + \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2\sqrt{x^5}})\ dx$

Ejercicio

Calcular la diferencial de la función: $y = \frac{1}{x^2} + 5\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x^5}} + 15$



Ejemplo

Calcular la diferencial de la función: $f(x) = (5 + x^3)(x^2 - 2)^2$

Solución:

Aplicamos los teoremas correspondientes y simplificamos

$dy = f'(x)\,dx$

$dy = [(5 + x^3)D_x(x^2 - 2)^2 + (x^2 - 2)^2 D_x(5 + x^3)]dx$

$dy = [(5 + x^3)2(x^2 - 2)D_x(x^2 - 2) + (x^2 - 2)^2(3x^2)]dx$

$dy = [(5 + x^3)2(x^2 - 2)(2x) + (x^4 - 4x^2 + 4)(3x^2)]dx$

$dy = [(5 + x^3)(2x^2 - 4)(2x) + (3x^6 - 12x^4 + 12x^2)]dx$

$dy = [(5 + x^3)(4x^3 - 8x) + (3x^6 - 12x^4 + 12x^2)]dx$

$dy = [(20x^3 - 40x + 4x^6 - 8x^4) + (3x^6 - 12x^4 + 12x^2)]dx$

$dy = [7x^6 - 20x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 40x]dx$



Ejercicio

Calcular la diferencial de la función: $f(x) = (2 + x^3)^2(3 - x^2)$

Ejemplo

Calcular la diferencial de la función $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

Solución:

Transformamos el radical a exponente fraccionario

$$y = \frac{x^2}{(4 - x^2)^{1/2}}$$

Entonces $dy = y'dx$

$$dy = \left[\frac{(4 - x^2)^{1/2}D_x(x^2) - x^2 D_x(4 - x^2)^{1/2}}{((4 - x^2)^{1/2})^2}\right]dx$$

$$dy = \left[\frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) - x^2\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}D_x(4-x^2)}{(4-x^2)}\right]dx$$

$$dy = \left[\frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) - x^2\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x)}{(4-x^2)}\right]dx$$

$$dy = \left[\frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) + x^3(4-x^2)^{-1/2}}{(4-x^2)}\right]dx$$

$$dy = \left[\frac{\sqrt{4-x^2}(2x) + x^3\dfrac{1}{(4-x^2)^{1/2}}}{(4-x^2)}\right]dx$$

$$dy = \left[\frac{\sqrt{4-x^2}(2x) + \dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}}{(4-x^2)}\right]dx$$

$$dy = \left[\frac{\dfrac{(\sqrt{4-x^2})^2(2x) + x^3}{\sqrt{4-x^2}}}{(4-x^2)}\right]dx$$

$$dy = \left[\frac{(4-x^2)(2x) + x^3}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}\right]dx$$

$$dy = \left[\frac{8x - 2x^3 + x^3}{(4-x^2)(4-x^2)^{1/2}}\right]dx$$

$$dy = \left[\frac{8x - x^3}{(4-x^2)^{3/2}}\right]dx$$

Ejercicio

Calcular la diferencial de la función $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$



Ejemplo

Calcular la diferencial de la función $f(w) = w\sqrt{3-2w^2} = w(3-2w^2)^{1/2}$

Solución:

En este caso la variable independiente es w, por lo que diferenciaremos respecto a esta literal.

$$dy = f'(w)\,dw$$

$$dy = \left[wD_w(3-2w^2)^{1/2} + (3-2w^2)^{1/2}D_w(w)\right]dw$$

$$dy = \left[w\frac{1}{2}(3-2w^2)^{-1/2}D_w(3-2w^2) + (3-2w^2)^{1/2}(1)\right]dw$$

$$dy = \left[w\frac{1}{2}(3-2w^2)^{-1/2}(-4w) + (3-2w^2)^{1/2}\right]dw$$

$$dy = \left[\frac{-2w^2}{(3-2w^2)^{1/2}} + (3-2w^2)^{1/2}\right]dw$$

$$dy = \left[\frac{-2w^2 + ((3-2w^2)^{1/2})^2}{(3-2w^2)^{1/2}}\right]dw$$

$$dy = \left[\frac{-2w^2 + (3-2w^2)}{(3-2w^2)^{1/2}}\right]dw$$

$$dy = \left[\frac{-4w^2+3}{\sqrt{3-2w^2}}\right]dw$$



Ejercicio

Calcular la diferencial de la función $f(z) = 2z^2\sqrt{2-z}$

Ejemplo

Calcular la diferencial de las siguientes funciones

a) $y = xcosx$

b) $y = sen2x + cos3x$

c) $y = tan(x^3)$

d) $f(x) = cot^2(2 - x^2)$

Solución:

