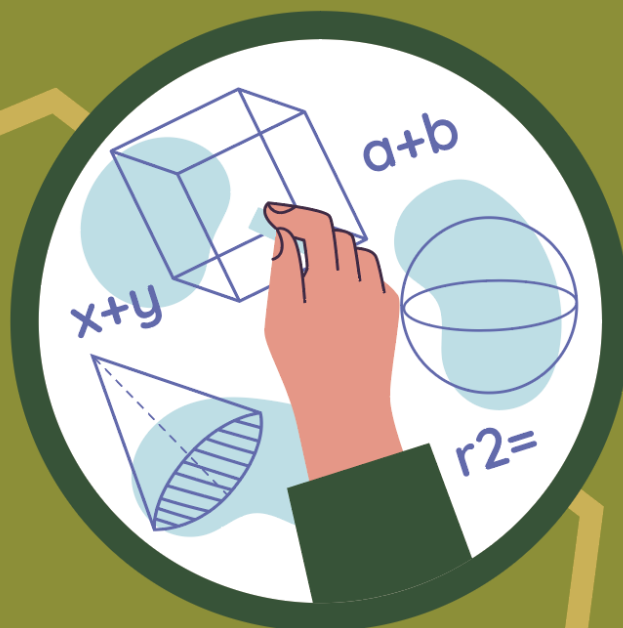




Universidad Autónoma
del Estado de México



Cálculo Integral

Libro de texto basado en competencias

Ricardo Valdés Camarena · Alejandro Ortiz Pérez · Alejandro Alvarado Catzoli
Miriam Camacho Lara · José Luis Gerardo Valencia Aguilar
María Magdalena Villegas Carstensen · María Fernanda López Albarrán

6°
Semestre

Cálculo Integral

Libro de texto basado en competencias

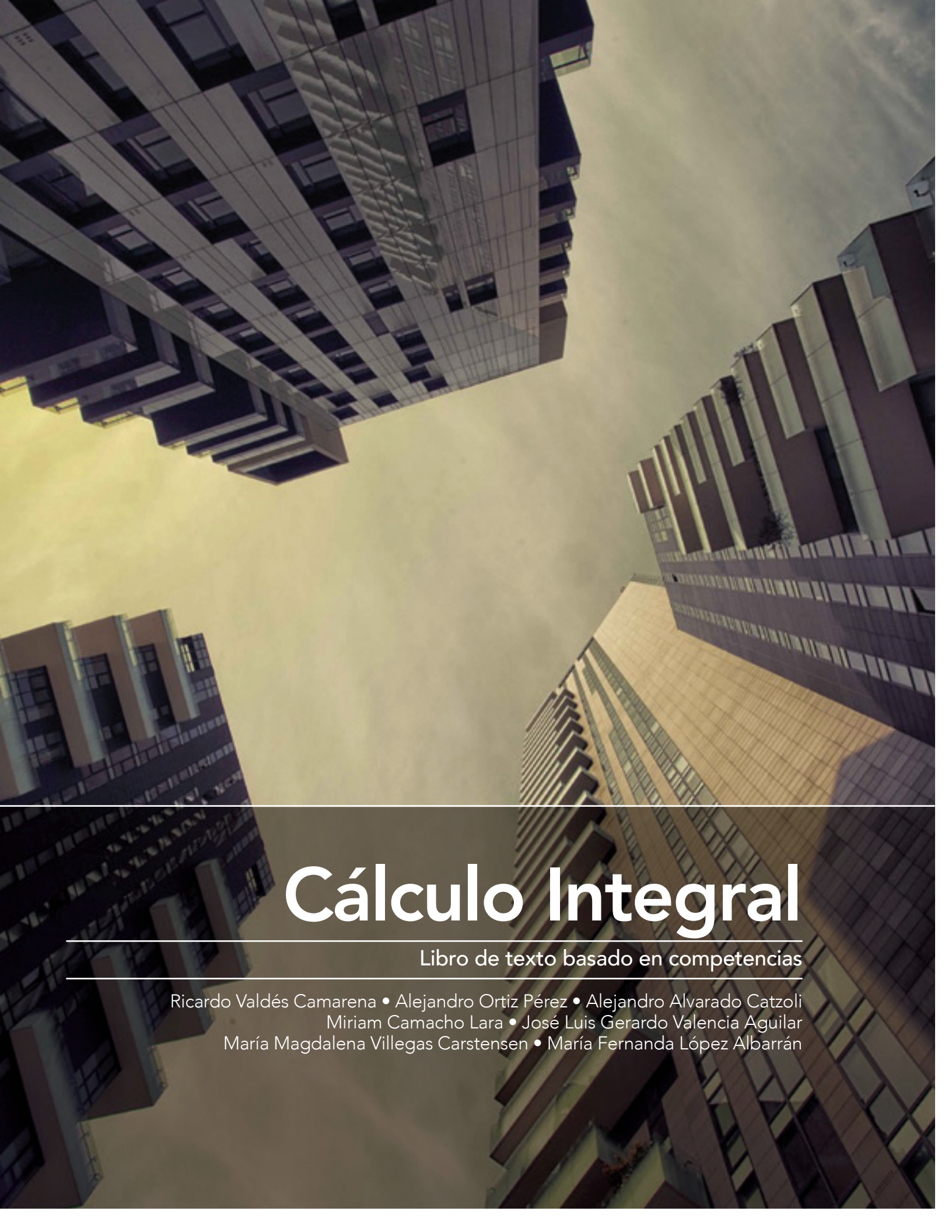
DIRECCIÓN DE PUBLICACIONES UNIVERSITARIAS
Editorial de la Universidad Autónoma del Estado de México

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Lujá
Secretaria de Difusión Cultural

Doctor en Administración
Jorge Eduardo Robles Alvarez
Director de Publicaciones Universitarias

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Estudios de Nivel Medio Superior



Cálculo Integral

Libro de texto basado en competencias

Ricardo Valdés Camarena • Alejandro Ortiz Pérez • Alejandro Alvarado Catzoli
Miriam Camacho Lara • José Luis Gerardo Valencia Aguilar
María Magdalena Villegas Carstensen • María Fernanda López Albarrán

Primera edición, febrero 2022

CÁLCULO INTEGRAL

Libro de texto basado en competencias

Autores

Ricardo Valdés Camarena

Plantel "Lic. Adolfo López Mateos" de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Alejandro Ortiz Pérez

Plantel "Lic. Adolfo López Mateos" de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Alejandro Alvarado Catzoli

Plantel "Isidro Fabela Alfaro" de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Miriam Camacho Lara

Plantel "Cuauhtémoc" de la Escuela Preparatoria de la UAEM

José Luis Gerardo Valencia Aguilar

Plantel "Cuauhtémoc" de la Escuela Preparatoria de la UAEM

María Magdalena Villegas Carstensen

Plantel "Cuauhtémoc" de la Escuela Preparatoria de la UAEM

María Fernanda López Albarrán

Plantel "Ignacio Ramírez Calzada" de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Universidad Autónoma del Estado de México

Av. Instituto Literario 100 Ote.

Toluca, Estado de México

C. P. 50000

Tel: (52) 722 277 38 35 y 36

<http://www.uaemex.mx>

El contenido de este material es responsabilidad de los autores, así como el tratamiento basado en competencias realizado a los libros de texto. Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra, sin el consentimiento previo y por escrito del editor. La Universidad Autónoma del Estado de México se deslinda de cualquier acción legal derivada de este material.

® Derechos reservados, 2018

ISBN: 978-607-633-395-2

Hecho en México

Responsable del Programa de Diseño y Producción Editorial: L. D. G. Miguel Angel Conzuelo Endeje

Corrección de estilo: Daniela Arellano Bautista

Portada e interiores: Víctor del Ángel poligamografico.com



Mensaje

A través de su historia, la Universidad Autónoma del Estado de México ha tenido como uno de sus objetivos fundamentales lograr que el estudiantado reciba una educación basada en el libre pensamiento, apelando a un sentido científico. La Escuela Preparatoria de la UAEM continuará mostrándose como un punto de inflexión para la comunidad estudiantil por la calidad de la educación que se ofrece al tiempo que se enseña a adquirir conocimientos, valores, habilidades y destrezas que favorezcan el entendimiento de nuestro entorno social y ambiental.

La responsabilidad de la Universidad Autónoma del Estado de México es asegurar que la educación que se imparte en la Escuela Preparatoria contribuya a ampliar el horizonte personal y profesional de los estudiantes. El enfoque para la apropiación del conocimiento parte de aprovechar la experiencia de vida y desde la autonomía de pensamiento y la reflexión lograr una comprensión más amplia de la realidad.

El material educativo que tienes en tus manos ha sido elaborado colegiadamente entre especialistas de cada una de las áreas del conocimiento. La creatividad, el pensamiento crítico y reflexivo, así como el espíritu científico del claustro de docencia e investigación se reúne en esta antología con el fin de que te acerques al conocimiento con una mirada crítica. Este ejemplar ha sido elaborado con el fin de establecer un aprendizaje dialógico que estimule tu curiosidad, que te sirva como guía, y que invariablemente te provoque pasión por el conocimiento.

El objetivo es lograr que recibas una educación integral e incluyente que incida de manera positiva en tu trayectoria escolar. Por ello es importante que asumas un compromiso personal, empeño y dedicación que te permita apropiarte del conocimiento.

Patria, Ciencia y Trabajo

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz

Rector

Contenido

Introducción	9
---------------------------	---

MÓDULO UNO. Conceptos en torno a la integral	11
---	----

1.1 La diferencial de una función	15
1.1.1 Cálculo de la diferencial de una función por fórmulas	21
1.2 La antiderivada de una función	34
1.2.1 La integral indefinida	34

MÓDULO DOS. Métodos de integración directa, por cambio de variable algebraica y por partes	45
---	----

2.1 Integración directa por fórmulas	48
2.2 Integración por cambio de variable algebraica	54
2.3 Integración por partes	71

MÓDULO TRES. Métodos de integración por cambio de variable trigonométrica y por fracciones parciales	85
---	----

3.1. Integración por cambio de variable trigonométrica	87
3.2. Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales	111
3.2.1 Factores lineales distintos	114
3.2.2 Factores lineales repetidos	126
3.2.3 Factores cuadráticos distintos	137
3.2.4 Factores cuadráticos repetidos	149

MÓDULO CUATRO. Aplicaciones de la integral definida 165

4.1 Concepto de integral definida 167

4.1.1 Área bajo la curva de una función 181

4.1.2 Área entre curvas..... 192

4.2 Problemas de aplicación..... 201

Bibliografía 226

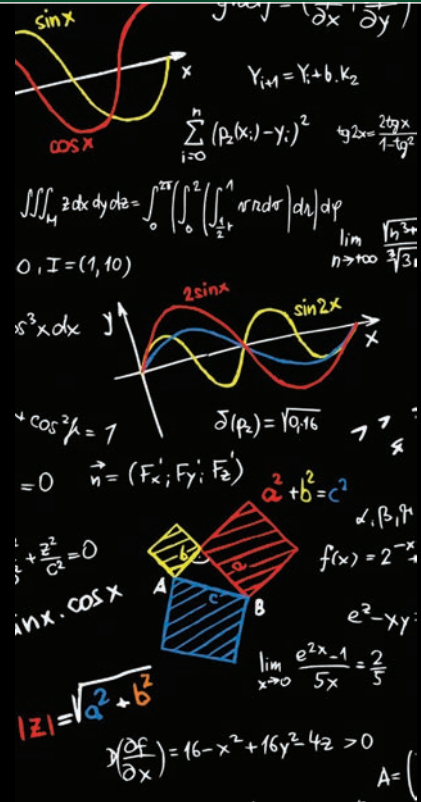
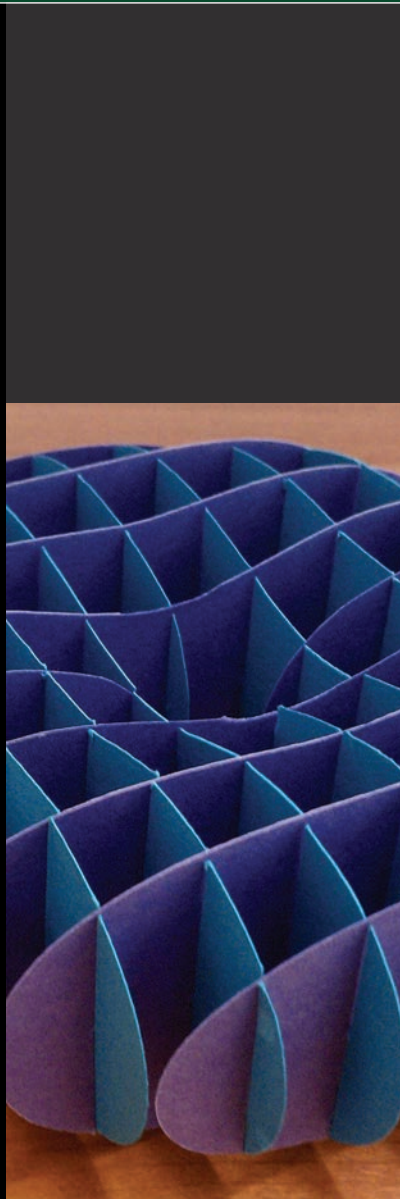
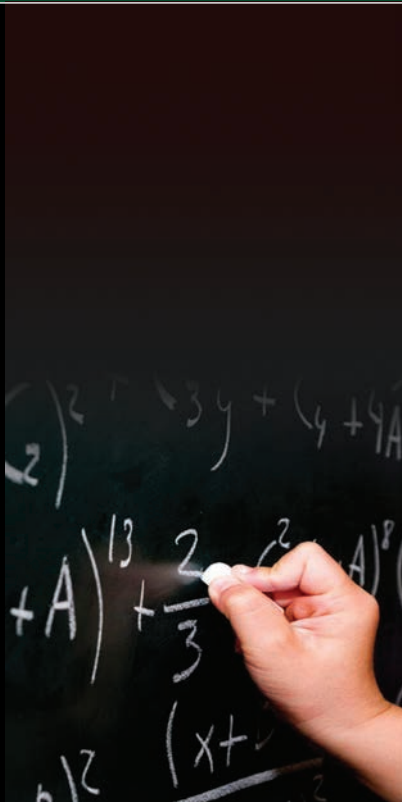
Referencias electrónicas 227

Introducción

En siglos pasados, especialmente en el xvi , la sociedad matemática tenía el reto de fabricar máquinas y herramientas necesarias para el progreso económico y, para esto, debía resolver problemas de velocidad y aceleración. En el siglo siguiente surgieron problemas como la determinación de máximos y mínimos, el cálculo de áreas de figuras irregulares, la determinación de tangentes a curvas o problemas de movimiento. El cálculo infinitesimal desarrollado por Isaac Newton (1642-1727) y G. W. Leibniz (1646-1716) contribuyó a la resolución de éstos.

Con la invención de la primera computadora programable durante la década de los 70's del siglo pasado y las invenciones actuales resultado de la nanotecnología, se avanzó de manera importante en la resolución de estos y otros problemas científicos y tecnológicos. La sociedad actual, predominantemente los jóvenes, utiliza el teléfono celular, el internet o recursos de computación para conocer y resolver tales cuestiones; sin embargo, para que surgieran estas poderosas herramientas, primeramente se necesitó del cálculo integral.

Este libro de texto pretende que los jóvenes aprendan significativamente esta asignatura a través de estrategias didácticas como exámenes diagnósticos, introducción a los conceptos teóricos, ejemplos ilustrativos, ejercicios adicionales de reforzamiento y problemas de aplicación. Además, los temas vistos refuerzan los conocimientos de álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo diferencial. Por ello está dividido en cuatro módulos que comprenden completamente el programa de cálculo integral del CBU actual.



Arriba a la izquierda: <http://bc-injury-law.com/blog/show-work-gp-medical-opinion-rejected-failing-show-reasons-supporting-opinion>

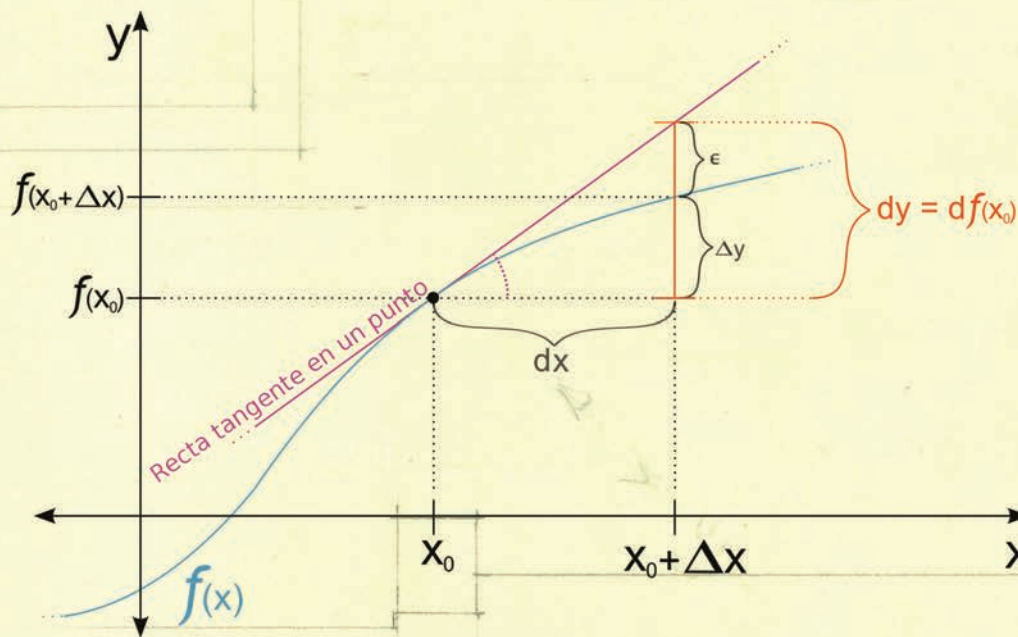
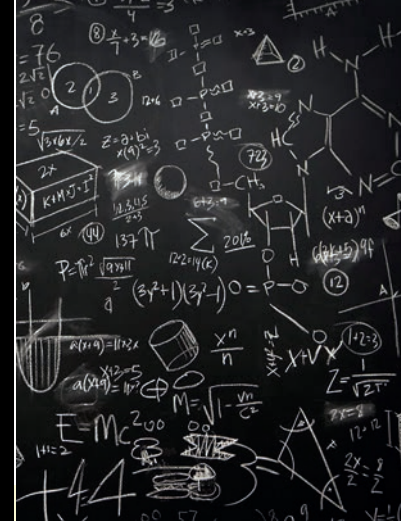
Arriba al centro: <https://www.palacecertified.top/mathematics-equations-science-education-art-poster-print-32x24-p-7637.html>

Arriba a la derecha: <https://www.pinterest.co.uk/pin/123637952240189201/>

Página derecha: <https://www.irishtimes.com/news/education/comment-if-teachers-don-t-understand-mathematical-reasoning-themselves-it-is-hardly-surprising-that-students-may-feel-discouraged-1.1774203>

Módulo Uno

Conceptos en torno a la integral



Propósito

Conoce la definición de diferencial de una función y su interpretación geométrica, así como el cálculo de diferenciales mediante fórmulas fundamentales y su aplicación en diversos problemas.