Función	Diferencial
$y = xcosx$	$= [x(-senx) + cosx(1)]dx$ $= [-xsenx + cosx]dx$
$y = sen2x + cos3x$	$= [cos(2x)\,(2) + (-sen3x)(3)]dx$ $= [2\,cos(2x) - 3sen(3x)]dx$
$y = tan(x^3)$	$= [sec^2(x^3)(3x^2)]dx$ $= [3x^2sec^2(x^3)]dx$
$f(x) = cot^2(2 - x^2)$	$= [2\,cot(2 - x^2)\,(-csc^2(2 - x^2)(-2x))]dx$ $= [4xcot(2 - x^2)csc^2(2 - x^2)]dx$

Ejercicio



Calcular la diferencial de las siguientes funciones

a) $y = x^2senx$

b) $y = sen3x - cos2x$

c) $y = cot(x^2)$

d) $f(x) = tan^2(3 - x^3)$

Ejemplo

Calcular la diferencial de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{cscx}{x}$

b) $y = e^{-tsent}$

c) $f(x) = 5^{-x^2+4x}$

d) $y = log(5x^2 - 3)$

Solución:

Función	Diferencial
$y = \frac{cscx}{x}$	$= \left[\frac{x(-cscxcotx) - cscx(1)}{x^2}\right]dx$ $= \left[\frac{-cscx(xcotx - 1)}{x^2}\right]dx$
$y = e^{-tsent}$	$= [e^{-tsent}(-tcost + sent(-1))]dt$ $= [(-tcost - sent)e^{-tsent}]dt$
$f(x) = 5^{-x^2+4x}$	$= [5^{-x^2+4x}(ln5)(-2x + 4)]dx$ $= [(-2x + 4)(ln5)5^{-x^2+4x}]dx$
$y = log(5x^2 - 3)$	$= \left[\frac{(10x)loge}{(5x^2 - 3)}\right]dx$



Ejercicio

Calcular la diferencial de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{secx}{x}$

b) $y = e^{-xcosx}$

c) $f(x) = 2^{x^2+x-3}$

d) $y = ln(3x^2 + 5)$

3. Problemas de aplicación

Las diferenciales pueden utilizarse para aproximar valores de funciones. Para realizar esto con respecto a la función dada por $y = f(x)$, se utiliza la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,dx$$

Esta fórmula se deriva de la aproximación realizada anteriormente:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$$

En donde $f(x + \Delta x)$ representa el valor exacto.

Como se mencionó en la introducción, en problemas de aplicación que se puedan resolver empleando el concepto de diferencial es necesario establecer una función de la cual partir.

Ejemplo

Utilizar diferenciales para aproximar $\sqrt{18}$

Solución:

Utilizando como función $f(x) = \sqrt{x}$, tenemos que

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,dx = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Ahora bien, como la raíz cuadrada exacta más cercana a $\sqrt{18}$ es $\sqrt{16}$, entonces podemos elegir;

$$x = 16 \text{ y } dx = 18 - 16 = 2$$

De donde,

$$f(x + \Delta x) = \sqrt{18} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(2)$$

$$\sqrt{18} \approx 4 + \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{18} \approx 4.25$$

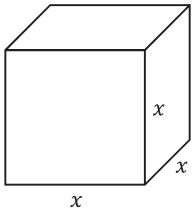
Ejercicio

Utilizar diferenciales para aproximar $\sqrt[3]{28}$



Ejemplo:

La medida de la arista de un cubo es de 15 cm, con un error posible de 0.01 cm. Empleando diferenciales, determinar el error aproximado al calcular el volumen.



Solución:

Dibujamos el cubo y consideramos como función a la del volumen del cubo.

$$V(x) = x^3$$

Tendríamos como datos:

$$dx = 0.01\ cm$$
$$x = 15\ cm$$

Obtenemos la diferencial del volumen en términos de la diferencial de un lado,

$$dV = 3x^2 dx$$

Sustituimos datos

$$dV = 3(15\ cm)^2(0.01\,cm)$$

Efectuamos operaciones y el resultado será el error aproximado al evaluar el volumen:

$$dV = 6.75\ cm^3$$

Ejercicio

Se calcula que el radio de un disco circular es aproximadamente igual a 8 cm con un error máximo en la medición de 0.06 cm. Usando diferenciales, estimar el máximo error obtenido al calcular el área del disco.

Ejemplo:

En una refinería un tanque cilíndrico tendrá un revestimiento de 2 cm de espesor.

Si el radio interior tiene 6 m y su altura es de 10 m, calcular mediante diferenciales la cantidad aproximada de material de revestimiento que se utilizará.

¿Cuál es el valor exacto del material de revestimiento?



Fuente: tomado de http://az778189.vo.msecnd.net/media/fotos/g/d38a-5c56a314b48eceb5ca314abe112f.jpg

Solución:

La función del volumen del cilindro está dada por:

$$V(r) = \pi r^2 h$$

Si se incrementa el radio r una cantidad dr, entonces el revestimiento será el incremento ΔV del volumen. Usando diferenciales tenemos

$$\Delta V \approx dV = D_r V dr$$

$$\Delta V \approx 2\pi r h dr$$

Sustituyendo datos: $dr = 2\ cm = 0.02\ m, \qquad r = 6\ m \qquad h = 10\ m$

$$\Delta V \approx 2\pi(6\ m)(10\ m)(0.02\ m)$$

$$\Delta V \approx 2.4\pi\ m^3$$

$$\Delta V \approx 7.5398\ m^3$$

Si se quisiera el volumen exacto del revestimiento, entonces

$$\Delta V = f(r + \Delta r) - f(r)$$

$$\Delta V = \pi(r + \Delta r)^2 h - \pi r^2 h$$

$$\Delta V = \pi(6.02\ m)^2(10\ m) - \pi(6\ m)^2(10\ m)$$

$$\Delta V = 7.5524\ m^3$$

El error en la aproximación es: $7.5524\ m^3 - 7.5398\ m^3 = 0.0123\ m^3$

Ejercicio

Usando diferenciales, estimar el crecimiento del volumen de un cubo si cada uno de sus lados cambia de 10 a 10.1 cm. ¿Cuál es el valor exacto del incremento del volumen?

4. La antiderivada de una función

En el módulo III se enunciaron algunos ejercicios en la forma "dada la función $f(x)$, encontrar la derivada $f'(x)$"; en la parte final de este módulo nos ocuparemos del problema inverso, es decir, "dada la derivada $f'(x)$, encontrar la función $f(x)$".

Por ejemplo, supongamos que queremos encontrar una función $F(x)$ cuya derivada sea $3x^2$, entonces por lo que sabemos de derivadas, podemos afirmar que $F(x) = x^3$, ya que $D_x(x^3) = 3x^2$.

Decimos que $F(x)$ es una *antiderivada* de $3x^2$.

Notemos, sin embargo, que $F(x)$ es *una antiderivada* de $3x^2$ y no *la antiderivada*, ya que podemos notar que

$$F_1(x) = x^3 + 4, \qquad F_2(x) = x^3 - 48, \qquad F_3(x) = x^3 + 100$$

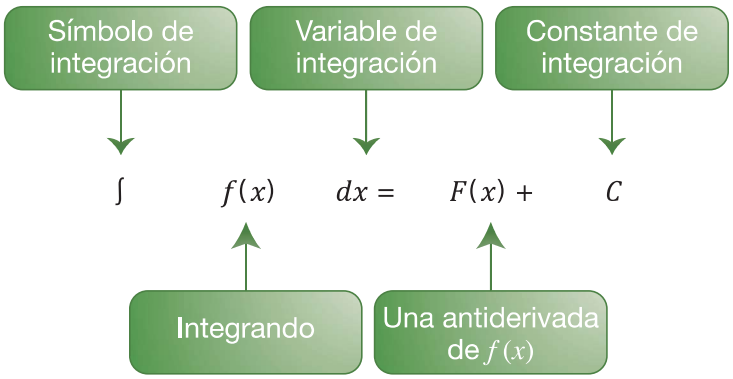
Son también antiderivadas de $3x^2$. De hecho, para cualquier constante C (llamada *constante de integración*), la función dada por $F(x) = x^3 + C$ representa la familia completa de antiderivadas de $3x^2$.

4.1 La antiderivada como el principio de la integración de una función

De lo anterior podemos establecer la siguiente definición

> Una función $F(x)$ es una *antiderivada* o *primitiva* de otra función $f(x)$ en un intervalo I, si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

La operación para determinar la familia de todas la antiderivadas de una función $f(x)$ se denomina *antiderivación* o *integración indefinida* y se denota de la siguiente manera:



En donde

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

El término *integral indefinida* es sinónimo de antiderivada y la diferencial dx sirve para identificar a x como la variable de integración.