Competencias a desarrollar

Genéricas

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
 - 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
 - 8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
 - 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión de análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

Examen diagnóstico

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

2. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x + 11$

3. $f(x) = (x^2 + 3x - 1)(2x - 1)$

4. $f(x) = (5x^2 - x)(2x - 1)$

5. $F(u) = \left(1 + \sqrt{u}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)$

6. $y = \left(x^2 \sqrt{3} + 5\sqrt{x^3}\right)^4$

7. $y = x\sqrt{5} - 2\sqrt{3x+5}$

8. $y = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}$

9. $y = \left[(x+1)\cos x - x\operatorname{sen} x\right]$

10. $y = \left(\frac{1 + \cos x}{x\operatorname{sen} x}\right)$



Introducción

Existen situaciones, dentro y fuera de las matemáticas, en las que necesitamos estimar una diferencia, por ejemplo, en el cálculo de errores al efectuar mediciones (valor real menos valor aproximado), o simplemente para calcular variaciones de la variable dependiente cuando la independiente se modifica "un poco", entre otros.

Una recta tangente se usa como la mejor aproximación lineal a una función en las cercanías del punto de tangencia. Las diferenciales son útiles para aproximar o estimar valores que mentalmente sería complicado calcular como: $\sqrt{38}$, $\sqrt{48}$, o $\sin 61^\circ$ (esto, por supuesto, con la calculadora no sería problema). Para aproximar cálculos utilizando la diferencial, es necesario determinar una función de la cual partir.

1.1 La diferencial de una función

Considerando la función $y = f(x)$. En algunas aplicaciones la variable independiente x varía ligeramente; se necesita encontrar la variación correspondiente de la variable dependiente y . Si x cambia de un valor inicial x_1 a uno final x_2 , la magnitud del cambio, denominado **incremento de x** (denotado por Δx), será la diferencia del valor final x_2 con el valor inicial x_1 , es decir:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

De la igualdad anterior, se obtiene:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

Análogamente Δy o $\Delta f(x)$, **denominado incremento de y o incremento de la función $f(x)$** , representa la variación de la variable dependiente y , correspondiente al cambio Δx , y es la diferencia del valor de la función en x_2 con el valor de la función en x_1 , es decir:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O bien

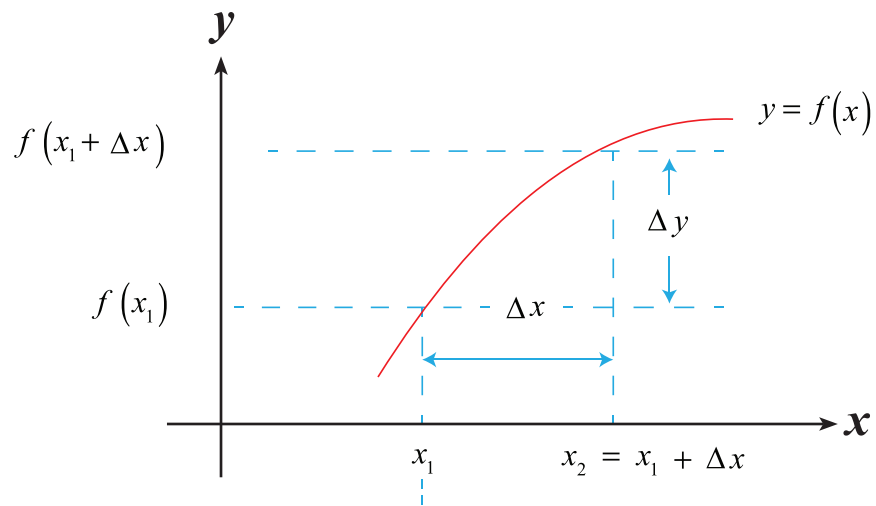
$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

En general, Δy puede escribirse como:

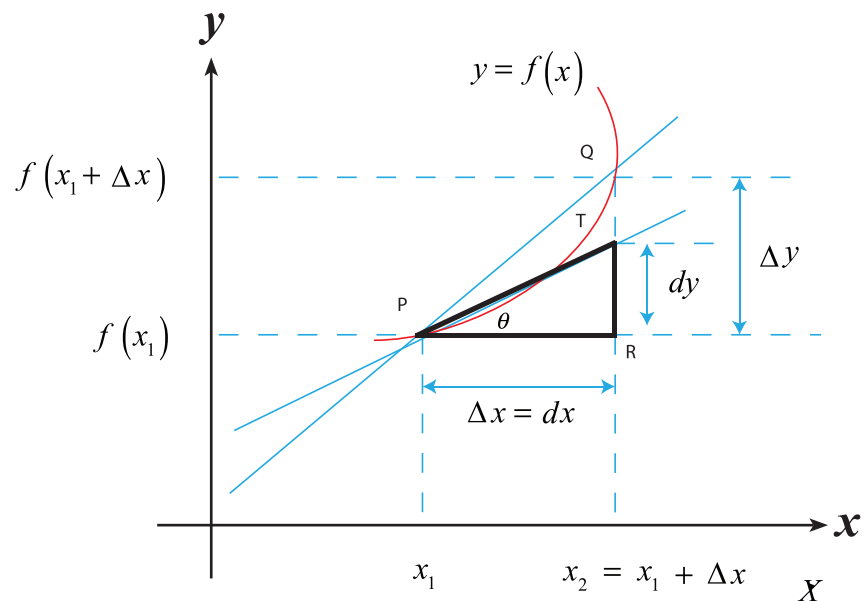
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Gráficamente se representa así:



Una manera de aproximarse a la gráfica de una función es mediante una recta tangente, como se muestra en la siguiente figura:



En la figura se aprecia que si x se incrementa una cantidad Δx , la **diferencial de y** (denotada por dy) representa lo que sube (o baja) la **recta tangente**, cuando la variable independiente cambia de x_1 a $x_1 + \Delta x$. Por su lado, Δy indica qué tanto sube (o baja) la **gráfica** entre P y Q . En la figura se han dibujado Δx y Δy como cantidades positivas; sin embargo, también pueden ser negativas. Ahora bien, cuando Δx es pequeño, para una aproximación de este tipo, esta cantidad

tradicionalmente se denota como dx y recibe el nombre de la **diferencial de x** ; es decir, $\Delta x = dx$; Δy puede aproximarse de la siguiente manera:

Recordemos que la pendiente m de una recta se define como la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación θ y que la derivada de una función $f(x)$, denotada por $f'(x)$ o y' , es la pendiente de la recta tangente en un punto de la función.

Si observamos el punto P y el triángulo PTR de la figura tenemos que:

$$f'(x) = m = \tan \theta$$

$$f'(x) = \frac{TR}{PR}$$

Pero $TR = dy$ y $PR = \Delta x = dx$

de donde:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Si se despeja dy , finalmente obtenemos la fórmula para calcularlo:

$$dy = f'(x)dx \text{ o } dy = y'dx$$

Por otra parte, si Δx fuera aproximadamente igual a 0 (denotado por $\Delta x \approx 0$); es decir, que el valor de x_1 estuviera muy cercano al valor de x_2 ,

entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que es la pendiente de la secante que pasa por P y Q , estaría muy

cerca de la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente en P , de lo que deduce que, si $f(x)$ es derivable, entonces:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad \text{si } \Delta x \approx 0$$



Si despejamos Δy

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

$$\Delta y \approx f'(x)dx$$

$$\Delta y \approx dy$$

O bien

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx dy$$

Por lo tanto, si Δx es cercano a 0, se puede usar dy como una **aproximación** al incremento Δy , que es el cambio **real** en y , correspondiente a un incremento pequeño de la variable x . Este resultado es útil para las *aplicaciones* en las que no se necesita una estimación muy exacta del incremento de la variable y .

Ejemplo:

Dada la función $y = x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, calcular:

- dy
- el valor de dy para $x = 2$ y $\Delta x = 0.1$

Solución:

- Sea $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 3$; entonces

$$dy = f'(x)dx$$

$$dy = (3x^2 + 8x - 2)dx$$

- $dx = \Delta x$; sustituyendo $x = 2$ y $dx = 0.1$ en la fórmula para dy tenemos

$$dy = [3(2)^2 + 8(2) - 2](0.1) = 2.6$$

Ejercicio

Sea la función $y = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, calcular:

- a) dy
- b) el valor de dy para $x = 3$ y $\Delta x = 0.1$

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x^2 + 5x - 6$:

- a) Determinar Δy cuando x cambia de 3 a 3.1
- b) Usar dy para estimar Δy para el mismo cambio en x

Solución:

- a) Datos $x = 3$, $x + \Delta x = 3.1$, $\Delta x = 0.1$

Para calcular Δy tenemos

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = f(3.1) - f(3)$$

$$\Delta y = [3.1^2 + 5(3.1) - 6] - [3^2 + 5(3) - 6]$$

$$\Delta y = 1.11$$



b) Ahora para calcular dy tenemos

$$dy = f'(x)dx, \quad dx = \Delta x$$

$$dy = (2x + 5)dx$$

$$dy = (2(3) + 5)(0.1)$$

$$dy = 1.1$$

El error en la aproximación es $= 1.11 - 1.1 = 0.01$

Ejercicio

Sea la función $y = 2x^2 + x - 8$:

- Determinar Δy cuando x cambia de 2 a 2.1
- Usar dy para estimar Δy para el mismo cambio

1.1.1 Cálculo de la diferencial de una función por fórmulas

Para determinar la diferencial dy de una función real de variable real $f(x)$ (algebraica o trascendente), se aplica la definición de la diferencial ($dy = f'(x)dx$) y las fórmulas correspondientes de la derivada de dichas funciones, es decir, las fórmulas fundamentales para determinar diferenciales son las mismas que se utilizan para determinar derivadas, únicamente es necesario multiplicar cada una de ellas por dx o du o dv (según sea la variable). Así tenemos:

1. $d(k) = 0$ si k es una constante
2. $d(x) = dx$
3. $d(kx) = kdx$
4. $d(x^n) = n x^{n-1}dx$ para $n \in R$
5. $d(u + v) = du + dv$ (u y v son dos funciones reales de variable real continuas)
6. $d(uv) = u dv + v du$
7. $d\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v du - u dv}{(v)^2}$ si $v \neq 0$
8. $d[u]^n = n[u]^{n-1} du$
9. $d(ku) = k du$
10. $d(\operatorname{sen} u) = \cos u du$
11. $d(\cos u) = -\operatorname{sen} u du$
12. $d(\tan u) = \sec^2 u du$
13. $d(\cot u) = -\operatorname{csc}^2 u du$
14. $d(\sec u) = \sec u \tan u du$
15. $d(\csc u) = -\csc u \cot u du$



$$16. d(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2} du$$

$$17. d(\operatorname{arc cot} u) = -\frac{1}{1+u^2} du$$

$$18. d(\operatorname{arc sen} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$19. d(\operatorname{arc cos} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$20. d(\operatorname{arc sec} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du$$

$$21. d(\operatorname{arc csc} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du$$

$$22. d(a^u) = a^u \ln a du, \text{ donde } a \text{ es una constante}$$

$$23. d(e^u) = e^u du, \text{ donde } e \text{ es el número de Euler}$$

$$24. d(\log_a u) = \frac{du}{u} \log_a e$$

$$25. d(\ln u) = \frac{du}{u}$$

Ejemplo:

Calcular la diferencial de la función: $y = 5x^3 + 4x^2 - x + 3$

Solución:

En este caso emplearemos las fórmulas

$$d(x^n) = n x^{n-1} dx, d(u+v) = du + dv, d(x) = dx \text{ y } d(k) = 0$$

$$dy = f'(x) dx$$

$$dy = (15x^2 + 8x - 1) dx$$

Ejercicio

Calcular la diferencial de la función: $y = 2x^3 - 7x^2 + x + 8$

Ejemplo:

Calcular la diferencial de la función: $y = \frac{2}{x^3} + 5\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x^3}} + 10$

Solución:

Expresamos la función como potencias negativas o fraccionarias de x

$$y = 2x^{-3} + 5x^{1/2} + x^{2/3} + 3x^{-3/2} + 10$$

Y empleamos las fórmulas 5, 4 y 1

$$dy = y' dx$$

$$dy = \left(-6x^{-4} + \frac{5}{2}x^{-1/2} + \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{9}{2}x^{-5/2} \right) dx$$

$$dy = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{5}{2} \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{3} \frac{1}{x^{1/3}} - \frac{9}{2} \frac{1}{x^{5/2}} \right) dx$$

$$dy = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2\sqrt{x^5}} \right) dx$$



Ejercicio

Calcular la diferencial de la función: $y = \frac{1}{x^2} + 5\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x^5}} + 15$

Ejemplo:

Calcular la diferencial de la función: $f(x) = (5 + x^3)(x^2 - 2)^2$

Solución:

Aplicamos las fórmulas correspondientes 6, 5, 4, 1 y simplificamos

$$dy = f'(x)dx$$

$$dy = \left[(5 + x^3)d(x^2 - 2)^2 + (x^2 - 2)^2 d(5 + x^3) \right] dx$$

$$dy = \left[(5 + x^3)2(x^2 - 2)d(x^2 - 2) + (x^2 - 2)^2(3x^2) \right] dx$$

$$dy = \left[(5 + x^3)2(x^2 - 2)(2x) + (x^4 - 4x^2 + 4)(3x^2) \right] dx$$

$$dy = \left[(5 + x^3)(2x^2 - 4)(2x) + (3x^6 - 12x^4 + 12x^2) \right] dx$$

$$dy = \left[(5 + x^3)(4x^3 - 8x) + (3x^6 - 12x^4 + 12x^2) \right] dx$$

$$dy = \left[(20x^3 - 40x + 4x^6 - 8x^4) + (3x^6 - 12x^4 + 12x^2) \right] dx$$

$$dy = \left[7x^6 - 20x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 40x \right] dx$$

Ejercicio

Calcular la diferencial de la función: $f(x) = (2 + x^3)^2 (3 - x^2)$

Ejemplo:

Calcular la diferencial de la función $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

Solución:

Transformamos el radical a exponente fraccionario

$$y = \frac{x^2}{(4-x^2)^{1/2}}$$

Se aplican las fórmulas 7, 4 y 1

$$\begin{aligned} dy &= y' dx \\ dy &= \left[\frac{(4-x^2)^{1/2} d(x^2) - x^2 d(4-x^2)^{1/2}}{\left((4-x^2)^{1/2}\right)^2} \right] dx \\ dy &= \left[\frac{(4-x^2)^{1/2} (2x) - x^2 \frac{1}{2} (4-x^2)^{-1/2} d(4-x^2)}{(4-x^2)} \right] dx \end{aligned}$$



$$dy = \left[\frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) - x^2 \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x)}{(4-x^2)} \right] dx$$

$$dy = \left[\frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) + x^3(4-x^2)^{-1/2}}{(4-x^2)} \right] dx$$

$$dy = \left[\frac{\sqrt{4-x^2}(2x) + x^3 \frac{1}{(4-x^2)^{1/2}}}{(4-x^2)} \right] dx$$

$$dy = \left[\frac{\sqrt{4-x^2}(2x) + \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}}{(4-x^2)} \right] dx$$

$$dy = \left[\frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2(2x) + x^3}{\sqrt{4-x^2}(4-x^2)} \right] dx$$

$$dy = \left[\frac{(4-x^2)(2x) + x^3}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} \right] dx$$

$$dy = \left[\frac{8x - 2x^3 + x^3}{(4-x^2)(4-x^2)^{1/2}} \right] dx$$

$$dy = \left[\frac{8x - x^3}{(4-x^2)^{3/2}} \right] dx$$

Ejercicio

Calcular la diferencial de la función $y = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$



Ejemplo:

Calcular la diferencial de la función $f(w) = w\sqrt{3-2w^2} = w(3-2w^2)^{1/2}$

Solución:

En este caso la variable independiente es w , por lo que diferenciaremos esta literal aplicando primeramente la fórmula 7 y después la 4 y 1:

$$dy = f'(w)dw$$

$$dy = \left[wd(3-2w^2)^{1/2} + (3-2w^2)^{1/2} d(w) \right] dw$$

$$dy = \left[w \frac{1}{2} (3-2w^2)^{-1/2} d(3-2w^2) + (3-2w^2)^{1/2} (1) \right] dw$$

$$dy = \left[w \frac{1}{2} (3-2w^2)^{-1/2} (-4w) + (3-2w^2)^{1/2} \right] dw$$

$$dy = \left[\frac{-2w^2}{(3-2w^2)^{1/2}} + (3-2w^2)^{1/2} \right] dw$$

$$dy = \left[\frac{-2w^2 + ((3-2w^2)^{1/2})^2}{(3-2w^2)^{1/2}} \right] dw$$

$$dy = \left[\frac{-2w^2 + (3-2w^2)}{(3-2w^2)^{1/2}} \right] dw$$

$$dy = \left[\frac{-4w^2 + 3}{\sqrt{3-2w^2}} \right] dw$$

Ejercicio

Calcular la diferencial de la función $f(z) = 2z^2\sqrt{2-z}$



Ejemplo:

Calcular la diferencial de las siguientes funciones:

a) $y = x \cos x$

b) $y = \sin 2x + \cos 3x$

c) $y = \tan(x^3)$

d) $f(x) = \cot^2(2 - x^2)$

Solución:

Función	Fórmulas	Diferencial
$y = x \cos x$	6, 11	$= [x(-\sin x) + \cos x(1)] dx$ $= [-x \sin x + \cos x] dx$
$y = \sin 2x + \cos 3x$	5, 10, 11	$= [\cos(2x)(2) + (-\sin 3x)(3)] dx$ $= [2 \cos(2x) - 3 \sin(3x)] dx$
$y = \tan(x^3)$	12, 4	$= [\sec^2(x^3)(3x^2)] dx$ $= [3x^2 \sec^2(x^3)] dx$
$f(x) = \cot^2(2 - x^2)$	8, 13, 4, 1	$= [2 \cot(2 - x^2)(-\csc^2(2 - x^2)(-2x))] dx$ $= [4x \cot(2 - x^2) \csc^2(2 - x^2)] dx$

Ejercicio

Calcular la diferencial de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 \operatorname{sen} x$

b) $y = \operatorname{sen} 3x - \cos 2x$

c) $y = \cot(x^2)$

d) $f(x) = \tan^2(3 - x^3)$



Ejemplo:

Calcular la diferencial de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{\csc x}{x}$

b) $y = e^{-t \operatorname{sent}}$

c) $f(x) = 5^{-x^2+4x}$

d) $y = \log(5x^2 - 3)$

Solución:

Función	Fórmulas	Diferencial
$y = \frac{\csc x}{x}$	7, 2, 15	$= \left[\frac{x(-\csc x \cot x) - \csc x(1)}{x^2} \right] dx$ $= \left[\frac{-\csc x(x \cot x - 1)}{x^2} \right] dx$
$y = e^{-t \operatorname{sent}}$	23, 6	$= \left[e^{-t \operatorname{sent}} (-t \operatorname{cost} + \operatorname{sent}(-1)) \right] dt$ $= \left[(-t \operatorname{cost} - \operatorname{sent}) e^{-t \operatorname{sent}} \right] dt$
$f(x) = 5^{-x^2+4x}$	22, 4, 3	$= \left[5^{-x^2+4x} (\ln 5)(-2x+4) \right] dx$ $= \left[(-2x+4)(\ln 5) 5^{-x^2+4x} \right] dx$
$y = \log(5x^2 - 3)$	24, 4, 1	$= \left[\frac{(10x) \log e}{(5x^2 - 3)} \right] dx$

Ejercicio

Calcular la diferencial de las siguientes funciones:

$$y = \frac{\sec x}{x}$$

$$y = e^{-x \cos x}$$

$$f(x) = 2^{x^2 + x - 3}$$

$$y = \ln(3x^2 + 5)$$



1.2 La antiderivada de una función

En la asignatura de Cálculo diferencial se enunciaron ejercicios en la forma “dada la función $f(x)$, encontrar la derivada $f'(x)$ ”. Existe también el problema inverso, es decir, “dada la derivada $f'(x)$, obtener la función $f(x)$ ”. Por ejemplo, supongamos que queremos obtener una función $F(x)$ cuya derivada sea $3x^2$; por lo que sabemos de derivadas, podemos afirmar que $F(x) = x^3$, ya que $D_x(x^3) = 3x^2$.

Decimos que $F(x)$ es una **antiderivada** de $3x^2$.

Notemos, sin embargo, que $F(x)$ es **una** antiderivada de $3x^2$ y no **la** antiderivada, ya que podemos ver que:

$$F_1(x) = x^3 + 4, F_2(x) = x^3 - 48, F_3(x) = x^3 + 100$$

son también antiderivadas de $3x^2$. De hecho, para cualquier constante C (llamada **constante de integración**), la función dada por $F(x) = x^3 + C$ representa la familia completa de antiderivadas de $3x^2$.

1.2.1 La integral indefinida

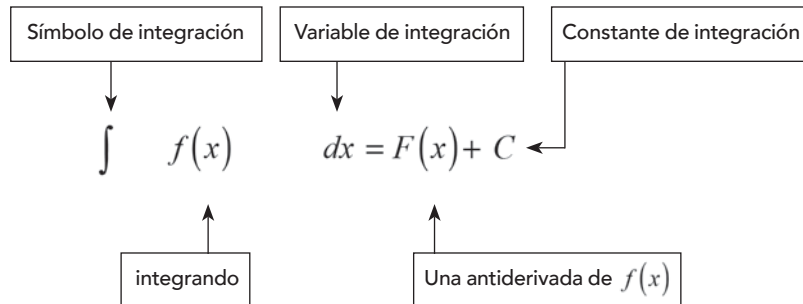
De lo anterior podemos establecer la siguiente definición

Una función $F(x)$ es una **antiderivada o primitiva** de otra función $f(x)$ en un intervalo I , si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I .

La operación para determinar la familia de todas la antiderivadas de una función $f(x)$ se denomina **antiderivación** o **integración indefinida**, y se denota de la siguiente manera:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

En donde:



El término **integral indefinida** es sinónimo de antiderivada, y la diferencial dx sirve para identificar a x como la variable de integración.

En el siguiente módulo, estudiaremos detalladamente este tema con fórmulas para determinar la antiderivada o integral de una función

Problemas de aplicación de diferenciales

Ejemplo:

La medida de la arista de un cubo es de 15 cm, con un error posible de 0.01 cm. Empleando diferenciales, determinar el error aproximado al calcular el volumen.

Solución:

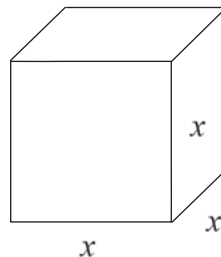
Dibujamos el cubo y consideramos como función a la del volumen del cubo

$$V(x) = x^3$$

Tendríamos como datos

$$dx = 0.01 \text{ cm}$$

$$x = 15 \text{ cm}$$





Obtenemos la diferencial del volumen en términos de la diferencial de un lado

$$dV = 3x^2 dx$$

Sustituimos datos

$$dV = 3(15 \text{ cm})^2 (0.01 \text{ cm})$$

Efectuamos operaciones y el resultado será el error aproximado al evaluar el volumen

$$dV = 6.75 \text{ cm}^3$$

Ejercicio

Se calcula que el radio de un disco circular es aproximadamente igual a 8 cm con un error máximo en la medición de 0.06 cm. Usando diferenciales, estimar el máximo error obtenido al calcular el área del disco.

Ejemplo:

En una refinería de PEMEX un tanque cilíndrico tendrá un revestimiento de 2 cm de espesor. Si el radio interior tiene 6 m y su altura es de 10 m, calcular, mediante diferenciales, la cantidad aproximada de material de revestimiento que se utilizará. ¿Cuál es el valor exacto del material de revestimiento?

**Solución:**

La función del volumen del cilindro está dada por:

$$V(r) = \pi r^2 h$$

Si se incrementa el radio r una cantidad dr , el revestimiento será el incremento ΔV del volumen. Usando diferenciales tenemos:

$$\Delta V \approx dV = V'$$

$$\Delta V \approx 2\pi r h dr$$



Sustituyendo datos: $dr = 2\text{ cm}$, $r = 6\text{ m}$ $h = 10\text{ m}$

$$\Delta V \approx 2\pi(6\text{ m})(10\text{ m})(0.02\text{ m})$$

$$\Delta V \approx 2.4\pi\text{ m}^3$$

$$\Delta V \approx 7.5398\text{ m}^3$$

Si se quisiera el volumen exacto del revestimiento, entonces:

$$\Delta V = \pi(r + \Delta r)^2 h - \pi r^2 h$$

$$\Delta V = \pi(6.02\text{ m})^2(10\text{ m}) - \pi(6\text{ m})^2(10\text{ m})$$

$$\Delta V = 7.5524\text{ m}^3$$

Por lo tanto, el error en la aproximación sería: $7.5524\text{ m}^3 - 7.5398\text{ m}^3 = 0.0126\text{ m}^3$.

Ejercicio

Usando diferenciales, estimar el crecimiento del volumen de un cubo si cada uno de sus lados cambia de 10 a 10.1 cm. ¿Cuál es el valor exacto del incremento del volumen?

Ejercicios adicionales

I. Para las siguientes funciones:

- a) Determinar Δy cuando x cambia de 1 a 1.1.
- b) Usar dy para estimar Δy para el mismo cambio en x .

1. $f(x) = \sqrt{x+2}$

2. $f(x) = x^2 + 4$

3. $f(x) = \sqrt{x}$

4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

5. $f(x) = \frac{1}{x-3}$

6. $f(x) = \frac{x}{x-2}$

II. Determinar la diferencial de las siguientes funciones aplicando teoremas.

1. $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $y = (x^2 + 4\sqrt{x^3})^4$

3. $y = \sqrt{(1-x^2)^3} - \sqrt{1-x^2}$

4. $y = \sqrt{2 + \sqrt{2x}}$

5. $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

6. $y = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x$



$$7. \quad y = \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}$$

$$8. \quad y = \ln x^3 + \ln^3 x$$

$$9. \quad y = \ln(x + \ln x)$$

$$10. \quad y = \ln \sqrt{x} + \sqrt{\ln x}$$

$$11. \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$12. \quad y = \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3 + 1}}$$

$$13. \quad y = (x + 1) \sin x - x \cos x$$

$$14. \quad y = \left(\frac{1 + \sin x}{x \cos x} \right)$$

III. Problemas de aplicación

- Usando diferenciales, calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{66}$.
- Usando diferenciales, calcular el valor aproximado de $\sqrt[4]{17}$.
- Utilizando diferenciales, estimar el volumen aproximado de material que se necesita para elaborar una pelota de goma para jugar frontón, considerando que el radio del núcleo interno hueco es de 2 pulgadas y el espesor de material es $1/8$ de pulgada.
- Una placa circular se dilata por la acción del calor de manera que su radio se incrementa de 5 a 5.06 cm. Calcular el incremento aproximado del área que sufre la placa.

Respuestas

I.

1. $\Delta y = 0.0286, dy = 0.0288$
2. $\Delta y = 0.21, dy = 0.20$
3. $\Delta y = 0.0488, dy = 0.0500$
4. $\Delta y = -0.1735, dy = -0.2000$
5. $\Delta y = -0.0263, dy = -0.0250$
6. $\Delta y = -0.2222, dy = -0.2000$

II.

1. $dy = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \right) dx$
2. $dy = \left[8 \left(x^2 + 4\sqrt{x^3} \right)^3 \left(x + 3\sqrt{x} \right) \right] dx$
3. $dy = \left(\frac{3x^3 - 2x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx$
4. $dy = \left[\frac{1}{2\sqrt{2x}(2 + \sqrt{2x})} \right] dx$
5. $dy = \left[-\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x)^3}} \right] dx$
6. $dy = \left[\sec^2 x (\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1) \right] dx$
7. $dy = \left[\cos 2x \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sin 2x}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \sin 2x}} \right) \right] dx$
8. $dy = \left[\frac{3}{x} (1 + \ln^2 x) \right] dx$
9. $dy = \left[\frac{x + 1}{x(x + \ln x)} \right] dx$



$$10. \, dy = \left[\frac{\sqrt{\ln x} + 1}{2x\sqrt{\ln x}} \right] dx$$

$$11. \, dy = \left[\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \right] dx$$

$$12. \, dy = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^4}}$$

$$13. \, dy = x \cos x + (x + 1) \sin x$$

$$14. \, dy = \frac{x + x \sin x - (1 + \sin x) \cos x}{x \cos x^2}$$

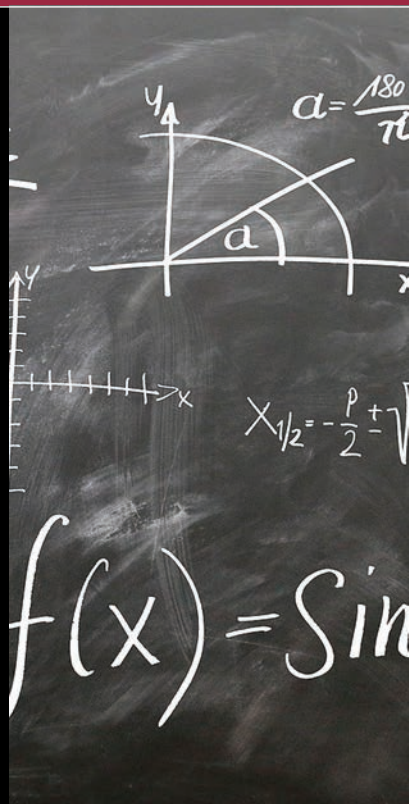
III.

$$1. \, R = 4.042$$

$$2. \, R = 2.03125$$

$$3. \, R = 2\pi \, plg^3$$

$$4. \, R = 0.6 \, \pi plg^2 \approx 1.8849 \, plg^2$$



Arriba a la izquierda: <https://academics.rowan.edu/csm/departments/physics/acad/index.html>

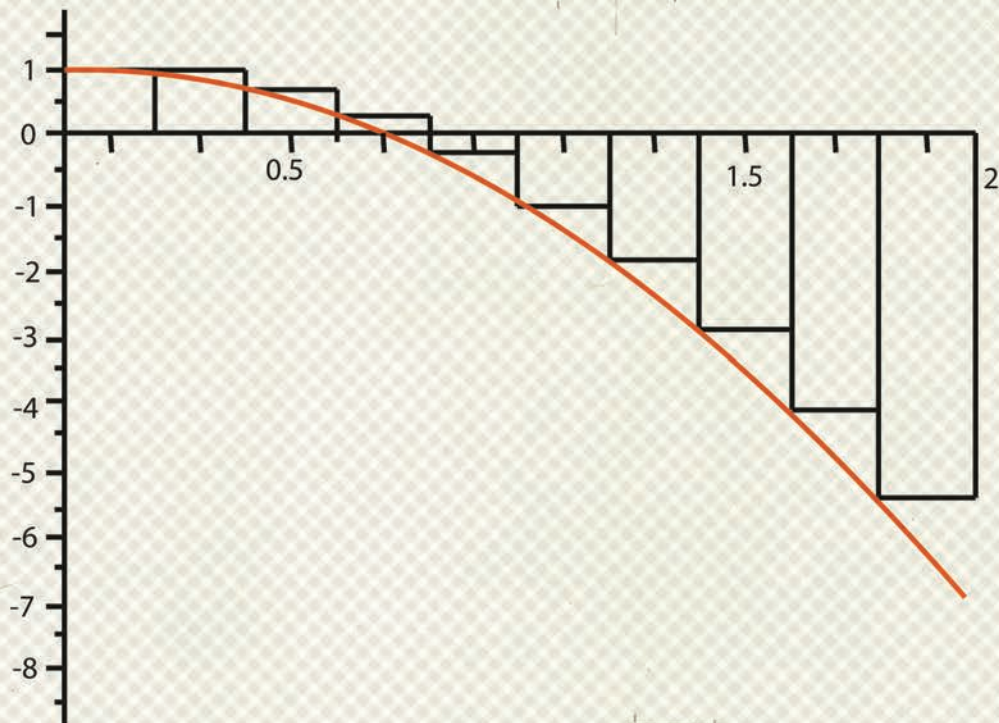
Arriba al centro: <https://www.pinterest.com.mx/pin/463378249140313412/>

Arriba a la derecha: <https://www.pinterest.co.uk/ankemet/futuristic/>

Página derecha: <http://www.ultracurioso.com.br/wp-content/uploads/2015/11/math-behind-bitcoin.jpg>

Módulo Dos

Métodos de integración directa por cambio de variable algebraica y por partes



Propósito

Piensa de manera flexible, analítica y crítica al aplicar los métodos de integración directa, por cambio de variable algebraica y por partes.



Competencias a desarrollar

Genéricas

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
 - 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
 - 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
 - 8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
 - 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Disciplinarias

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

Introducción

El primer uso de las integrales data del Antiguo Egipto (1800 a.C.) para el cálculo de volúmenes. Este concepto fundamental de las matemáticas fue perfeccionado desde entonces por numerosos científicos entre los que se destacan Arquímedes, Fermat y Barrow. A mediados de 1665 dos brillantes matemáticos, Isaac Newton y Gottfried Leibniz, elaboran el "Teorema fundamental del Cálculo", principal adelanto en la integración. Este hallazgo no fue cooperativo, sino más bien individual, hecho que generó una gran disputa por la autoría del mismo.

Finalmente, Cauchy, Reimann y Lebesgue formalizaron el sistema actual de cálculo de integrales empleando el uso de límites.

Las integrales se usan cotidianamente para el cálculo de áreas, longitudes de curvas y volúmenes de sólidos de revolución, entre otras aplicaciones.

Los métodos de integración consisten en diferentes técnicas elementales usadas para calcular una antiderivada o integral indefinida de una función.

Así, dada una función $f(x)$, los métodos de integración son técnicas cuyo uso (usualmente combinado) permite obtener una función $F(x)$ tal que:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Lo cual, por el teorema fundamental del cálculo, equivale a deducir una función $F(x)$, tal que $f(x)$ es su derivada.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$



2.1 Integración directa por fórmulas

La integración directa requiere establecer una tabla de funciones y sus antiderivadas o funciones primitivas. La aplicación de los métodos de integración requiere del uso de las propiedades de las operaciones como potenciación, radicación, multiplicación, división, suma y resta, además de productos notables, racionalización e identidades trigonométricas, entre otras.

La integral indefinida se denota como $\int f(x) dx$ y está dada en la forma:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Por ejemplo:

a) Si $F(x) = 3x^5$

$$dF(x) = f(x) = 15x^4 dx$$

Entonces: $\int 15x^4 dx = 3x^5 + C$

b) $\int 7x^6 dx =$

Buscamos una función tal que su diferencial sea $7x^6 dx$.

Considerando x^7 , tenemos que $dx^7 = 7x^6 dx$.

Por lo que $\int 7x^6 dx = x^7 + C$

La siguiente tabla resume las fórmulas de integración elementales, donde $u=f(x)$, con el propósito de darles una forma general, considerando que u puede ser una función de "x" o de cualquier otra variable.

Tabla 1. Fórmulas fundamentales de integración

1. Diferencial $dy = f'(x)dx$	$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$ $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$
2. Integral indefinida $\int dx = x + C$ $\int k dx = kx + C$; k es una constante $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \in \mathbb{R}$ y $n \neq -1$ $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$ $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$ $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ $\int e^u \, du = e^u + C$ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C$ $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C$ $\int \frac{dx}{c^2 - x^2} = \frac{1}{2c} \ln \frac{c+x}{c-x} + C$ $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{u-a}{u+a} + C$
3. Fórmulas fundamentales $\int \sin u \, du = -\cos u + C$ $\int \cos u \, du = \sin u + C$ $\int \tan u \, du = \ln \sec u + C$ $\int \cot u \, du = \ln \sin u + C$ $\int \sec u \, du = \ln \sec u + \tan u + C$ $\int \csc u \, du = \ln \csc u - \cot u + C$	$\int \frac{dx}{a + be^{mx}} = \frac{1}{am} [mx - \ln(a + b)] + C$ $\int e^{mx} \, dx = \frac{1}{m} e^{mx} + C$



Ejemplos:

Calcular las siguientes integrales utilizando las fórmulas correspondientes:

a) $\int x^6 dx$

Aplicando la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Donde $n = 6$

Se obtiene:

$$\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C$$

O bien

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$$

b) $\int 3x^4 dx$

Aplicando las fórmulas: $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ y $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Donde:

$k = 3$ $f(x) = u = x^4$ $n = 4$

Se obtiene:

$$\int 3 x^4 dx = 3 \int x^4 dx$$

$$= 3 \left(\frac{x^{4+1}}{4+1} \right) + C$$

$$= 3 \left(\frac{x^5}{5} \right) + C$$

Por lo que

$$\int 3x^4 dx = \frac{3}{5}x^5 + C$$

$$c) \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

Aplicando primero la fórmula: $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$, se tiene:

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{x^3} dx + \int \frac{1}{x^2} dx$$

Por leyes de exponentes: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

De donde:

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int x^{-3} dx + \int x^{-2} dx$$

Aplicando la fórmula: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ se tiene

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

Por lo que se obtiene:

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-1}}{-1}$$

Teniendo finalmente:

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + C$$



d) $\int \sin x \cos x \, dx$

Aplicando la fórmula:

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Para obtener la primera integral

Donde:

$$u = \sin x \quad du = \cos x \, dx \quad n = 1$$

Se obtiene:

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + C$$

Finalmente:

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

e) $\int 4 \cos 4x \, dx$

Aplicando la fórmula:

$$\int \cos u \, du = \sin u + C$$

Donde: $u = 4x$ y $du = 4 \, dx$

Se obtiene:

$$\int 4 \cos 4x \, dx = \sin 4x + C$$

Ejercicio

Calcular las siguientes integrales aplicando las fórmulas correspondientes:

a) $\int 7 dx$

b) $\int x^6 dx$

c) $\int 7x^3 dx$

d) $\int x^{\frac{2}{3}} dx$

e) $\int \frac{3}{x^4} dx$

f) $\int \sqrt[3]{x} dx$

g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

h) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt[5]{x^2}} dx$

i) $\int (x^4 - 6x^2 - 2x + 4) dx$

j) $\int \left(\sqrt{5x} + \sqrt{\frac{5}{x}} \right) dx$



Respuestas:

a) $7x+C$

f) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

b) $\frac{x^7}{7}+C$

g) $3\sqrt[3]{x}+C$

c) $\frac{7x^4}{4}+C$

h) $\frac{-5}{7\sqrt[5]{x^7}}+C$

d) $\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}+C$

i) $\frac{x^5}{5}-2x^3-x^2+4x+C$

e) $\frac{-1}{x^3}+C$

j) $\frac{2x\sqrt{5x}}{3}+2\sqrt{5x}+C$

2.2 Integración por cambio de variable algebraica

Como se ha visto, los ejercicios sencillos se han resuelto de manera natural, aplicando operaciones algebraicas elementales y con la fórmula.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

A partir de ella se han podido obtener integrales como:

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + C$$

O integrales, tales como:

$$\int \sqrt{x^3} dx, \int \frac{\sqrt{x^3}}{x} dx, \int \sin x \cos x dx$$

Sin embargo, si la variable no aparece de manera sencilla en la función a integrar, es decir, si se tiene una función $f(x)=u$, se puede integrar aplicando la fórmula:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Ejemplo:

$$\int (3x-5)^2 dx$$

Se aplica la fórmula:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Por lo que primero se debe identificar:

$$u = 3x - 5 \quad du = 3 dx \quad n = 2$$

Para poder integrar aplicando la fórmula indicada, se debe multiplicar por 3 y dividir entre 3 para no alterar la integral:

$$\begin{aligned} \int (3x-5)^2 \frac{3}{3} dx &= \frac{1}{3} \int (3x-5)^2 3 dx \\ &= \frac{1}{3} \frac{(3x-5)^{2+1}}{2+1} + C \end{aligned}$$

Por lo que el resultado es:

$$\int (3x-5)^2 dx = \frac{1}{3} \int (3x-5)^2 3 dx$$

Ejercicio

Calcular la siguiente integral: $\int (4x-3)^2 dx$



Ejemplo:

Análogamente se podía integrar $\int \cos^3 x \, dx$ con la fórmula indicada, para lo cual la tendríamos que completar en la forma:

$$\begin{aligned} u &= \cos x \\ du &= -\operatorname{sen} x \, dx \\ n &= 3 \end{aligned}$$

Como no se podría multiplicar y dividir por $-\operatorname{sen} x$, la integral correcta debe ser:

$$\int \cos^3 x (\operatorname{sen} x) \, dx$$

Para poderla integrar hace falta multiplicar y dividir por -1, dado que $d(\cos x) = -\operatorname{sen} x \, dx$

Por lo que se tiene:

$$\int \cos^3 x \left(\frac{-\operatorname{sen} x}{-1} \right) dx = \frac{1}{-1} \int \cos^3 x (-\operatorname{sen} x \, dx)$$

Por lo que se tiene:

$$\int \cos^3 x (-\operatorname{sen} x) \, dx = -\frac{(\cos x)^{3+1}}{3+1} + C$$

Finalmente:

$$\int \cos^3 x (\operatorname{sen} x) \, dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$$

Lo que realmente se ha hecho con las dos integrales anteriores es reemplazar la variable x por la función u y completarla para la diferencial de u .