Ejemplo

Calcular la integral $\int 6x^5 dx$

Solución:

Se tiene que encontrar una función F tal que al derivarla resulte $6x^5$

En este caso $F(x) = x^6$ cumple con lo anterior, ya que $D_x(x^6) = 6x^5$

Por tanto la solución general de la antiderivada o integral será:

$$\int 6x^5 dx = x^6 + C$$

M 4 Basado en Competencias

Ejercicio

Calcular la integral $\int 4x^3 dx$

Calcular las integrales anteriores fue relativamente sencillo, pero no siempre es así, sobre todo cuando el integrado tiene más términos y se vuelve más complejo. Para estos casos se emplean teoremas que facilitan el cálculo de las integrales.

Presentamos a continuación algunos *teoremas básicos de integración*.

1. $\int dx = x + C$
2. $\int kdx = kx + C$ en la que, k es una constante
3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, para cualquier número racional $n \neq -1$
6. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$

Ejemplo

Calcular la integral $\int 5xdx$

Solución:

Aplicamos el teorema 3

$$= 5\int xdx$$

Reescribimos x como x^1

$$= 5\int x^1\,dx$$

Aplicamos ahora el teorema 5

$$= 5\frac{x^{1+1}}{1+1} + C$$

Simplificamos

$$= 5\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{5}{2}x^2 + C$$

Cuando se evalúan integrales indefinidas, una aplicación estricta de los teoremas tiende a complicar las constantes de integración. El ejemplo anterior se pudo haber escrito como

$$\int 5xdx = 5\int xdx = 5\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = \frac{5}{2}x^2 + 5C$$

Sin embargo, como *C* representa *cualquier* constante, es innecesario escribir 5*C* como la constante de integración.

El resultado de una integral puede comprobarse por derivación, en la que la derivada debe ser el integrado.

Ejercicio

Calcular la integral $\int 3x^3dx$

En algunas integrales es conveniente transformar el integrando antes de calcularlas y simplificarlas como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo

Calcular las integrales

a) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

b) $\int \sqrt[3]{dx}$

Solución:

Integral original	transformar	integrar	simplificar y transformar
$\int \frac{1}{x^2}\,dx$	$\int x^{-2}dx$	$= \frac{x^{-1}}{-1} + C$	$= -\frac{1}{x} + C$
$\int \sqrt[3]{x}\,dx$	$\int x^{1/3}\,dx$	$= \frac{x^{4/3}}{4/3} + C$	$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$



Ejercicio

Calcular las integrales

a) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

b) $\int \sqrt{x}\,dx$

Los teoremas básicos de integración que enlistamos permiten integrar funciones polinomiales o funciones que contengan términos que se puedan transformar para aplicar el teorema 5, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int (5x^3 - x^2 + 3x + 4)\,dx$$

Solución:

Aplicamos los teoremas 4, 3, 5 y 2.

$$= \int 5x^3 dx - \int x^2 dx + \int 3x dx + \int 4\, dx$$

$$= 5\int x^3 dx - \int x^2 dx + 3\int x dx + 4\int dx$$

$$= 5\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x + C$$

$$= \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$$

No es necesario introducir una constante para cada una de las cuatro integrales, ya que éstas pueden sumarse y convertirse en una sola constante C.

Ejercicio

Calcular la integral

$$\int (6x^3 + 2x^2 - x + 7)\, dx$$



Ejemplo

Calcular la integral $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

Solución:

Transformamos el integrando, integramos y simplificamos

$$= \int \left(3x^{1/2} + x^{-1/2}\right) dx$$

$$= 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= 2\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$$

Ejercicio

Calcular la integral $\int \left(5\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

Ejercicios adicionales



I. Para las siguientes funciones
a) Determinar Δy cuando x cambia de 1 a 1.1.
b) Usar dy para estimar Δy para el mismo cambio en x.