Además, se puede obtener con cambio de variable, donde la variable x se reemplaza por una función $f(x)=u$, para que la integral se calcule utilizando la función u .

Ejercicio

Calcular la siguiente integral:

$$\int 3\operatorname{sen}^3 x (\cos x) dx$$

Ejemplo:

Calcular la integral $\int \frac{(2\ln x - 3)^4}{x} dx$

Como se puede observar, la derivada de la función $\ln x$ es $\frac{1}{x}$, lo que nos sugiere aplicar el cambio de variable:

$$u = 2\ln x \Rightarrow du = 2 \frac{dx}{x}$$

Multiplicando y dividiendo por 2 y sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{(2\ln x - 3)^4}{2} \frac{2dx}{x} = \frac{1}{2} \int (2u - 3)^4 du$$

A su vez, esta integral tendría que obtenerse por cambio de variable, considerando $u = 2u - 3$, como se hizo anteriormente, obteniendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2\ln x - 3)^4}{2} \frac{2dx}{x} &= \frac{1}{2} \frac{(2u - 3)^5}{5} + C \\ &= \frac{(2u - 3)^5}{10} + C \end{aligned}$$

Sustituyendo nuevamente:

$$\int \frac{(2\ln x - 3)^4}{2} dx = \frac{(2\ln x - 3)^5}{10} + C$$

Sin embargo, para evitar realizar dos o más cambios de variable debemos analizar que lo importante es que la expresión $1/x$ es la derivada de $\ln x$ y también lo es de $(2 \ln x - 3)$, sin considerar la constante.



Podemos considerar el cambio de variable:

$$u = 2\ln x - 3 \quad \Rightarrow \quad du = 2 \frac{dx}{x} \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{2}$$

y al sustituir en la integral original, se tiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2\ln x - 3)^4}{2} dx &= \frac{1}{2} \int u^4 2 du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{u^5}{10} + C \end{aligned}$$

Sustituyendo nuevamente el valor de u :

$$\int \frac{(2\ln x - 3)^4}{x} dx = \frac{(2\ln x - 3)^5}{10} + C$$

De lo anterior se puede concluir que el cambio de variable procede cuando en el integrando aparece una función u y su diferencial multiplicada por una constante.

Ejercicio

Resolver la siguiente integral:

$$\int \frac{(\ln 2x - 1)^3}{x} dx$$

Ejemplo:

Calcular la integral de $2x^4\sqrt{3-x^5} \, dx$.

Primero se debe representar en forma exponencial:

$$\int 2x^4(3-x^5)^{\frac{1}{2}} dx$$

Si se considera la fórmula: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

Donde:

$$n = \frac{1}{2}$$

$$u = 3-x^5$$

$$du = -5x^4 dx$$

Podemos ver que el número 2 se puede sacar de la integral:

$$2\int(3-x^5)^{\frac{1}{2}} x^4 dx$$

Y se observa que para que este completa la du se debe multiplicar por -5 y dividir entre -5 , por lo que la integral quedaría:

$$\frac{2}{-5}\int(3-x^5)^{\frac{1}{2}}(-5x^4)dx$$

Por lo anterior, ya estaría completa y podemos integrarla aplicando directamente la fórmula indicada, considerando que $u = 3-x^5$.

Teniendo como resultado final:

$$\int 2x^4(3-x^5)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{4}{15}(3-x^5)^{\frac{3}{2}} + C$$



Existen otras situaciones en que el cambio de variable no es tan evidente en términos de la función u y su derivada, por lo cual debemos analizar y ver qué función fácil de integrar es similar a la función dada.

Ejercicio

Calcular la integral de: $3x^2\sqrt{1-x^3} \, dx$

Ejemplo:

Calcular $\int \frac{x^2}{1+x^6} \, dx$

Si se analiza la integral se puede observar que:

$$u = 1 + x^6$$

$$du = 6x^5 dx$$

En el ejemplo se tiene x^2 en el numerador, por lo que no podríamos aplicar la fórmula:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Sin embargo, revisando las fórmulas podemos ver que tiene similitud con la fórmula:

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

Donde

$$a = 1$$

$$u = x^3$$

$$du = 3x^2 dx$$

Entonces la integral debe quedar en la forma:

$$\int \frac{x^2}{1+(x^3)^2} dx$$

Pero para integrarla debemos de completarla multiplicando y dividiendo por 3:

$$\frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{1+(x^3)^2}$$

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{u du}{a^2 + u^2} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} \right) + C \end{aligned}$$

Sustituyendo las variables se tiene:

$$\int \frac{x^2}{1+(x^3)^2} dx = \frac{1}{3} \arctan x^3 + C$$

Ejemplo:

Calcular $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+9x^8}} dx$

En analogía al ejemplo anterior, se observa que la fórmula que se puede aplicar es:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$$



Donde:

$$u = \sqrt{9x^8} = 3x^4$$

$$du = 12x^3 dx$$

$$a = \sqrt{1} = 1$$

Entonces la integral se puede expresar en la forma:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + (3x^4)^2}}$$

Por lo que se debe completar du si multiplicamos y dividimos por 12

$$\frac{1}{12} \int \frac{12x^3 dx}{\sqrt{1 + (3x^4)^2}}$$

Aplicando la fórmula indicada se tiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1 + 9x^8}} dx &= \frac{1}{12} \int \frac{12x^3 dx}{\sqrt{1 + (3x^4)^2}} = \frac{1}{12} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ &= \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C \end{aligned}$$

Sustituyendo $u = 3x^4$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + 9x^8}} dx = \frac{1}{12} \ln |1 + \sqrt{1 + 9x^8}| + C$$

Ejemplo:

Calcular $\int \tan x \, dx$

Como se observa, se puede aplicar la fórmula directa para la $\int \tan x \, dx$; sin embargo, podemos obtenerla sustituyendo $\tan x \equiv \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Sustituyendo:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx \quad \text{y aplicar la fórmula} \quad \int \frac{du}{u} \, du.$$

Donde:

$$u = \cos x$$

$$du = -\operatorname{sen} x \, dx$$

Entonces la integral debe quedar:

$$-\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx$$

Y aplicando la fórmula $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$, se tiene

$$-\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = -\ln \cos x + C$$

Como $-\ln(\cos x) = \ln 1 - \ln(\cos x) = \ln(1/\cos x) = \ln(\sec x)$

Por lo que se puede expresar: $\int \tan x \, dx = \ln(\sec x) + C$

Que se obtiene igual aplicando la fórmula directa:

$$\int \tan u \, du = \ln|\sec u| + C$$

Análogamente se aplica la fórmula:

$$\int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$



Ejercicio

Calcular la $\int \frac{dx}{9+4x^2}$

Cuando se tiene una integral del tipo: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, donde $a \neq 0$, se puede aplicar fórmula directa, pero primero se debe adecuar la función para ello.

El procedimiento consistirá en completar el trinomio cuadrado perfecto y tomar el cambio de variable adecuado.

Por ejemplo, para obtener $\int \frac{dx}{2x^2+12x}$, primero se aplica el método de completar trinomio cuadrado perfecto.

$$\begin{aligned} 2x^2+12x &= 2[x^2+6x] = 2[x^2+6x+9-9] = 2[(x^2+6x+9)-9] \\ &= 2[(x+3)^2-9] \end{aligned}$$

Sustituimos en la integral e identificamos la fórmula que se puede aplicar:

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

Acomodamos la integral tal como la fórmula anterior:

$$\int \frac{dx}{2 \left[(x+3)^2 - 9 \right]}$$

Definimos:

$$u^2 = (x+3)^2 \rightarrow u = x+3$$

$$du = dx$$

$$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$$

Como vemos hay que sacar el 2 del integrando:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+3)^2 - 9}$$

Y aplicando la fórmula correspondiente, se tiene:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+3)^2 - 3^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

Sustituyendo u y a se obtiene:

$$\frac{1}{2(3)} \ln \left| \frac{x+3-3}{x+3+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x}{x+6} \right| + C$$

Es conveniente observar que no importa cuál sea el trinomio cuadrado, al completarlo nuestra integral siempre se reducirá a la aplicación de esta fórmula.

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 12x} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x}{x+6} \right| + C$$



Ejercicio

Calcular la $\int \frac{dx}{3x^2 + 12x - 15}$

Ahora vamos a calcular integrales del tipo: $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ donde $a \neq 0$

Por ejemplo:

Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{5x + 3}{3x^2 + 4x + 2} dx$$

Sería más sencillo si el numerador de la integral fuera la derivada del denominador, porque se podría calcular directamente.

Considerando la integral: $\int \frac{6x + 4}{3x^2 + 4x + 2} dx$

La fórmula a aplicar sería: $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

Donde

$$u = 3x^2 + 4x + 2$$

$$du = 6x + 4$$

$$\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+2} dx = \ln|3x^2+4x+2| + C$$

Pero no es este el caso, sin embargo se puede partir de esta función y modificar a una expresión más fácil para integrar:

Adecuando a la integral directa:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+3}{3x^2+4x+2} dx &= \int \frac{\frac{5}{6}(6x+4) + 3 - \frac{5(4)}{6}}{3x^2+4x+2} dx \\ &= \int \frac{\frac{5}{6}(6x+4) + 3 - \frac{1}{3}}{3x^2+4x+2} dx \end{aligned}$$

Separando las fracciones:

$$\frac{5}{6} \int \frac{(6x+4)}{3x^2+4x+2} dx - \int \frac{\frac{1}{3}}{3x^2+4x+2} dx$$

O bien

$$\frac{5}{6} \int \frac{(6x+4)}{3x^2+4x+2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x^2+4x+2} dx$$

La primer integral ya está resuelta y la segunda se resuelve con el procedimiento descrito en el ejemplo anterior.

$$\begin{aligned} 3x^2+4x+2 &= 3\left(x^2+4x+\frac{2}{3}\right) = 3\left[x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\right] \\ &= 3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right] \end{aligned}$$



Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3x^2 + 4x + 2} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left[\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{9} \right]} dx \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3 \left(x + \frac{2}{3} \right)}{\sqrt{2}} \right) + C\end{aligned}$$

Por lo que el resultado final es:

$$\int \frac{5x + 3}{3x^2 + 4x + 2} dx = \ln |3x^2 + 4x + 2| - \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3 \left(x + \frac{2}{3} \right)}{\sqrt{2}} \right) + C$$

Ejercicio

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2}{5x - 4} dx$

b) $\int \frac{3x}{x^2 + 2} dx$

c) $\int \frac{5}{2x - 4} dx$

d) $\int \frac{7x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$

e) $\int \frac{x}{\sqrt{9x^2 - 1}} dx$

f) $\int \frac{5x - 3}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} dx$

g) $\int \frac{e^x - 1}{e^x} dx$

h) $\int \sqrt{4 + x^2} dx$

i) $\int \left(8 - \frac{1}{x} \right) dx$

j) $\int \left(1 - \frac{1}{x} \right)^3 \frac{dx}{x^2}$

k) $\int 2x^2 \sec^2(4 - x^3) dx$

l) $\int \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} dx$

m) $\int (e^x + 1)^2 dx$

n) $\int e^{4x} dx$

o) $\int (1 + x^4)^5 x^3 dx$

p) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 3} dx$

q) $\int e^{\tan 3x} \sec^2 3x dx$

r) $\int \frac{dx}{x + x^{\frac{1}{3}}}$

$$\begin{array}{lll} \text{s)} \int \frac{dx}{2x-1} - \frac{dx}{2x+1} dx & \text{t)} \int (\sin x - \cos x)^2 dx & \text{u)} \int \csc^2 2x dx \\ \text{v)} \int \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right)^2 dx & \text{w)} \int \sin^3 x \cos x dx & \end{array}$$

Para comprobar tus resultados y ver el procesos puedes hacer uso de la página Calculadora de Integrales en la siguiente liga:
<https://www.calculadora-de-integrales.com/>

Solución:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2\ln|5x-4|}{5} + C & \text{b)} \frac{3\ln(x^2+2)}{2} + C & \text{c)} \frac{5\ln|x-2|}{2} + C \\ \text{d)} 7\sqrt{x^2-4} + C & \text{e)} \frac{\sqrt{9x^2-1}}{9} + C & \text{f)} 5\sqrt{x^2-2x+1} + 2\ln|x-1| + C \\ \text{g)} \frac{1}{e^x} + x + C & \text{h)} \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2} + 2 \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{2}\right) + C & \\ \text{h)} 2\ln(|\sqrt{x^2+4} + x|) + x\sqrt{\frac{x^2}{4} + 1} + C & \text{i)} 8x - \ln|x| + C & \\ \text{j)} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}{4} + C & \text{k)} \frac{2 \tan(x^3-4)}{3} + C & \text{l)} \sqrt{x^2+4} + C \\ \text{m)} \frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + x + C & \text{n)} \frac{e^{4x}}{4} + C & \text{o)} \frac{(x^4+1)^6}{24} + C \\ \text{p)} 2\ln \frac{(3e^{-2x}+1)}{3} + x + C & \text{p)} 2\ln \frac{(e^{2x}+3)}{3} - x + C & \end{array}$$



$$q) \frac{e^{\tan(3x)}}{3} + C$$

$$r) \frac{3\ln(x^{\frac{2}{3}}+1)}{2} + C$$

$$r) \frac{3\ln(\sqrt[3]{x^2}+1)}{2} + C$$

$$s) \frac{\ln|2x-1| - \ln|2x+1|}{2} + C$$

$$s) - \frac{\ln|2x+1| - \ln|2x-1|}{2} + C$$

$$t) \cos^2 x + x + C$$

$$u) \frac{-\cot(2x)}{2} + C$$

$$u) -\frac{1}{2\tan(2x)} + C$$

$$v) \sinh(2x) + 2x + C$$

$$v) \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + 2x + C$$

$$w) \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

2.3 Integración por partes

Este método nos permite obtener integrales de funciones que se pueden expresar como un producto de una función por la derivada de otra. A continuación deduciremos la fórmula de integración por partes a partir de la regla para derivar un producto de dos funciones.

Dadas dos funciones u y v , la diferencial de su producto es:

$$d\,uv = u\,dv + v\,du$$

Despejando $u\,dv$, se tiene:

$$u\,dv = d\,uv - v\,du$$

Integrando en ambos lados:

$$\int u\,dv = \int d\,uv - \int v\,du$$

De donde se obtiene:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

que es la fórmula de integración por partes.

En los siguientes ejemplos se indica el procedimiento de la aplicación de la fórmula anterior.



Ejemplo:

Calcular $\int x \cos(x) dx$

Para poder obtener la integral, primero se debe definir cada una de las funciones.

Considerando

$$\begin{aligned} u &= x \\ du &= dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dv &= \cos x \, dx \\ v &= \int \cos x \, dx \\ v &= \sin x \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula: $\int u dv = uv - \int v du$, se tiene:

$$\int x \cos(x) dx = x \sin x - \int \sin(x) dx$$

Como la $\int \sin x \, dx$ es $-\cos x$

Se tiene que $\int x \cos(x) dx = x \sin x - (-\cos x)$

También se pudiera haber considerado en la forma:

$$\begin{aligned} v &= \cos x \\ du &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dv &= x \, dx \\ v &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Pero al definirlo así, se observa que la función por integrar en el lado derecho tiene un mayor grado de dificultad para obtenerse que la original.

$$\int x \cos(x) dx = \frac{x^2}{2} \cos x - \int -\frac{x^2}{2} \sin x \, dx$$

Por lo que para obtenerla se tendría que volver a aplicar el método de integración por partes, lo cual nos indica que se debe analizar para elegir la estrategia adecuada.

Ejercicio

Calcular $\int \arcsen 4x dx$

Ejemplo:

Calcular $\int x e^x dx$

Definiendo:

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = e^x dx$$

$$v = \int e^x dx$$

$$v = e^x$$

Aplicando la fórmula de integración por partes: $\int u dv = uv - \int v du$, se tiene:

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C\end{aligned}$$

En estos ejemplos, una adecuada elección de u y dv nos lleva en un solo paso a obtener la integral indicada, reduciéndola de tal manera que el integrando sea más fácil de manipular.

Existen otras situaciones, como se verá en los siguientes ejemplos, en que, si bien la integral del lado derecho tiene un menor grado de dificultad, no es una integral inmediata, requiere de un nuevo proceso de integración por partes, obteniéndola por cambio de variable, o algún otro procedimiento.



Ejemplo:

Calcular $\int x^3 e^x dx$

Definiendo:

$u = x^3$	$v = e^x$
$du = 3x dx$	$dv = e^x dx$

Considerando la fórmula $\int u dv = uv - \int v du$

Por lo que $\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$

La integral del lado derecho se resuelve por partes (ver el ejemplo anterior), obteniendo:

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3(xe^x - e^x) + C$$

La elección $u = e^x$, $dv = x^3 dx$ nos lleva a una integral con un mayor grado de dificultad.