1. $f(x) = \sqrt{x+2}$
2. $f(x) = x^2 + 4$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
5. $f(x) = \frac{1}{x-3}$
6. $f(x) = \frac{x}{x-2}$

II. Determinar la diferencial de las siguientes funciones aplicando teoremas.

1. $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. $y = (x^2 + 4\sqrt{x^3})^4$
3. $y = \sqrt{(1-x^2)^3} - \sqrt{1-x^2}$
4. $y = \sqrt{2+\sqrt{2x}}$
5. $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
6. $y = \frac{1}{5}tan^5x + \frac{2}{3}tan^3x + tanx$
7. $y = \sqrt{1+sen2x} - \sqrt{1-sen2x}$
8. $y = lnx^3 + ln^3x$
9. $y = ln(x + lnx)$
10. $y = ln\sqrt{x} + \sqrt{lnx}$
11. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
12. $y = \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3+1}}$
13. $y = (x+1)senx - xcosx$
14. $y = (\frac{1+senx}{xcosx})$

III. Problemas de aplicación

1. Usando diferenciales, calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{66}$.
2. Usando diferenciales, calcular el valor aproximado de $\sqrt[4]{17}$.
3. Utilizando diferenciales, estimar el volumen aproximado de material que se necesita para elaborar una pelota de frontón si el radio del núcleo interno hueco es de 2 pulgadas y el espesor de material es 1/8 de pulgada.
4. Una placa circular se dilata por la acción del calor de manera que su radio se incrementa de 5 a 5.06 cm. Calcular el incremento aproximado del área que sufre la placa.
5. Se mide el radio del extremo de un tronco y se encuentra que es igual a 16 pulgadas, con un posible error de ¼ de pulgada. Empleando diferenciales, determinar el error aproximado al calcular el área del extremo del tronco.

IV. La antiderivada de una función

Calcular las siguientes antiderivadas o integrales indefinidas

1. $\int (9x^2 - 4x + 3)\,dx$
2. $\int (2x^3 - x^2 + 3x - 7)\,dx$
3. $\int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2}\right)\,dx$
4. $\int \left(\frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{6} + 7\right)\,dx$
5. $\int \left(2\sqrt[4]{x^5} + 6\sqrt[4]{x} + \frac{3}{x^4}\right)\,dx$

Respuestas

I.

1. $\Delta y = 0.0286, dy = 0.0288$
2. $\Delta y = 0.21, dy = 0.20$
3. $\Delta y = 0.0488, dy = 0.0500$
4. $\Delta y = -0.1735, dy = -0.2000$
5. $\Delta y = -0.0263, dy = -0.0250$
6. $\Delta y = -0.2222, dy = -0.2000$

II.

1. $dy = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right) dx$
2. $dy = \left[8(x^2 + 4\sqrt{x^3})^3 (x + 3\sqrt{x})\right] dx$
3. $dy = \left(\frac{3x^3 - 2x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx$
4. $dy = \left[\frac{1}{2\sqrt{2x}(2 + \sqrt{2x})}\right] dx$
5. $dy = \left[-\frac{1}{\sqrt{1 - x}\sqrt{(1 + x)^3}}\right] dx$
6. $dy = [sec^2 x(tan^4 x + 2tan^2 x + 1]dx$
7. $dy = \left[cos2x\left(\frac{1}{\sqrt{1 + sen2x}} + \frac{1}{\sqrt{1 - sen2x}}\right)\right] dx$
8. $dy = \left[\frac{3}{x}(1 + ln^2 x)\right] dx$
9. $dy = \left[\frac{x + 1}{x(x + lnx)}\right] dx$
10. $dy = \left[\frac{\sqrt{lnx} + 1}{2x\sqrt{lnx}}\right] dx$
11. $dy = \left[\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}\right] dx$
12. $dy = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^4}}$
13. $dy = xcosx + (x + 1)senx$
14. $dy = \frac{x + xsenx - (1 + senx)cosx}{(xcosx)^2}$

III.

1. 4.042
2. 2.03125
3. 2π plg^3 $\approx$ 6.2831 plg^3
4. 0.6π cm^2 $\approx$ 1.8849 cm^2
5. 8π plg^2 $\approx$ 25.1327 plg^2

IV.

1. $3x^3 - 2x^2 + 3x + C$
2. $\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 7x + C$
3. $-\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x} + C$
4. $9\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{8}\sqrt[3]{x^4} + 7x + C$
5. $\frac{8}{9}\sqrt[4]{x^9} + \frac{24}{5}\sqrt[4]{x^5} - \frac{1}{x^3} + C$

Aplicaciones de la derivada

Consiste en la obtención de la ecuación de la recta tangente y normal en un punto determinado de la curva, así como de la pendiente de ambas rectas con lo cual se puede trazar la gráfica. Otra aplicación de derivadas es obtener la abscisa de los puntos máximos y mínimos de la gráfica de una función, así como las coordenadas de estos puntos. También se obtienen los intervalos donde es creciente y decreciente. Esto aplicado a problemas de optimización.

Derivación implícita

Se aplica para aquellas funciones que se presentan de manera implícita; es decir, que están dadas de la forma $f(x,y) = 0$.

Derivada de una función real de variable real continua

Se obtiene como el límite del cociente del incremento de la función entre el incremento de la variable independiente cuando el incremento de la variable independiente tiende a 0; esto es derivada de $f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Derivadas de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas

Para obtener la derivada de las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas se aplican los teoremas correspondientes haciendo las consideraciones correspondientes del argumento función *u*.

Función creciente

En un intervalo [a, b] si al tomar dos puntos cualesquiera del mismo, x_1 y x_2, con la condición $x_1 < x_2$, se verifica que $f(x_1) < f(x_2)$.

Función decreciente

En un intervalo [a, b] si para cualesquiera puntos del intervalo, x_1 y x_2, que cumplan $x_1 > x_2$, se verifica que $f(x_1) > f(x_2)$.

Incremento de una función

Dada una función real de variable real con regla de correspondencia $y = (fx)$, si x varia de x_1 a x_2, entonces al valor de la función en x_1 se llama valor inicial de la función $f(x_1)$ y al valor de la función en x_2 se llama valor final de la función $f(x_2)$. Se llama incremento de la función $f(x)$ a la diferencia del valor final con el inicial y se denota por $\Delta f(x)$. En general para cualquier x que pertenece al dominio de la función, se considera: $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Incremento de una variable

Si a la variable independiente x se le asigna un valor inicial x_1, y después uno final x_2, entonces se llama incremento de la variable x a la diferencia del valor final con el inicial y se denota por Δx.

Notación de la derivada

La derivada de una función real de variable real con regla de correspondencia $y = f(x)$ se denota de las siguientes seis formas:

$$D_x f(x),\ D_x y,\ f'(x),\ Y',\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{dy}{dx}.$$

Pendiente de una recta

La derivada de una función en cualquiera de sus puntos geométricamente representa la pendiente de las rectas tangentes a la curva en esos puntos; esto es,

$$m_T = D_x f(x)$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ayres, F. (2010). *Cálculo*, Ed. Mc Graw Hill.
- Budnick, F. (2007). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*, Ed. Mc Graw Hill.
- Larson, R. (2011). *Cálculo*, Ed. Mc Graw Hill.
- Stewart, J. (2002). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas*, Ed. Thomson.
- Swokowski, E. (1982). *Cálculo con geometría analítica*, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

ANEXO

Lista de cotejo para derecho a serie de ejercicios

Asignatura:		Módulo:	
Actividad:		Fecha:	

	Indicador	Sí	No
1	La serie está en el orden solicitado		
2	La serie tiene limpieza		
3	Se anexa su rúbrica		
4	Están enmarcados todos los resultados		
5	La portada está a computadora con los nombres de los integrantes		
6	El trabajo está engrapado o engargolado		
7	Los ejercicios están resueltos con lápiz		
8	Los números de los ejercicios son visibles		
9	Se entrega en la fecha solicitada		
10	Está hecha en hojas blancas o de block o recicladas		
	Total		

Atte.

_____

Lista de cotejo para evaluar el segundo avance de integradora del Módulo 1

Asignatura:		Módulo:	
Actividad:		Fecha:	

R	Indicador	Sí	No	P	S
1	Traza la gráfica de las dos funciones dadas con colores contrastantes y con estuche geométrico			1.00	
2	Traza la gráfica de sólo una de las funciones dadas con colores contrastantes y con estuche geométrico			0.50	
3	Traza las gráficas de las funciones a mano			0.00	
4	Obtiene correctamente el dominio de las funciones			1.00	
5	Obtiene incorrectamente el dominio de las funciones			0.50	
6	No obtiene el dominio de las funciones			0.00	
7	Obtiene correctamente el rango de las funciones			1.00	
8	Obtiene incorrectamente el rango de las funciones			0.50	
9	No obtiene el rango de las funciones			0.00	
10	Obtiene correctamente la expresión matemática que modela el total de latas empacadas			1.00	
11	Obtiene incorrectamente la expresión matemática que modela el total de latas empacadas			0.50	
12	No obtiene la expresión matemática que modela el total de latas empacadas			0.00	
13	Obtiene correctamente la expresión matemática que modela el incremento en las líneas de producción			1.00	
14	Obtiene incorrectamente la expresión matemática que modela el incremento en las líneas de producción			0.50	
15	No obtiene la expresión matemática que modela el incremento en las líneas de producción			0.00	
	Total del avance				

R= reactivo
P= ponderación
S= subtotal
Atte.