Ejercicio

Calcular $\int e^x \cos x dx$

Ejemplo:Calcular $\int \operatorname{arc} \cot x \, dx$

$u = \operatorname{arc} \cot x$	$v = x$
$du = \frac{dx}{1+x^2}$	$dv = dx$

$$\int \operatorname{arc} \cot x \, dx = x \operatorname{arccot} x - \int x \frac{dx}{1+x^2}$$

En este caso, la integral del lado derecho se resuelve por un cambio de variable, obteniendo:

$$\int x \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Finalmente, la solución es:

$$\int \operatorname{arc} \cot x \, dx = x \operatorname{arc} \cot x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

EjercicioObtener $\int \operatorname{arc} \sec x \, dx$



Ejemplo:

Calcular $\int \sin^2 x \, dx$

Definiendo:

$u = \sin x$	$v = -\cos x$
$du = \cos x \, dx$	$dv = \sin x \, dx$

Aplicando $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x - \int -\cos^2 x \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

La integral del lado derecho, al parecer tiene el mismo grado de dificultad que la integral original, son muy similares, lo que nos sugiere volver a aplicar el método de integración por partes.

$u = \cos x$	$v = \sin x$
$du = -\sin x \, dx$	$dv = \cos x \, dx$

$$\int \cos^2 x \, dx = -\sin x \cos x - \int -\sin^2 x \, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx$$

Que al sustituirse nos da:

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx$$

Volviendo al mismo lugar, la alternativa es utilizar la identidad: $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$
En la primera integración por partes:

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

Sustituyendo $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx$$

Por lo que se tiene:

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

Otra vez vuelve aparecer la misma integral, pero con signo contrario, lo que nos permite despejarla:

$$\int \sin^2 x \, dx + \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x$$

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x$$

Despejando, podemos concluir que:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + C$$

Ejercicio

Calcular $\int \cos^2 x \, dx$



Ejemplo:

Calcular $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$

$u = e^x$	$v = -\cos x$
$du = e^x dx$	$dv = \operatorname{sen} x \, dx$

Considerando la fórmula: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

Por lo que:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

De nuevo, como en el ejemplo anterior, la integral del lado derecho es similar y del mismo grado de dificultad, por lo que podríamos intentar utilizar de nuevo el método de integración por partes.

$u = e^x$	$v = \operatorname{sen} x$
$du = e^x dx$	$dv = \cos x \, dx$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

Al sustituir obtenemos:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

De donde podemos despejar la integral:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$$

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$$

Por lo que, finalmente se tiene:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} (e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x) + C$$

Ejercicio

Calcular $\int \sec^3 x \, dx$. Se puede separar como $\int \sec x \sec^2 x \, dx$ o aplicar el proceso del ejemplo anterior.

Ejemplo:

Calcular $\int \cot x \cos x \, dx$

$u = \cot x$	$v = \operatorname{sen} x$
$du = -\operatorname{csc}^2 x \, dx$	$dv = \cos x \, dx$

$$\int u dv = uv - \int v du \rightarrow \int \cot x \cos x \, dx = \cot x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x (-\operatorname{csc}^2 x) \, dx$$

$$\int \cot x \cos x \, dx = \cot x \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen} x \operatorname{csc}^2 x \, dx$$

Sustituyendo $\cot x \equiv \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y $\operatorname{csc} x \equiv \frac{1}{\operatorname{sen} x} \rightarrow \operatorname{csc}^2 x \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$, se obtiene:

$$\int \cot x \cos x \, dx = \cos x + \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$$

Volviendo a aplicar la identidad:

$$\int \cot x \cos x \, dx = \cos x + \int \csc x \, dx$$



se integra

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x|$$

$$\int \cot x \cos x \, dx = \cos x + \ln |\csc x - \cot x| + C$$

Ahora se van a abordar algunos ejemplos en los que, debido a las posibilidades, tiene que aplicarse un criterio preciso para decidir sobre la elección de u y dv .

Ejemplo:

Calcular $\int x^3 e^{x^2} \, dx$

En este tipo de funciones a integrar, hay muchas maneras de expresar al integrando como un producto; opciones:

$$1^\circ \quad u = x^3, \quad dv = e^{x^2} \, dx$$

$$2^\circ \quad u = x^2, \quad dv = e^{x^2} x \, dx$$

$$3^\circ \quad u = x, \quad dv = x^2 e^{x^2} x \, dx$$

$$4^\circ \quad u = 1, \quad dv = x^3 e^{x^2} \, dx$$

$$5^\circ \quad u = x^3 e^{x^2}, \quad dv = dx$$

¿Cuál de estas opciones elegir?

Lo primero que se debe hacer es asegurar que la elección dv sea una función fácil de integrar. Si examinamos con detalle las opciones, sólo la opción $u = x^2$, $dv = e^{x^2} x \, dx$ cumple con esto, ya que dv es fácil integrar por un simple cambio de variable:

$$\int x e^{x^2} x \, dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Por lo que la tabla para la integración por partes es:

$u = x^2$	$v = \frac{1}{2} e^{x^2}$
$du = 2x \, dx$	$dv = x e^{x^2} \, dx$

$$\int u dv = uv - \int v du \rightarrow \int x^3 e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} x^2 - \int \frac{1}{2} e^{x^2} 2x \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} x^2 - \int e^{x^2} x \, dx$$

$$\int x^3 e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} x^2 - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Ejercicio

Calcular $\int x^9 \sqrt{6-3x^5} \, dx$. Se puede separar como $\int x^5 \sqrt{6-3x^5} x^4 \, dx$, considerando $u = x^5$ y $dv = \sqrt{6-3x^5} x^4 \, dx$.

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int 5 \cos^2(6x-1) \, dx$

b) $\int x^3 \ln x^2 \, dx$

c) $\int \arctan x \, dx$

d) $\int 5x \operatorname{sen} x \, dx$

e) $\int x \cos 2x \, dx$

f) $\int e^{-2x} \operatorname{sen} x \, dx$

g) $\int x e^{3x} \, dx$

h) $\int x \sqrt{1+x^2} \, dx$



i) $\int 3\cos^2 x \, dx$

j) $\int \sin^2 x \, dx$

k) $\int x \sec^2 3x \, dx$

l) $\int \arccos 2x \, dx$

m) $\int x^2 e^{-3x} \, dx$

n) $\int x^3 \sin x \, dx$

o) $\int x^2 \sqrt{1-x} \, dx$

p) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} \, dx$

q) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} \, dx$

r) $\int (xe^x) \, dx$

Soluciones:

a) $\frac{5(\sin(12x-2)+12x)}{24} + C$

b) $\frac{x^4(8\ln^2(x)-4\ln(x)+1)}{32} + C$

c) $-a \operatorname{arccos}|\cos(x)| + C$

c) $a \operatorname{arccos}|\sec(x)| + C$

d) $5(\sin(x) - x\cos(x)) + C$

e) $\frac{x\cos(x)\sin(x)+\cos^2(x)}{2} + C$

e) $\frac{2x \sin(2x)+\cos(2x)}{4} + C$

f) $\frac{-e^{-2x}(2\sin(x)+\cos(x))}{5} + C$

$$g) \frac{e^3 x^3}{3} + C$$

$$h) \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$h) \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + C$$

$$i) \frac{3(\cos(x)\sin(x)+x)}{2} + C$$

$$i) \frac{3(\operatorname{sen}(2x)+2x)}{4} + C$$

$$j) -\frac{\operatorname{sen}(2x)-2x}{4} + C$$

$$k) \frac{\ln|\cos(3x)|+3x\tan(3x)}{9} + C$$

$$l) x \arccos(2x) - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + C$$

$$m) -\frac{(9x^2+6x+2)e^{-3x}}{27} + C$$

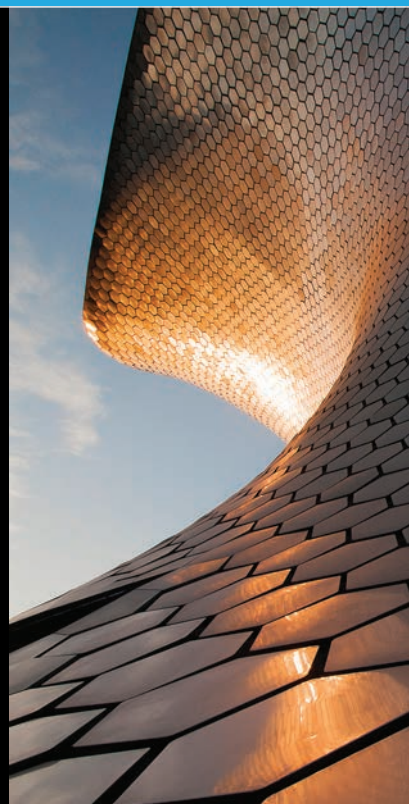
$$n) (3x^2 - 6)\sin(x) + (6x - x^3)\cos(x) + C$$

$$o) -\frac{2(1-x)^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4(1-x)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$p) \frac{e^x}{x+1} + C$$

$$q) \frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{25} - \frac{4(x+1)^{\frac{2}{3}}}{3} + 2\sqrt{x} + 1 + C$$

$$r) (x-1)e^x + C$$



Arriba a la izquierda: <https://graphing-calculator.mx.aptoide.com/>

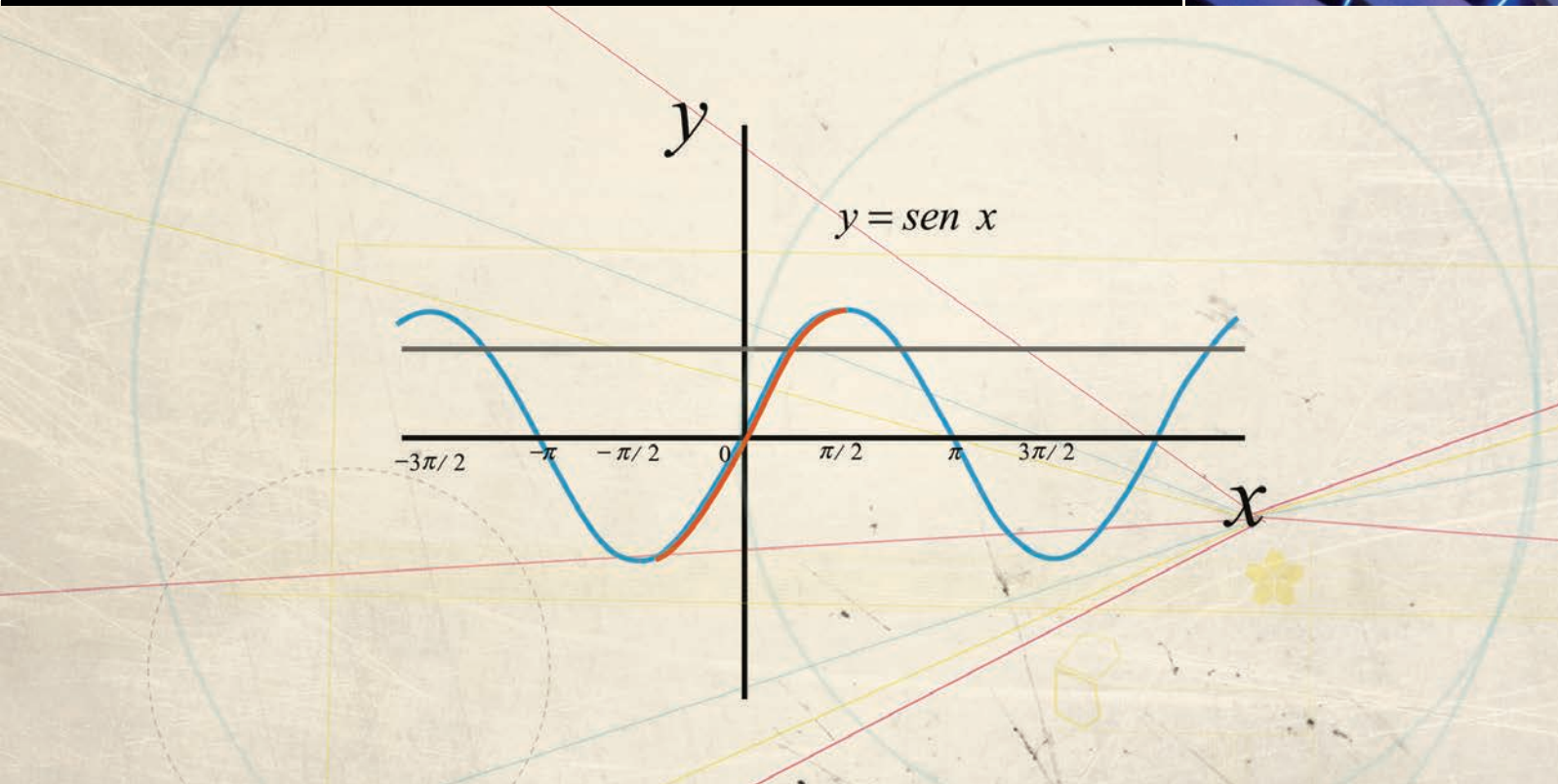
Arriba al centro: <http://themexicantimes.mx/la-arquitectura-organica-del-mexicano-javier-senosiain/>

Arriba a la derecha: <http://2015.concursofotocapital.mx/fotos/3440>

Página derecha: <https://www.pinterest.com.mx/pin/440930619739167295/?lp=true>

Módulo Tres

Métodos de integración por cambio de variable trigonométrica y por fracciones parciales



Propósito

Piensa de manera flexible, analítica y crítica al aplicar los métodos de integración por cambio de variable trigonométrica y por fracciones parciales.



Competencias a desarrollar

Genéricas

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
 - 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
 - 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
 - 8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
 - 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

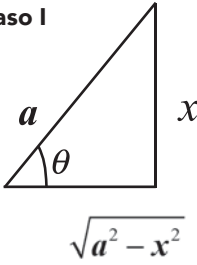
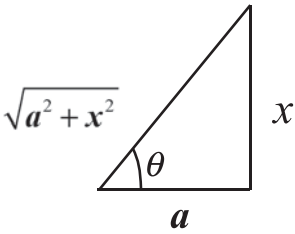
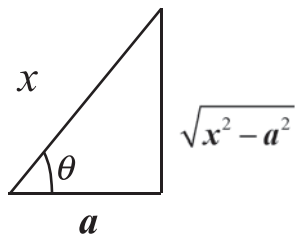
Introducción

En este módulo se abordan los métodos para integrar las funciones donde se presenta un radical, y el radicando es una suma o diferencia de cuadrados, específicamente de la siguiente forma: $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ ó $\sqrt{x^2 - a^2}$; asimismo se presentan cuatro métodos de integración para las funciones racionales de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

3.1 Integración por sustitución trigonométrica

En las integrales donde se presentan radicales de la forma $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ ó $\sqrt{x^2 - a^2}$ es útil el método de integración por sustitución trigonométrica. En este método se estará usando la siguiente tabla de sustituciones trigonométricas.

Tabla 1. Sustituciones trigonométricas

Expresión con radical	Sustitución	Identidad
Caso I 	$x = a \operatorname{sen} \theta$ Con $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$	$1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta$
Caso II 	$x = a \tan \theta$ Con $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
Caso III 	$x = a \sec \theta$ $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \cup \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

Antes de continuar, hay que aclarar que a partir de la tabla de sustituciones trigonométricas se puede ver que existen restricciones para el ángulo θ , según la sustitución de la que se trate, por ejemplo para la sustitución inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$



el intervalo indicado es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; esto se debe a que es válida siempre y cuando defina una función biunívoca, es decir, que la función sea uno a uno.

Recordemos que una función uno a uno es aquella que cumple

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ siempre que } x_1 \neq x_2$$

Es decir, para cada valor x del dominio, sólo existe un valor para la función $f(x)$. Esto se puede probar fácilmente por medio de la *prueba de la recta horizontal*. La función $y = \text{sen } x$ no es uno a uno, porque si se traza una recta horizontal, ésta corta en más de un punto a la curva (observar figura 1), por lo tanto, la función seno no tiene función inversa para todo su dominio; sin embargo, la función inversa

de la función seno existe sólo si se restringe el dominio a $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, ya que así la función $y = \text{sen } x$ es uno a uno, (observa la figura 2), donde se puede ver que si traza una recta horizontal, ésta corta en un solo punto a la curva. Por lo anterior, en la tabla de sustituciones trigonométricas se restringen los dominios de las funciones propuestas como cambio.

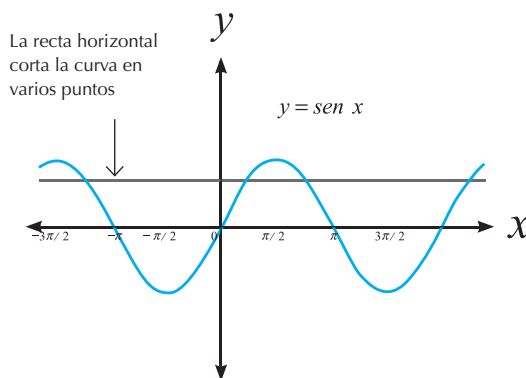


Figura 1

Función $y = \text{sen } x$.

Fuente: adaptado de Stewart (2012).

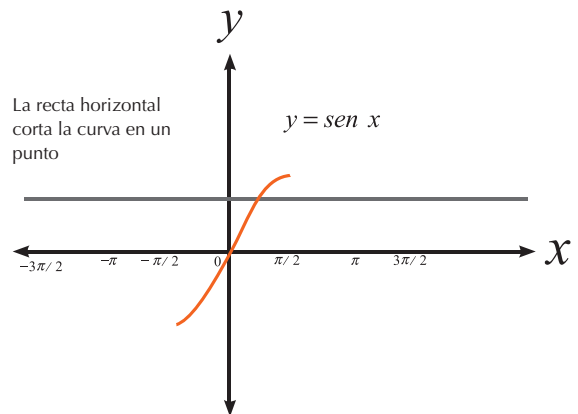


Figura 2

Función $y = \text{sen } x$, con dominio restringido a $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Fuente: adaptado de Stewart (2012).

A partir de la tabla de sustituciones trigonométricas se puede observar que, si se presenta una integral de forma $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, se puede proponer una sustitución inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$ para el integrando:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{a^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a |\cos \theta|$$

Considerando que $dx = a \cos \theta d\theta$, se puede escribir la integral como:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2 \theta d\theta$$

Que se puede integrar con menor dificultad. Más adelante se explicará el proceso de integración.

El objetivo en este apartado del módulo es que, por medio de una sustitución trigonométrica, se supriman los radicales del integrando y con este fin utilizaremos las identidades trigonométricas que ya conocemos.

Tabla 2. Identidades trigonométricas

Fórmula	Los dos despejes respectivos
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \equiv 1$	$\operatorname{sen}^2 x \equiv 1 - \cos^2 x$
	$\cos^2 x \equiv 1 - \operatorname{sen}^2 x$
$\tan^2 x + 1 \equiv \sec^2 x$	$1 \equiv \sec^2 x - \tan^2 x$
	$\tan^2 x \equiv \sec^2 x - 1$
$\cot^2 x + 1 \equiv \csc^2 x$	$1 \equiv \csc^2 x - \cot^2 x$
	$\cot^2 x \equiv \csc^2 x - 1$



Recuerda, primero debes considerar si una integral puede ser calculable en forma directa o mediante el método de sustitución o por partes. Si no fuera el caso, se debe recurrir a la sustitución trigonométrica y no debes olvidar que nuestro objetivo es eliminar la raíz cuadrada. Por consiguiente, se presentan 3 casos que a continuación se describen.

Caso 1. Integrales que contienen un término de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$

Cuando un integrando contiene un término de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$ para algún $a > 0$, a debe ser mayor que 0 porque representa la hipotenusa del triángulo.