_____

Rúbrica serie de ejercicios Módulo 2
Cálculo Diferencial

	Excelente	Bien	Regular	Insuficiente	
Presentación y formato	Desarrolla el contenido de la serie con orden y limpieza, con portada realizada en computadora, la cual incluye los nombres de todos los integrantes	Desarrolla la mayor parte de la serie con orden y limpieza, con su portada realizada en computadora, la cual incluye los nombres de todos los integrantes	La mayoría de la serie carece de orden y limpieza o su portada está realizada a mano	El desarrollo de la serie carece de orden y limpieza	
Valor	3	2	1	0	
Gráficas de los ejercicios	Traza correctamente con estuche geométrico y con colores contrastantes todas las gráficas pedidas	Traza con estuche geométrico y con colores contrastantes las gráficas pedidas, pero algunas son incorrectas o le faltan algunas	Traza con estuche geométrico y con colores contrastantes las gráficas pedidas, pero la mayoría son incorrectas o le faltan muchas	Las gráficas están muy mal trazadas y/o no incluyen colores contrastantes o no las incluyen en el trabajo	
Valor	3	2	1	0	
Proceso de solución de la serie de ejercicios	Utiliza una secuencia correcta y ordenada de pasos para realizar todos los ejercicios de límites y continuidad y no tiene errores algebraicos o aritméticos y realiza todos los ejercicios	Utiliza parcialmente una secuencia ordenada de pasos para llegar a la solución de los ejercicios de límites y continuidad y/o tiene algunos errores algebraicos o aritméticos y/o no realiza algunos ejercicios	Carece en la mayoría de los casos de fundamentos algebraicos o aritméticos para llegar a la solución de los ejercicios o le faltan muchos	Carece de fundamentos aritméticos y/o algebraicos en su proceso de solución	
Valor	3	2	1	0	
Obtención de resultados	Obtiene todas los resultados correctos y los enmarca	Tiene la mayor parte de los resultados correctos y los enmarca	La mayor parte de los resultados no son correctos	No llega a ningún resultado correcto en sus cálculos	
Valor	3	2	1	0	
Reflexión personal de la serie	Incluye una conclusión y reflexión personal a mano de todos los integrantes del equipo de lo que les pareció la serie de ejercicios del Módulo II y su relación con otras asignaturas	Incluye una conclusión y reflexión personal a mano de todos de los integrantes del equipo de lo que les pareció la serie de ejercicios del Módulo II, pero omite su relación con otras asignaturas	Incluye una conclusión y reflexión personal a mano de algunos de los integrantes del equipo de lo que les pareció la serie de ejercicios del Módulo II y su relación con otras asignaturas	Incluye una conclusión y reflexión personal a mano de algunos de los integrantes del equipo de lo que les pareció la serie de ejercicios del Módulo II, pero omite su relación con otras asignaturas o no incluye su conclusión y reflexión personal	
Valor	3	2	1	0	
				Calificación de la serie	