Si $x = a \operatorname{sen} \theta$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, entonces puede eliminarse la raíz cuadrada como se muestra a continuación:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{a^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)}$$

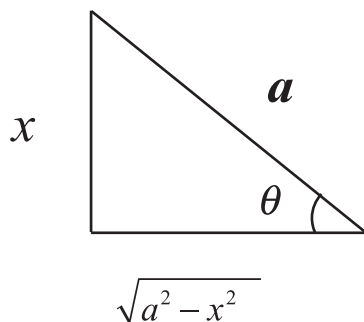
Cabe recordar que $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$; por consiguiente, $1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta$, de forma que:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \cos^2 \theta} = |a \cos \theta|$$

Puesto que para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ tenemos que $\cos \theta \geq 0$, entonces, se puede suprimir el valor absoluto y se escribe:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

El triángulo rectángulo de referencia mostrado a continuación permite determinar las expresiones de θ en términos de x .

Figura 4Caso 1: $\sqrt{a^2 - x^2}$ 

Fuente: elaboración propia.

En seguida se presentan algunos ejemplos de este caso para explicarlo mejor.

Calcular $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$.

Sea $x = 3\text{sen}\theta$, en donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Entonces $dx = 3\cos\theta d\theta$ y sustituyendo

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9\text{sen}^2\theta} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\cos\theta$$

(nota que $\cos\theta \geq 0$ porque $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) sustituyendo se tiene,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\text{sen}^2\theta} 3\cos\theta d\theta \\ &= \int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} d\theta = \int \cot^2\theta d\theta \end{aligned}$$

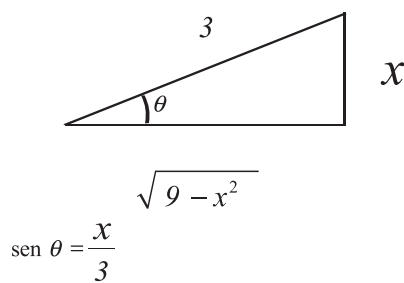


Aplicando la identidad $\csc^2 \theta - 1 = \cot^2 \theta$

$$= \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta$$

$$= -\cot \theta - \theta + C$$

Figura 5



Fuente: elaboración propia.

Como esta es una integral indefinida, debemos regresar a la variable original x . Esto es factible mediante identidades trigonométricas para expresar $\cot \theta$ en términos de $\text{sen } \theta = x/3$ o bien trazando un diagrama en que θ se interpreta como un ángulo de un triángulo rectángulo. Ya que $\text{sen } \theta = x/3$, el cateto opuesto y la hipotenusa tendrán longitudes x y 3 . Con el teorema de Pitágoras, obtenemos la longitud del cateto adyacente: $\sqrt{9 - x^2}$ de modo que podemos leer el valor de $\cot \theta$.

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$

(Aunque $\theta > 0$ en el diagrama, esta expresión de $\cot \theta$ es válida aún cuando $\theta < 0$.)

Dado que $\text{sen } \theta = x/3$, tenemos que $\theta = \text{sen}^{-1}(x/3)$. Sustituyendo en el resultado anterior de la integral, se obtiene

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

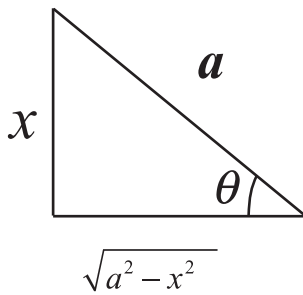
La integral anterior se puede comprobar realizando la derivada de la primitiva obtenida. A continuación se presenta la comprobación

$$-\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \frac{d}{dx} \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{d}{dx} C$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

Se recomienda utilizar el triángulo de apoyo, así como las fórmulas de la tabla de sustitución trigonométrica:

Figura 6



Fuente: elaboración propia.

Fórmulas:

$$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Obteniendo la diferencial

$$dx = a \cos \theta \, d\theta$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

Por sustitución trigonométrica tenemos que:

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a \operatorname{sen} \theta}{a \cos \theta} \cdot a \cos \theta \, d\theta$$

$$\int \frac{a \cos \theta}{a \cos \theta} \cdot a \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \int 1 \cdot a \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

$$\int 1 \cdot a \operatorname{sen} \theta \, d\theta = a \int \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

Con la fórmula de integración $\operatorname{sen} u \, du = -\cos \theta C$, se tiene

$$a \int \operatorname{sen} \theta \, d\theta = -a \cos \theta + C$$

A partir de la figura de apoyo, se puede obtener la razón trigonométrica y realizar la sustitución en el resultado anterior

$$\cos \theta = \frac{CA}{H} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} a \int \operatorname{sen} \theta \, d\theta - a \cos \theta + C &= -a \left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right) + C \\ &= -\frac{a}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + C \end{aligned}$$

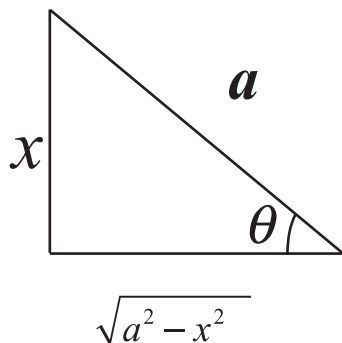
$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$



Ejemplo: calcular $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$

Se recomienda utilizar el triángulo de apoyo, así como las fórmulas de la tabla de sustitución trigonométrica

Figura 7



Fuente: elaboración propia.

Fórmulas:

$$x = a \operatorname{sen} \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Obteniendo la diferencial

$$dx = a \cos \theta \, d\theta$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$$

Por sustitución trigonométrica tenemos:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = \int \frac{a \cos \theta}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \cdot a \cos \theta \, d\theta$$

Simplificando se tiene:

$$\int \frac{a^2 \cos^2 \theta}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta = \int \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta = \int \cot^2 \theta \, d\theta$$

Con la fórmula de integración

$$\int \cot^2 u \, du = -u - \cot u + C$$

$$\int \cot^2 \theta \, d\theta = -\cot \theta - \theta + C$$

Con base en el triángulo se obtiene la razón trigonométrica; se tiene:

$$\cot \theta = \frac{CA}{CO} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$$

Donde:

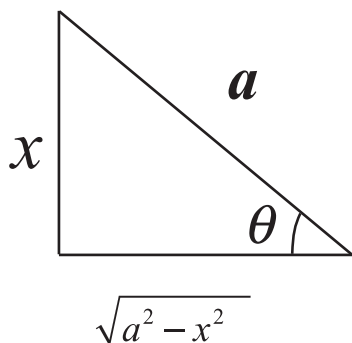
$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\cot \theta - \theta + C$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

Ejemplo: calcular $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$

Se recomienda utilizar el triángulo de apoyo, así como las fórmulas de la tabla de sustitución trigonométrica

Figura 8



Fuente: elaboración propia.

Fórmulas:

$$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Obteniendo la diferencial

$$dx = a \cos \theta \, d\theta$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Por sustitución trigonométrica tenemos:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \int \frac{a \cos \theta}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot a \cos \theta} d\theta$$

$$\int \frac{a \cos \theta}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot a \cos \theta} d\theta$$

$$\int \frac{d\theta}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta = \frac{1}{a^2} \int \csc^2 \theta \, d\theta$$

Con la fórmula de integración

$$\frac{1}{a^2} \int \csc^2 \theta \, d\theta = -\frac{1}{a^2} \cot \theta + C$$

Por tanto, por razón trigonométrica y con base en el triángulo; se tiene:

$$\cot \theta = \frac{CA}{CO} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

Donde:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a^2} \cot \theta + C = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$



Realiza los siguientes ejercicios:

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} =$$



$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}} =$$

Caso 2. Integrales que contienen un término de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$.

Cuando un integrando contiene un término de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$ para algún $a > 0$.

Si $x = a \tan \theta$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, puede eliminarse la raíz cuadrada como se muestra a continuación:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + (a \tan \theta)^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2 (1 + \tan^2 \theta)}$$

Cabe recordar que $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$; por tanto:

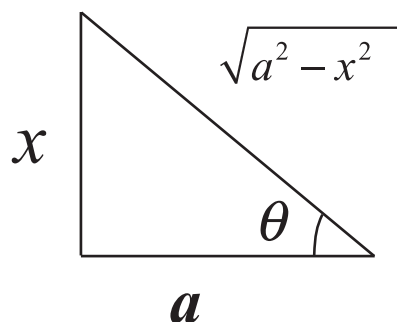
$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = |a \sec \theta|$$

Puesto que para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ tenemos que $\sec \theta \geq 0$, entonces

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$$

El triángulo rectángulo de referencia mostrado a continuación permite determinar las expresiones de θ en términos de x .

Caso 2: $\sqrt{a^2 - x^2}$



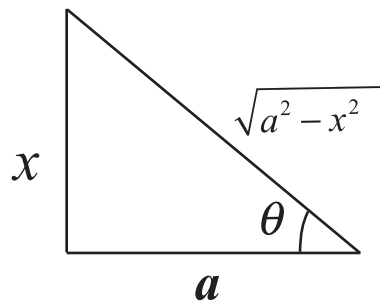
Enseguida presentamos algunos ejemplos de este tipo de sustitución.



Ejemplo: calcular $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

Se recomienda utilizar el triángulo de apoyo, así como las fórmulas de la tabla de sustitución trigonométrica

Figura 9



Fuente: elaboración propia.

Fórmulas:

$$x = a \tan \theta$$

$$\text{donde } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

obteniendo la diferencial

$$dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Por sustitución trigonométrica tenemos que:

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a \tan \theta}{a \sec \theta} \cdot a \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$\int a \tan \theta \cdot \sec \theta \, d\theta$$

Para poder darle solución a esta integral nos apoyamos en la siguiente identidad trigonométrica

$\sec \theta = 1 + \tan \theta$, se tiene:

$$a \int \tan \theta \cdot (1 + \tan \theta) \, d\theta$$

$$a \int (\tan \theta + \tan^2 \theta) \, d\theta = a \int \tan \theta \, d\theta + a \int \tan^2 \theta \, d\theta$$

Aplicando las fórmulas de integración

$$\int \tan^2 \theta \, d\theta = \tan \theta - \theta + C$$

$$\int \tan \theta \, d\theta = \ln |\sec \theta| + C$$

$$a \int \tan \theta \, d\theta + a \int \tan^2 \theta \, d\theta = a (\ln |\sec \theta| + \tan \theta - \theta) + C$$

La integral debe quedar en función de x primitiva, por ello se obtiene la razón trigonométrica $\sec \theta$ y $\tan \theta$ a partir del triángulo

$$\sec \theta = \frac{H}{CA} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

$$\tan \theta = \frac{x}{a}$$

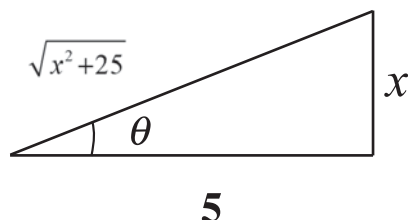
Sustituyendo, se obtiene:

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = a \left(\ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right| + \frac{x}{a} - \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \right) + C$$

Ejemplo: calcular $\int x\sqrt{25+x^2} dx$

Se recomienda utilizar el triángulo de apoyo, así como las fórmulas de la tabla de sustitución trigonométrica

Figura 10



Fuente: elaboración propia.

Fórmulas:

$$x = 5 \tan \theta$$

$$\text{donde } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

obteniendo la diferencial

$$dx = 5 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = 5 \sec \theta$$

$$\int x\sqrt{25+x^2} dx$$

Por sustitución trigonométrica tenemos que:

$$\int x\sqrt{25+x^2} dx = \int 5 \tan \theta \cdot 5 \sec \theta \sec^2 \theta d\theta$$

Realizando un proceso matemático y simplificando, se tiene:

$$\int x\sqrt{25+x^2} dx = 125 \int \tan \theta \cdot \sec^3 \theta d\theta$$

Integrando por sustitución:

$$u = \sec \theta$$

$$du = \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$125 \int \tan \theta \cdot \sec^3 \theta d\theta = 125 \int \sec^2 \theta \sec \theta \tan \theta d\theta$$

Sustituyendo se tiene:

$$= 125 \int u^2 du = 125 \frac{u^3}{3} + c = 125 \frac{(\sec \theta)^3}{3} + C$$

Obteniendo la razón secante con base en el triángulo, se tiene:

$$\sec \theta = \frac{H}{CA} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{a}$$

Donde:

$$\int x\sqrt{25+x^2} dx = 125 \frac{\left(\sqrt{25+x^2}\right)^3}{3a} + C$$



Ejercicios

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^4}} =$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2 - 64)^{3/2}} dx =$$



$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{9+x^2}\right)^4} =$$

Caso 3. Integrales que contienen un término de la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$

Cuando un integrando contiene un término de la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$ para algún $a > 0$.

Si $x = a \sec \theta$, donde $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \cup \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$, puede eliminarse la raíz cuadrada como se muestra a continuación:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(a \sec \theta)^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)}$$

Cabe recordar que $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$, por lo tanto:

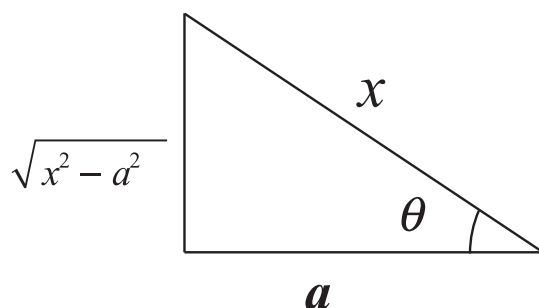
$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = |a \tan \theta|$$

Puesto que para $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \cup \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$, tenemos que $\tan \theta \geq 0$; entonces

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$$

El triángulo rectángulo de referencia mostrado a continuación permite determinar las expresiones de θ en términos de x .

Caso 3: $\sqrt{x^2 - a^2}$



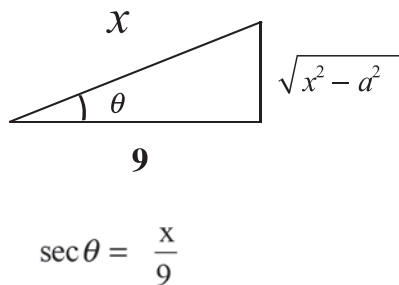
Enseguida te presentamos algunos ejemplos de este tipo de sustitución.



Ejemplo: calcula $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 81}} dx$

Se recomienda utilizar el triángulo de apoyo, así como las fórmulas de la tabla de sustitución trigonométrica.

Figura 11



Fuente: elaboración propia.

Fórmulas:

$$x = 9 \sec \theta$$

donde

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \cup \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$$

obteniendo la diferencial

$$dx = 9 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 81} = 9 \tan \theta$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 81}} dx$$

Por sustitución trigonométrica tenemos que:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 81}} dx = \int \frac{9 \sec \theta}{9 \tan \theta} 9 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

Realizando el proceso matemático de simplificación se tiene:

$$9 \int \frac{\sec^2 \theta}{1} d\theta$$

Donde, por fórmula de integración, se tiene:

$$\int \sec^2 \theta d\theta = \tan \theta + C$$

$$9 \int \sec^2 \theta d\theta = 9 \tan \theta + C$$

Por tanto, por razón trigonométrica y con base en el triángulo, se tiene:

$$\tan \theta = \frac{CO}{CA} = \frac{\sqrt{x^2 - 81}}{9}$$

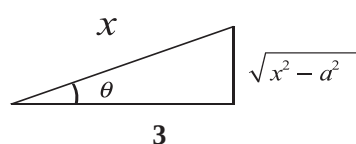
Donde:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 81}} dx = \sqrt{x^2 - 81} + C$$

Ejemplo: calcula $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$

Se recomienda utilizar el triángulo de apoyo, así como las fórmulas de la tabla de sustitución trigonométrica.

Figura 12



$$\sec \theta = \frac{x}{3}$$

Fórmulas:

$$x = 3 \sec \theta$$

donde

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \cup \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$$

diferenciando

$$dx = 3 \sec \theta \tan \theta \, d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 9} = 3 \tan \theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$$

Por sustitución trigonométrica tenemos que:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} = \int \frac{3 \sec \theta \tan \theta}{(3 \sec \theta)^2 3 \tan \theta} d\theta$$

Realizando un proceso matemático y simplificando se tiene:

$$\frac{1}{9} \int \frac{d\theta}{\sec \theta} = \frac{1}{9} \int \cos \theta \, d\theta$$

Donde, por fórmula de integración, se tiene:

$$\frac{1}{9} \sin \theta + C$$

Por tanto, por razón trigonométrica y con base en el triángulo, se tiene:

$$\sin \theta = \frac{CO}{H} = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}$$

Donde:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{9x} \sqrt{x^2 - 9} + C$$



Ejercicios

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$$

Ejercicios adicionales

1.
$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 100)^{3/2}} dx$$

2.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^4}}$$

3.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$$

4.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

5.
$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}$$

6.
$$\int x^3 \sqrt{a^3 x^2 - b^2} dx$$

7.
$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx$$

8.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}} dx$$

9.
$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}} dx$$

10.
$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$$



Solución:

$$1. = \ln \left| \sqrt{100 + x^2} + x \right| - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 100}} + C$$

$$2. = \frac{1}{128} \arctan \frac{x}{4} + \frac{x}{32(16 + x^2)} + C$$

$$3. = \ln \left| \sqrt{x^2 - 4x + 13} + (x - 2) \right| + C$$

$$4. = \ln \left| \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} - \frac{1}{x} \right| + C$$

$$5. = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{9x} - \left(\frac{\sqrt{x^2 + 3}}{3x} \right)^3 + C$$

$$6. = \frac{(a^2 x^2 + b^2)^{5/2}}{5a^4} - \frac{(a^2 x^2 + b^2)^{3/2} b^2}{3a^4} + C$$

$$7. = a \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{x} \right| + \sqrt{x^2 + a^2} + C$$

$$8. = \frac{3}{2} \arcsen(x - 1) - \frac{1}{2} (x - 1) \sqrt{2x - x^2} - 2 \sqrt{2x - x^2} + C$$

$$9. = \frac{4x - 2}{\sqrt[4]{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}} + C$$

$$10. = \frac{2x - 4}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} + C$$

3.2 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

En este apartado se presentan métodos para integrar una función racional, a partir de expresarla como una fracción simple. Para estudiar el método de integración de funciones racionales es necesario contar con algunos conocimientos previos como: el procedimiento de la división larga, descomponer las funciones racionales en fracciones simples y obtener el mínimo común múltiplo de polinomios.

Recordemos que una **función polinomial** es aquella con la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

donde n pertenece a los números enteros positivos (es decir, no tiene exponentes negativos) y $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ son los coeficientes de la polinomial.

Una **fracción algebraica simple** es aquella en la que el numerador y denominador son expresiones racionales enteras (Lehmann, 2013: 45), por ejemplo:

$$\frac{3}{x-1}, \quad \frac{6x-2}{x^2+x-1} \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{2x-7}$$

Considerando lo anterior, la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$, en la que $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomiales, se conoce como **fracción simple propia** si el grado del polinomio $P(x)$

es menor que el grado de $Q(x)$. De tal forma que, la función racional propia

$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede expresar $H(x)$ como una suma de fracciones simples

denominadas **fracciones parciales**. Por ejemplo, si $H(x) = \frac{3x-7}{x^2-3x+2}$, se puede

expresar como la suma de dos fracciones parciales, es decir:

$$\frac{4x-7}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

Fracciones parciales



A partir de lo anterior, se puede escribir la función como $H(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.

Se llama **fracción simple impropia** a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si el grado del numerador $P(x)$ es mayor que el grado del denominador $Q(x)$; por ejemplo, la función $H(x) = \frac{x^2-7}{x+2}$ es impropia. Cuando se presenta este caso, es posible dividir $P(x)$ entre $Q(x)$ por división larga hasta que el grado del numerador $P(x)$ sea menor que el grado del denominador $Q(x)$, y se obtenga el cociente $C(x)$ y el residuo (resto), de tal forma que una función racional impropia $H(x)$ se puede expresar como:

$$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad (1)$$

donde $C(x)$ y $R(x)$ son polinomios también.

Consideremos una fracción impropia $M(x) = \frac{x^2-7}{x+2}$, se obtiene el cociente y el resto por medio de la división larga:

$$\frac{x^2-7}{x+2} = x-2 + \frac{-3}{x+2}$$

A partir del resultado anterior $M(x)$ se puede escribir como:

$$M(x) = \underbrace{x-2}_{\text{Cociente}} + \underbrace{\frac{-3}{x+2}}_{\text{El residuo es una fracción propia}}$$

Los conceptos y procedimientos anteriores son útiles para realizar la integral de una función racional impropia. Lo primero es realizar la división y obtener un

polinomio de la forma $H(x) = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$. El siguiente paso es factorizar (sólo

si es posible) el denominador $Q(x)$; generalmente se factoriza como producto de factores lineales de la forma $ax + b$ y factores cuadráticos irreducibles de la

forma $ax^2 + bx + c$. Después se expresa $\frac{R(x)}{Q(x)}$ como una suma de fracciones parciales de la forma

$$\frac{A}{(ax+b)^m} \quad \text{o bien como} \quad \frac{Ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Un ejemplo del procedimiento antes descrito se presenta a continuación:

$$\text{Calcular } \int W(x) dx, \text{ si } W(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 6x + 1}{x^2 + 5x + 6}$$

En este caso se trata de una fracción impropia; por tanto, primero se realiza la división y se obtiene

$$W(x) = x + \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$$

Después se factoriza el denominador de la fracción como

$$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$$

A partir de lo anterior, la integral se puede escribir como:

$$\int \left(x + \frac{1}{(x+3)(x+2)} \right) dx = \int x dx + \int \left(\frac{1}{(x+3)(x+2)} \right) dx$$

El siguiente paso será obtener las fracciones parciales para el integrando de

$$\int \left(\frac{1}{(x+3)(x+2)} \right) dx$$

y así poder concluir el proceso de integración. Más adelante se mostrará cómo obtener las fracciones y la integral.



Para obtener las fracciones parciales de una fracción simple, en muchos casos es necesario obtener el múltiplo común a varios polinomios. Un polinomio que puede dividir a uno o más polinomios de manera exacta se conoce como múltiplo de esos polinomios. Por ejemplo, para obtener un múltiplo común para las expresiones $x^2 + 5x + 6$, $x^2 + x - 6$ y $x^2 - 4x - 21$, lo que se puede hacer es factorizar cada una de ellas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 5x + 6 = & (x+2)(x+3) \\ x^2 + x - 6 = & (x-2)(x+3) \\ x^2 - 4x - 21 = & (x-7)(x+3) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \quad \text{Factor común}$$

Como se puede observar, el factor $(x+3)$ es común a los tres polinomios y divide de manera exacta a cada expresión; por lo tanto, se le denomina común múltiplo. Dos o más polinomios pueden tener más de un múltiplo común, pero al múltiplo común que sea de menor grado, se le llama **mínimo común múltiplo** de dichos polinomios y se puede abreviar como mcm.

Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones

$\frac{1}{x+4}$, $\frac{1}{x-2}$ y $\frac{1}{(x-2)^2}$ es $(x+4)(x-2)^2$, porque esa expresión se puede dividir de manera exacta por cada uno de los denominadores. Hay que aclarar que existen otros múltiplos comunes a los denominadores, pero el anterior es el mínimo.

A continuación, se explican los cuatro casos posibles de fracciones parciales.

3.2.1 Factores lineales distintos

Caso I. El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos

Si el denominador $Q(x)$ de la fracción $\frac{R(x)}{Q(x)}$, se puede factorizar como el producto de factores lineales no repetidos (y no múltiplos) de la forma

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) + \dots + (a_kx + b_k)$$

Existe un teorema de fracciones parciales que establece que para cualquier fracción propia reducida a su mínima expresión, para cada factor lineal $(ax + b)$ que aparezca una sola vez como factor del denominador, corresponde a una fracción parcial de la forma $\frac{A}{ax+b}$, donde $A \neq 0$ y es una constante (Lehmann 2013: 278).

A partir del teorema anterior y de acuerdo con Stewart (2012: 486), se tiene que

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx+b_k} \quad (2)$$

Si se facilita esto, las constantes $A_1, A_2, \dots, A_k$ pueden ser sustituidas por A, B, C , entre otras.

En seguida se presentan algunos ejemplos donde se muestra cómo determinar las constantes para este primer caso.

Ejemplo: calcular $\int \frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} dx$

Existen dos métodos para determinar las constantes de la ecuación (2).

Método 1

Al observar el integrando, se determina que se trata de una fracción propia, ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador; por tanto, no es necesario dividir, así que se factoriza el denominador

$$x^3 - x^2 - 12x = x(x^2 - x - 12)$$

$$x^3 - x^2 - 12x = x(x-4)(x+3)$$

Como el denominador tiene tres factores lineales diferentes, el integrando se puede escribir de la forma de la ecuación (2)

$$\frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+3}$$

Para determinar los valores de las constantes A, B y C , necesitamos tres ecuaciones independientes que las relacionen; por ello multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador



$$x(x-4)(x+3)$$

$$\left(\frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} \right) x(x-4)(x+3) = \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+3} \right) x(x-4)(x+3)$$

Simplificando se obtiene

$$4x^2 + 11x - 24 = \left(\frac{A x (x-4)(x+3)}{x} + \frac{B x (x-4)(x+3)}{x-4} + \frac{C x (x-4)(x+3)}{x+3} \right)$$

$$4x^2 + 11x - 24 = A(x-4)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-4)$$

Se desarrolla el lado derecho de la ecuación anterior y se escribe como el polinomio de x

$$4x^2 + 11x - 24 = (A + B + C)x^2 + (-A + 3B - 4C)x - 12A$$

La ecuación anterior es una identidad donde los coeficientes de las potencias correspondientes de x deben ser iguales; se procede a igualar los coeficientes obteniendo un sistema de ecuaciones

$$4 = A + B + C$$

$$11 = -A + 3B - 4C$$

$$-24 = -12A$$

Se realiza la solución de este sistema obteniendo $A = 2$, $B = 3$ y $C = -1$ con estos valores se puede escribir la integral con fracciones parciales

$$\int \frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-4} + \frac{-1}{x+3} \right) dx$$

y se procede a integrar el lado derecho

$$\int \frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{3}{x-4} dx + \int \frac{-1}{x+3} dx$$

La solución de la integral es

$$\int \frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} dx = 2\ln|x| + 3\ln|x-4| - \ln|x+3| + C$$

Método 2

Se mostrará un método alternativo para encontrar las constantes del ejemplo anterior. Primero se factoriza el denominador tal como en el método 1 y se proponen las fracciones parciales para el integrando de la siguiente forma

$$\frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+3}$$

Para este método, la ecuación anterior es válida para todos los valores de x , excepto tal vez para $x = 0$, $x = 4$, y $x = -3$ que son los valores donde los denominadores de las fracciones parciales se anulan. Hay que tener en cuenta que como son tres constantes se requiere 3 valores para equis.

Continuando con los mismos pasos que en el método 1 se obtiene la identidad.

$$4x^2 + 11x - 24 = A(x-4)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-4)$$

Existe un corolario que indica que la identidad anterior es válida para todos los valores de x incluyendo 0, 4 y -3, así que en la identidad anterior sí se pueden emplear los valores excluidos anteriormente, pues ya no existe la división entre cero como en el caso de la ecuación

$$\frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+3}, \text{ (Lehmann, 2013).}$$

Para determinar las constantes, sustituimos en la identidad los valores de $x = 0$, $x = 4$, y $x = -3$, que fueron excluidos, pues con cada una de estas sustituciones eliminamos todas las constantes con excepción de una.

Otra forma de encontrar los valores de las constantes, de acuerdo con Lehmann (2013), es usar valores sencillos para x , por ejemplo $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$, $x = 3$, $x = -3$, entre otros, ya que, al sustituirlos en la identidad $4x^2 + 11x - 24 = A(x-4)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-4)$, se obtiene un sistema de ecuaciones que permiten obtener los valores buscados.



En seguida se muestran las sustituciones:

Para $x = 0$;

$$4(0)^2 + 11(0) - 24 = A(0-4)(0+3) + B(0)(0+3) + C(0)(0-4)$$

$$-24 = -12A \Rightarrow A = 2$$

Para $x = 4$;

$$4(4)^2 + 11(4) - 24 = A(4-4)(4+3) + B(4)(4+3) + C(4)(4-4)$$

$$84 = 28B \Rightarrow B = 3$$

Para $x = -3$;

$$4(-3)^2 + 11(-3) - 24 = A(-3-4)(-3+3) + B(-3)(-3+3) + C(-3)(-3-4)$$

$$-21 = 21C \Rightarrow C = -1$$

Con las constantes $A = 2$, $B = 3$ y $C = -1$ se completan las fracciones parciales

$$\frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-4} + \frac{-1}{x+3}$$

Sustituyendo en el integrando de la misma manera que en el primer método, se simplifica el cálculo de la integral

$$\int \frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-4} + \frac{-1}{x+3} \right) dx$$

Se procede a integrar el lado derecho

$$\int \frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{3}{x-4} dx + \int \frac{-1}{x+3} dx$$

El resultado es

$$\int \frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x} dx = 2\ln|x| + 3\ln|x-4| - \ln|x+3| + C$$

Se recomienda comprobar el resultado de las integrales derivando y realizando las operaciones para obtener el integrando. Como ejemplo, para el resultado anterior, se procede a comprobar derivando

$$\frac{d}{dx}(2\ln|x| + 3\ln|x-4| - \ln|x+3| + C) = 2\frac{1}{x} + 3\frac{\frac{d}{dx}(x-4)}{x-4} - \frac{\frac{d}{dx}(x+3)}{x+3} + 0$$

$$\frac{d}{dx}(2\ln|x| + 3\ln|x-4| - \ln|x+3| + C) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x+3}$$

Se realizan las operaciones de fracciones y se obtiene el integrando

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x+3} = \frac{4x^2 + 11x - 24}{x^3 - x^2 - 12x}$$

Con lo cual se comprueba que la integral es correcta.

Ejemplo: calcular $\int \frac{2x^3 - 10x^2 + 13x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$

Método 1

En este caso se trata de una fracción impropia, ya que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador; por tanto, es necesario dividir hasta que el grado del numerador sea menor

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^2 - 5x + 6 \overline{) 2x^3 - 10x^2 + 13x + 1} \\ \underline{-2x^3 + 10x^2 - 12x} \\ x + 1 \end{array}$$

El integrando se puede escribir como

$$\frac{2x^3 - 10x^2 + 13x + 1}{x^2 - 5x + 6} = 2x + \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$



Y la integral se escribe como

$$\int \frac{2x^3 - 10x^2 + 13x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int 2x dx + \int \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

La primera integral del lado derecho se puede integrar directamente y, para la segunda, se factoriza el denominador $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$ y se proponen las fracciones parciales para la fracción

$$\frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

Para determinar los valores de las constantes A y B se requiere relacionarlas con dos ecuaciones independientes; multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador $(x-3)(x-2)$ para obtener

$$\left(\frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} \right) (x-3)(x-2) = \left(\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \right) (x-3)(x-2).$$

Simplificando

$$x+1 = \left(\frac{A(x-3)(x-2)}{x-3} + \frac{B(x-3)(x-2)}{x-2} \right)$$

Se obtiene

$$x+1 = A(x-2) + B(x-3)$$

al desarrollar el lado derecho de la ecuación anterior y escribirlo como polinomio de x

$$x+1 = (A+B)x - 2A - 3B$$

A partir de la ecuación anterior se igualan coeficientes y se obtiene un sistema de ecuaciones

$$1 = A + B$$

$$1 = -2A - 3B$$

Se realiza la solución de este sistema y se obtiene $A = 4$, y $B = -3$, así que la integral se puede escribir con fracciones parciales

$$\int \frac{2x^3 - 10x^2 + 13x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int 2x dx + \int \left(\frac{4}{x-3} + \frac{-3}{x-2} \right) dx$$

y se procede a integrar el lado derecho

$$\int \frac{2x^3 - 10x^2 + 13x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int 2x dx + \int \frac{4}{x-3} dx + \int \frac{-3}{x-2} dx$$

El resultado es

$$\int \frac{2x^3 - 10x^2 + 13x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = x^2 + 4\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C$$

Método 2

Las mismas fracciones se pueden obtener por el método alternativo. Proponiendo las fracciones parciales de la misma forma, se obtiene la ecuación

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

La ecuación anterior es válida para todos los valores de x , excepto tal vez para $x = 3$ y $x = 2$ que son los valores donde los denominadores de las fracciones parciales se anulan.

Continuando con los mismos pasos que en el método anterior, se obtiene la identidad $x+1 = A(x-2) + B(x-3)$ y en ella se sustituyen los valores.

Para determinar las constantes sustituimos los valores de $x = 3$ y $x = 2$

$$\text{Para } x = 3; \quad 3+1 = A(3-2) + B(3-3)$$

$$A = 4$$



$$\begin{aligned}\text{Para } x = 2; \quad 2 + 1 &= A(2 - 2) + B(2 - 3) \\ B &= -3\end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, las fracciones parciales son

$$\frac{4}{x-3} + \frac{-3}{x-2}$$

Con las fracciones anteriores se puede obtener la misma integral y la misma solución que en el método 1.

Ejemplo: calcular $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 5x + 1}{x^2 - 6x + 5} dx$

Método 1

En este caso se trata de una fracción impropia, ya que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador; por lo tanto, es necesario dividir hasta que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x + 1}{x^2 - 6x + 5} = x + \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$$

Con el resultado anterior se puede escribir la integral como

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 5x + 1}{x^2 - 6x + 5} dx = \int x dx + \int \frac{1}{x^2 - 6x + 5} dx$$

Se factoriza el denominador $x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$ y se proponen las fracciones parciales

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 5} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1}$$

Para determinar los valores de las constantes A y B se requieren dos ecuaciones independientes; multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador $(x - 5)(x - 1)$

$$\left(\frac{1}{x^2-6x+5}\right)(x-5)(x-1) = \left(\frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1}\right)(x-5)(x-1)$$

Simplificando se obtiene

$$1 = \left(\frac{A(x-5)(x-1)}{x-5} + \frac{B(x-5)(x-1)}{x-1}\right)$$

$$1 = A(x-1) + B(x-5)$$

al desarrollar el lado derecho de la ecuación anterior y escribirlo como polinomio de x

$$1 = (A+B)x - A - 5B$$

Igualando coeficientes, se obtiene un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{r} 0 = A + B \\ 1 = -A - 5B \\ \hline \end{array}$$

Solucionando el sistema, se obtiene $A = \frac{1}{4}$ y $B = \frac{-1}{4}$, así que la integral se puede escribir como

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 5x + 1}{x^2 - 6x + 5} dx = \int x dx + \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-5} + \frac{\frac{-1}{4}}{x-1} \right) dx$$

Y se procede a integrar el lado derecho

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 5x + 1}{x^2 - 6x + 5} dx = \int x dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x-5} dx + \int \frac{\frac{-1}{4}}{x-1} dx$$

Solución:

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 5x + 1}{x^2 - 6x + 5} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \ln|x-5| - \frac{1}{4} \ln|x-1| + C$$



Método 2

En seguida se muestra la forma de obtener las mismas fracciones parciales por el método alternativo. Se realiza la división larga y se proponen las fracciones parciales de la misma manera $\frac{1}{x^2 - 6x + 5} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1}$ y después

se multiplica por el mínimo común denominador y se obtiene la identidad

$$1 = A(x - 1) + B(x - 5)$$

Para determinar las constantes A y B sustituimos dos valores sencillos para x , por ejemplo $x = -1$, y $x = 3$, aunque en este caso es conveniente elegir los valores $x = 1$ y $x = 5$, ya que simplifica los cálculos de la siguiente forma:

$$\text{Para } x = 1; \quad 1 = A(1 - 1) + B(1 - 5)$$

$$1 = -4B \Rightarrow B = \frac{-1}{4}$$

$$\text{Para } x = 5; \quad 1 = A(5 - 1) + B(5 - 5)$$

$$A = \frac{1}{4}$$

Con el valor de las constantes, las fracciones parciales se escriben como

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 5} = \frac{\frac{1}{4}}{x - 5} + \frac{\frac{-1}{4}}{x - 1}$$

Con las fracciones anteriores se puede obtener la misma integral y solución que en el método 1.

Ejercicio

Resolver el siguiente ejercicio. Se recomienda derivar para comprobar el resultado.

$$\int \frac{1}{x^2 - 9} dx =$$



3.2.2 Factores lineales repetidos

Caso II. El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

Si en una función racional $\frac{R(x)}{Q(x)}$, en la que denominador $Q(x)$ se puede factorizar y uno de los factores es lineal $(a_1x + b_1)$ y, se repite m veces, es decir $(a_1x + b_1)^m$; entonces la ecuación (2) se puede escribir como

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_1}{(a_1x + b_1)^2} + \dots + \frac{A_m}{(a_1x + b_1)^m} \quad (3)$$

Si se facilita, las constantes $A_1, A_2, \dots, A_m$ pueden ser sustituidas por A, B, C , entre otras.

Por ejemplo, se puede escribir para la fracción

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{x^2(x-3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2} + \frac{E}{(x-3)^3}$$

Factores lineales repetidos

También puede presentarse una fracción como

$$\frac{-1}{(x-6)(x-1)^2} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Factores lineales repetidos

En seguida se presentan algunos ejemplos para explicar con más detalle este segundo caso.

Ejemplo: calcular $\int \frac{x^2+5}{x^3-8x^2+16x} dx$

Al igual que en el caso anterior existen dos métodos para determinar las constantes de la ecuación (3).