Rúbrica serie de ejercicios Módulo 3 de Cálculo Diferencial

	Excelente	Bien	Regular	Insuficiente	
Presentación y formato	Desarrolla el contenido de la serie con orden y limpieza, con su portada realizada en computadora, la cual incluye los nombres de todos los integrantes	Desarrolla la mayor parte de la serie con orden y limpieza, con su portada realizada en computadora, la cual incluye los nombres de todos los integrantes	La mayoría de la serie carece de orden y limpieza o su portada está realizada a mano	El desarrollo de la serie carece de orden y limpieza	
Valor	4	3	1	0	
Gráficas de los ejercicios	Traza correctamente a mano con estuche geométrico y con colores contrastantes todas las gráficas pedidas y también traza todas en GeoGebra en original	Traza con estuche geométrico y con colores contrastantes las gráficas pedidas, pero algunas son incorrectas o le faltan algunas y/o le faltan algunas en GeoGebra y/o no son originales	Traza con estuche geométrico y con colores contrastantes las gráficas pedidas, pero la mayoría son incorrectas o le faltan muchas y/o la mayoría de sus gráficas en GeoGebra no son originales y/o no son correctas	Las gráficas están muy mal trazadas y/o no incluyen colores contrastantes o no las incluyen tanto a mano como en GeoGebra	
Valor	4	3	1	0	
Proceso de solución de la serie de ejercicios	Utiliza una secuencia correcta y ordenada de pasos para realizar todos los ejercicios de la serie y no tiene errores algebraicos y/o aritméticos y realiza todos los ejercicios	Utiliza parcialmente una secuencia ordenada de pasos para llegar a la solución de los ejercicios de la serie y/o tiene algunos errores algebraicos o aritméticos y/o no realiza algunos ejercicios	Carece en la mayoría de los casos de fundamentos algebraicos o aritméticos para llegar a la solución de los ejercicios o le faltan muchos	Carece totalmente de fundamentos aritméticos y/o algebraicos en su proceso de solución	
Valor	4	3	1	0	
Obtención de resultados	Obtiene todas los resultados correctos y los enmarca	Tiene la mayor parte de los resultados correctos y los enmarca	La mayor parte de los resultados no son correctos	No llega a ningún resultado correcto en sus cálculos	
Valor	4	3	1	0	
Reflexión personal de la serie	Incluye una opinión personal a mano (en por lo menos media cuartilla por integrante) de todos los integrantes del equipo de lo que les pareció la serie de ejercicios y realiza una investigación por equipo de la aplicación de máximos y mínimos en su entorno	Incluye una opinión personal a mano (en por lo menos media cuartilla por integrante) de todos de los integrantes del equipo de lo que les pareció la serie de ejercicios, pero omite su investigación por equipo de la aplicación de máximos y mínimos en su entorno	Incluye una opinión personal a mano (en por lo menos media cuartilla por integrante) de algunos de los integrantes del equipo de lo que les pareció la serie de ejercicios y/o realiza una investigación muy escueta por equipo de la aplicación de máximos y mínimos en su entorno	No incluye una opinión personal a mano de los integrantes del equipo de lo que les pareció la serie de ejercicios y omite su investigación por equipo de la aplicación de máximos y mínimos en su entorno y/o tanto las opiniones como la investigación son muy escuetas	
Valor	4	3	2	0	
				Calificación de la serie	

Directorio

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

Doctor en Ciencias Computacionales
José Raymundo Marcial Romero
Secretario de Docencia

Doctora en Ciencias Sociales
Martha Patricia Zarza Delgado
Secretaria de Investigación y Estudios Avanzados

Doctor en Ciencias de la Educación
Marco Aurelio Cienfuegos Terrón
Secretario de Rectoría

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Luja
Secretaria de Difusión Cultural

Doctor en Ciencias del Agua
Francisco Zepeda Mondragón
Secretario de Extensión y Vinculación

Doctor en Educación
Octavio Crisóforo Bernal Ramos
Secretario de Finanzas

Doctora en Ciencias Económico Administrativas
Eréndira Fierro Moreno
Secretaria de Administración

Doctora en Ciencias Administrativas
María Esther Aurora Contreras Lara Vega
Secretaria de Planeación y Desarrollo Institucional

Doctora en Derecho
Luz María Consuelo Jaimes Legorreta
Abogada General

Doctora en Ciencias de la Educación
Yolanda Eugenia Ballesteros Sentíes
Secretaria Técnica de la Rectoría

Licenciada en Comunicación
Ginarely Valencia Alcántara
Directora General de Comunicación Universitaria

Doctor en Ciencias Sociales
Luis Raúl Ortiz Ramírez
Director General de Centros Universitarios y Unidades Académicas Profesionales Región A

Doctora en Ciencias de la Educación
Sandra Chávez Marín
Directora General de Centros Universitarios y Unidades Académicas Profesionales Región B

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Estudios de Nivel Medio Superior

Planteles Dependientes de la Escuela Preparatoria

Doctor en Tecnología e Innovación de la Educación
Arturo Mejía Zamora
Plantel "Lic. Adolfo López Mateos"

Maestro en Ciencias de la Educación
Erick Vieyra Méndez
Plantel "Nezahualcóyotl"

Maestro en Administración Pública y Gobierno
Raúl Juárez Toledo
Plantel "Cuauhtémoc"

Doctora en Ciencias de la Educación
María del Rocío García de León Pastrana
Plantel "Ignacio Ramírez Calzada"

Doctor en Ciencias de la Educación
Alejandro Morales Velázquez
Plantel "Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana"

Maestra en Ciencias de la Educación
Sofía Sandoval Trejo
Plantel "Texcoco"

Maestro en Docencia
Erick Rodolfo Sánchez Cortés
Plantel "Sor Juana Inés de la Cruz"

Maestra en Ciencias Ambientales
Janette Jaimes García
Plantel "Dr. Pablo González Casanova"

Doctora en Tecnología e Innovación en la Educación
Mónica Garduño Suárez
Plantel "Isidro Fabela Alfaro"

Licenciada en Comunicación
Ana Vianey Suárez Castro
Plantel "Mtro. José Ignacio Pichardo Pagaza"