Método 1

En este caso se trata de una fracción propia, ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador; por tanto, no es necesario dividir, así que directamente se factoriza el denominador

$$x^3 - 8x^2 + 16x = x(x^2 - 8x + 16)$$

$$x^3 - 8x^2 + 16x = x(x-4)(x-4)$$

El denominador tiene tres factores lineales y dos de ellos se repiten; por lo tanto el integrando se puede escribir como la forma de la ecuación (2) y (3), donde una de las fracciones corresponde al caso uno y las otras dos al segundo caso

$$\frac{x^2+5}{x^3-8x^2+16x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

Para determinar los valores de las constantes A , B y C , necesitamos tres ecuaciones independientes que las relacionen; multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador $x(x-4)^2$

$$\left(\frac{x^2+5}{x^3-8x^2+16x} \right) x(x-4)^2 = \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2} \right) x(x-4)^2$$

Simplificando se obtiene

$$x^2+5 = \left(\frac{A x (x-4)^2}{x} + \frac{B x (x-4)^2}{x-4} + \frac{C x (x-4)^2}{(x-4)^2} \right)$$

$$x^2+5 = A(x-4)^2 + Bx(x-4) + Cx$$



Al desarrollar el lado derecho de la ecuación anterior y escribirlo como polinomio de x

$$x^2 + 0x + 5 = (A + B)x^2 + (-8A - 4B + C)x + 16A$$

A partir de la identidad anterior se plantea un sistema de ecuaciones

$$1 = A + B$$

$$0 = -8A - 4B + C$$

$$5 = 16A$$

La solución de este sistema proporciona los valores $A = \frac{5}{16}$, $B = \frac{11}{16}$ y $C = \frac{21}{4}$; con ellos la integral se puede escribir como

$$\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - 8x^2 + 16x} dx = \int \left(\frac{\frac{5}{16}}{x} + \frac{\frac{11}{16}}{x-4} + \frac{\frac{21}{4}}{(x-4)^2} \right) dx$$

Integrando el lado derecho

$$\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - 8x^2 + 16x} dx = \int \frac{\frac{5}{16}}{x} dx + \int \frac{\frac{11}{16}}{x-4} dx + \int \frac{\frac{21}{4}}{(x-4)^2} dx$$

se obtiene

$$\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - 8x^2 + 16x} dx = \frac{5}{16} \ln|x| + \frac{11}{16} \ln|x-4| + \frac{-21}{4(x-4)} + C$$

Método 2

Al igual que en los casos anteriores, se puede emplear el método alternativo para encontrar las constantes de la ecuación

$$\frac{x^2+5}{x^3-8x^2+16x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}.$$

En esta ocasión, debido al factor lineal repetido, no es posible obtener inmediatamente las constantes A , B y C . Primero se sustituyen dos valores sencillos $x=0$ y $x=4$, que son los valores donde los denominadores de las fracciones parciales se anulan.

Continuando con los mismos pasos que en el método 1 se obtiene la identidad

$$x^2+5 = A(x-4)^2 + Bx(x-4) + Cx$$

Para determinar las constantes, sustituimos los valores de $x=0$ y $x=4$ en la identidad anterior

$$\text{Para } x=0; \quad (0)^2+5 = A(0-4)^2 + B(0)(0-4) + C(0)$$

$$5 = 16A \Rightarrow A = \frac{5}{16}$$

$$\text{Para } x=4; \quad (4)^2+5 = A(4-4)^2 + B(4)(4-4) + C(4)$$

$$21 = 4C \Rightarrow C = \frac{21}{4}$$

Se observa que no existe un valor x que pueda sustituirse y que elimine simultáneamente a A y C , y obtener a B . Lo que se hace en este caso es usar los valores ya obtenidos de A y C , y algún valor sencillo de x como $x=1$, y con ello se obtiene el valor de B .

$$\text{Para } A = \frac{5}{16}, C = \frac{21}{4} \text{ y } x=0; \quad (1)^2+5 = \frac{5}{16}(1-4)^2 + B(1)(1-4) + \frac{21}{4}(1)$$

$$6 = \frac{45}{16} - 3B + \frac{21}{4} \Rightarrow B = \frac{11}{16}$$



Ya con los valores de las constantes se puede escribir la integral con fracciones parciales

$$\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - 8x^2 + 16x} dx = \int \left(\frac{\frac{5}{16}}{x} + \frac{\frac{11}{16}}{x-4} + \frac{\frac{21}{4}}{(x-4)^2} \right) dx$$

Integrando, se obtiene la misma solución que con el primer método.

Ejemplo: calcular $\int \frac{x^2 - 1}{(x+4)(x-2)^2} dx$

Debido a que este ejemplo es similar al anterior, se omitirá la explicación detallada de cada paso.

Método 1

En este caso el integrando es una fracción propia, ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador y éste tiene tres factores lineales y dos de ellos se repiten. Para el integrando se propone con una fracción correspondiente al caso uno y dos fracciones correspondientes al caso dos

$$\frac{x^2 - 1}{(x+4)(x-2)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador $(x+4)(x-2)^2$

$$\left(\frac{x^2 - 1}{(x+4)(x-2)^2} \right) (x+4)(x-2)^2 = \left(\frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \right) (x+4)(x-2)^2$$

Simplificando se obtiene

$$x^2 - 1 = \left(\frac{A(x+4)(x-2)^2}{x+4} + \frac{B(x+4)(x-2)^2}{x-2} + \frac{C(x+4)(x-2)^2}{(x-2)^2} \right)$$

$$x^2 - 1 = A(x-2)^2 + B(x+4)(x-2) + C(x+4)$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación anterior y escribirlo como polinomio de x

$$x^2 + 0x - 1 = (A+B)x^2 + (-4A+2B+C)x + 4A-8B+4C$$

A partir de la identidad se puede plantear un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & A+B \\ 0 & = & -4A+2B+C \\ -1 & = & 4A-8B+4C \end{array}$$

Solucionando el sistema se obtiene $A = \frac{5}{12}$, $B = \frac{7}{12}$ y $C = \frac{1}{2}$. Con las constantes se puede escribir la integral

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x+4)(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{\frac{5}{12}}{x+4} + \frac{\frac{7}{12}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-2)^2} \right) dx$$

Integrando el lado derecho

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x+4)(x-2)^2} dx = \int \frac{\frac{5}{12}}{x+4} dx + \int \frac{\frac{7}{12}}{x-2} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x-2)^2} dx$$

Se obtiene

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x+4)(x-2)^2} dx = \frac{5}{12} \ln|x+4| + \frac{7}{12} \ln|x-2| - \frac{1}{2(x-2)} + C$$



Método 2

Al igual que en los ejemplos anteriores, se proponen las fracciones parciales para el integrando y se simplifica hasta llegar a la identidad

$$x^2 - 1 = A(x-2)^2 + B(x+4)(x-2) + C(x+4)$$

Como se tiene un factor repetido, no es posible obtener inmediatamente las constantes A , B y C , pero se pueden sustituir los valores sencillos $x=0$, y en este caso conviene $x=2$ y $x=-4$.

$$\text{Para } x=0; \quad 0^2 - 1 = A(0-2)^2 + B(0+4)(0-2) + C(0+4)$$

$$-1 = 4A - 8B + 4C$$

$$\text{Para } x=2; \quad (2)^2 - 1 = A(2-2)^2 + B(2+4)(2-2) + C(2+4)$$

$$\frac{1}{2} = C$$

$$\text{Para } x=-4; \quad (-4)^2 - 1 = A(-4-2)^2 + B(-4+4)(-4-2) + C(-4+4)$$

$$15 = 36A \Rightarrow A = \frac{5}{12}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores, se tiene que

$$A = \frac{5}{12}, B = \frac{7}{12} \text{ y } C = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo las constantes en la integral

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x+4)(x-2)^2} dx = \int \frac{\frac{5}{12}}{x+4} dx + \int \frac{\frac{7}{12}}{x-2} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x-2)^2} dx$$

Al resolver la integral se obtiene la misma solución que con el método anterior.

Ejemplo: calcular $\int \frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{x(x-1)^3} dx$

Debido a que este ejemplo es similar al anterior, se omitirá la explicación detallada de cada paso.

Método 1

El denominador tiene cuatro factores lineales y tres de ellos se repiten; el integrando se propone como una fracción correspondiente al caso uno y tres fracciones correspondientes al caso dos.

$$\frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador $x(x-1)^3$

$$\left(\frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{x(x-1)^3} \right) x(x-1)^3 = \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} \right) x(x-1)^3$$

Simplificando se obtiene

$$3x^3 - 8x^2 + 10 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación anterior y escribirlo como polinomio de x

$$3x^3 - 8x^2 + 10 = (A+B)x^3 + (-3A-2B+C)x^2 + (3A+B-C+D)x - A$$

Igualando coeficientes de las potencias correspondientes de x , se obtiene un sistema de ecuaciones

$$3 = A + B$$

$$-8 = -3A - 2B + C$$

$$0 = 3A + B - C + D$$

$$10 = -A$$



Se realiza la solución del sistema y se obtiene $A = -10$, $B = 13$, $C = -12$ y $D = 5$, así que la integral se puede escribir con fracciones parciales:

$$\int \frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{x(x-1)^3} dx = \int \left(\frac{-10}{x} + \frac{13}{x-1} + \frac{-12}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3} \right) dx$$

$$\int \frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{x(x-1)^3} dx = \int \frac{-10}{x} dx + \int \frac{13}{x-1} dx + \int \frac{-12}{(x-1)^2} dx + \int \frac{5}{(x-1)^3} dx$$

Integrando el lado derecho se obtiene

$$\int \frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{x(x-1)^3} dx = -10 \ln|x| + 13 \ln|x-1| + \frac{12}{(x-1)} - \frac{5}{2(x-1)^2} + C$$

Método 2

Al igual que en los ejemplos anteriores, se proponen las fracciones parciales para el integrando y se desarrolla hasta llegar a la identidad

$$3x^3 - 8x^2 + 10 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$$

Para encontrar el valor de las constantes A , B , C y D , se emplean valores sencillos para x .

Como se tiene un factor repetido, no es posible obtener inmediatamente las constantes A , B , C y D , pero se pueden sustituir los valores sencillos $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$ y en este caso conviene $x = 1$, porque permite obtener directamente una de las constantes.

Para $x = 0$;

$$\begin{aligned} 3(0)^3 - 8(0)^2 + 10 &= A(0-1)^3 + B(0)(0-1)^2 + C(0)(0-1) + D(0) \\ 10 &= -A \Rightarrow A = -10 \end{aligned}$$

Para $x = 1$;

$$3(1)^3 - 8(1)^2 + 10 = A(1-1)^3 + B(1)(1-1)^2 + C(1)(1-1) + D(1) \\ 5 = D$$

Para $x = -1$;

$$3(-1)^3 - 8(-1)^2 + 10 = A(-1-1)^3 + B(-1)(-1-1)^2 + C(-1)(-1-1) + D(-1) \\ -1 = -8A - 4B + 2C - D$$

Para $x = 2$;

$$3(2)^3 - 8(2)^2 + 10 = A(2-1)^3 + B(2)(2-1)^2 + C(2)(2-1) + D(2) \\ 2 = A + 2B + 2C + 2D$$

A partir de sustituir los valores obtenidos de A y D , en las ecuaciones anteriores se obtiene el sistema

$$-4B + 2C = -76$$

$$2B + 2C = 2$$

Resolviendo el sistema, $A = -10$, $B = 13$, $C = -12$ y $D = 5$; así que la integral se puede escribir con fracciones parciales

$$\int \frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{x(x-1)^3} dx = \int \left(\frac{-10}{x} + \frac{13}{x-1} + \frac{-12}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3} \right) dx$$

Al resolver la integral se obtiene la misma solución que con el método anterior.



Ejercicio

Resolver lo siguiente. Se recomienda derivar para comprobar el resultado.

$$\int \frac{1}{x^2(x-4)} dx =$$

3.2.3 Factores cuadráticos distintos

Caso III. El denominador $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles, de los cuales ninguno se repite.

Si en una función racional $\frac{R(x)}{Q(x)}$, en la que denominador $Q(x)$ se puede factorizar, aparecen factores de la forma $ax^2 + bx + c$, por lo que las fracciones parciales para la función racional podrán tener la forma de las ecuaciones (2) y (3) y, también, una fracción de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \quad (4)$$

Si además de los factores cuadráticos aparecen factores lineales repetidos o no, las constantes para esas fracciones serán obtenidas por alguno de los métodos de los casos anteriores.

En este tercer caso de fracciones parciales y en el siguiente debe tenerse mucho cuidado de que los factores cuadráticos que aparezcan en el denominador sean irreducibles, es decir, que no puedan factorizarse en dos factores lineales. Para saber si un factor cuadrático de la forma $ax^2 + bx + c$ es reducible o no, debe analizarse con la expresión $b^2 - 4ac$. Si se cumple que:

$b^2 - 4ac < 0$	el factor de la forma $ax^2 + bx + c$ será no reducible
$b^2 - 4ac > 0$	el factor de la forma $ax^2 + bx + c$ será reducible

En el caso de que un factor sea reducible (factorizable) y no se factorice, es decir, se trate como un factor irreducible, el resultado obtenido de fracciones parciales será incompleto.

Cada uno de los términos de la fracción $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ puede integrarse utilizando una sustitución o completando el cuadrado.

A continuación se explica este tercer caso con algunos ejemplos.



Ejemplo: calcular $\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+6)} dx$

Del integrando se puede observar que se tiene un factor lineal y uno cuadrático. Primero hay que comprobar que el factor cuadrático sea irreducible; para ello debe cumplir con la condición $b^2 - 4ac < 0$. Tomando los coeficientes del factor cuadrático $a = 1$, $b = 0$ y $c = 6$ y sustituyéndolos en la condición, se tiene que $0^2 - 4(1)(6) < 0$, por lo que es irreducible, entonces se procede a la descomposición en fracciones parciales del integrando. Para el factor lineal se propone una fracción del tipo (2) y para el factor cuadrático una fracción correspondiente con la fracción (4). Como en los casos anteriores, existen dos métodos para encontrar las constantes:

Método 1

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+6}$$

Al igual que en los casos anteriores, para determinar los valores de las constantes A , B y C , necesitamos tres ecuaciones independientes que las relacionen; por lo anterior, multiplicamos ambos de miembros de la ecuación por el mínimo común denominador $(x-1)(x^2+6)$

$$\left(\frac{x+3}{(x-1)(x^2+6)} \right) (x-1)(x^2+6) = \left(\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+6} \right) (x-1)(x^2+6)$$

Simplificando

$$x+3 = \left(\frac{A(x-1)(x^2+6)}{x-1} + \frac{(Bx+C)(x-1)(x^2+6)}{x^2+6} \right)$$

$$x+3 = A(x^2+6) + (Bx+C)(x-1)$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación anterior y escribirlo como polinomio de x

$$0x^2 + x + 3 = (A+B)x^2 + (-B+C)x + 6A - C$$

La ecuación anterior es una identidad donde los coeficientes de las potencias correspondientes de x deben ser iguales; así se obtiene un sistema de ecuaciones

$$0 = A + B$$

$$1 = -B + C$$

$$3 = 6A - C$$

De la solución del sistema resulta $A = \frac{4}{7}$, $B = -\frac{4}{7}$ y $C = \frac{3}{7}$; con estos valores se escribe la integral

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+6)} dx = \int \left(\frac{\frac{4}{7}}{x-1} + \frac{-\frac{4}{7}x + \frac{3}{7}}{x^2+6} \right) dx$$

Integrando el lado derecho

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+6)} dx = \int \frac{\frac{4}{7}}{x-1} dx + \int \frac{-\frac{4}{7}x + \frac{3}{7}}{x^2+6} dx$$

El resultado es

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+6)} dx = \frac{4}{7} \ln|x-1| + \frac{-2}{7} \ln|x^2+6| + \frac{3}{7\sqrt{6}} \arctan \frac{x}{\sqrt{6}} + C$$

La integral $\int \frac{-\frac{4}{7}x - 3}{x^2+6} dx$ se obtuvo separando la integral en dos integrales como sigue:

$$\int \frac{-\frac{4}{7}x}{x^2+6} dx \text{ se calcula con el cambio de variable } u = x^2+6 \text{ y } du = 2x dx$$

$$\int \frac{\frac{3}{7}}{x^2+6} dx \text{ se calcula con } \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$



Método 2

Como en los ejemplos anteriores, se pueden generar las constantes con un método alternativo. Primero se proponen las fracciones parciales para el integrando y se obtiene la ecuación

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+6}$$

En este caso se emplean valores sencillos para x , por ejemplo $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ ó $x = 2$. Se tienen tres constantes, por lo que se van a usar solo tres valores sencillos para obtener tres ecuaciones independientes que relacionen las constantes.

Continuando con los mismos pasos que en el método 1 se obtiene la identidad

$$x+3 = A(x^2+6) + (Bx+C)(x-1)$$

Para determinar las constantes, sustituimos los valores sencillos:

$$\text{Para } x = 0; \quad 0+3 = A(0^2+6) + (B(0)+C)(0-1)$$

$$3 = 6A - C$$

$$\text{Para } x = 1; \quad 1+3 = A((1)^2+6) + (B(1)+C)(1-1)$$

$$4 = 7A \Rightarrow A = \frac{4}{7}$$

$$\text{Para } x = -1; \quad -1+3 = A((-1)^2+6) + (B(-1)+C)(-1-1)$$

$$2 = 7A + 2B - 2C$$

Agrupando las ecuaciones anteriores en un sistema

$$3 = 6A - C$$

$$\frac{4}{7} = A$$

$$2 = 7A + 2B - 2C$$

Se resuelve el sistema y se obtiene $A = \frac{4}{7}$, $B = -\frac{4}{7}$ y $C = \frac{3}{7}$, así que la integral se puede escribir con fracciones parciales como

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+6)} dx = \int \left(\frac{\frac{4}{7}}{x-1} + \frac{-\frac{4}{7}x + \frac{3}{7}}{x^2+6} \right) dx$$

Integrando el lado derecho, se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo: calcular $\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2+x+4)} dx$

Del integrando se puede observar que el denominador tiene un factor lineal y uno cuadrático irreducible que cumple la condición $1^2 - 4(1)(4) < 0$. Se procede a la descomposición en fracciones parciales. Para el factor lineal se propone una fracción del tipo (2) y para el factor cuadrático una fracción correspondiente con la fracción (4).

Método 1

$$\frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2+x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+4}$$

Procedemos de la misma manera que en el ejemplo anterior, multiplicando ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador

$$\left(\frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2+x+4)} \right) (x+2)(x^2+x+4) = \left(\frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+4} \right) (x+2)(x^2+x+4)$$

Simplificando se obtiene

$$3x^2 + 2x - 2 = \left(\frac{A(x+2)(x^2+x+4)}{x+2} + \frac{(Bx+C)(x+2)(x^2+x+4)}{x^2+x+4} \right)$$

$$3x^2 + 2x - 2 = A(x^2+x+4) + (Bx+C)(x+2)$$



Al desarrollar el lado derecho de la ecuación anterior y escribirlo como polinomio de x

$$3x^2 + 2x - 2 = (A + B)x^2 + (A + 2B + C)x + 4A + 2C$$

Igualando coeficientes se obtiene el sistema de ecuaciones

$$3 = A + B$$

$$2 = A + 2B + C$$

$$-2 = 4A + 2C$$

Solucionando el sistema se obtiene $A = 1$, $B = 2$ y $C = -3$, así que la integral se puede escribir con fracciones parciales

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2 + x + 4)} dx = \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2x-3}{x^2 + x + 4} \right) dx$$

y se procede a integrar el lado derecho

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2 + x + 4)} dx = \int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{2x}{x^2 + x + 4} dx + \int \frac{-3}{x^2 + x + 4} dx$$

El resultado es

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2 + x + 4)} dx = \ln|x+2| + \ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} \right| - \frac{2}{\sqrt{15}} \arctan \frac{2 \left(x + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{15}} - \frac{6}{\sqrt{15}} \arctan \frac{2 \left(x + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{15}} + C$$

Sumando términos semejantes.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2 + x + 4)} dx = \\ \ln|x+2| + \ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} \right| - \frac{8}{\sqrt{15}} \arctan \frac{2 \left(x + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{15}} + C \end{aligned}$$

Para la integral $\int \frac{2x}{x^2 + x + 4} dx$, se completa el trinomio cuadrado perfecto en el denominador

$$\int \frac{2x}{x^2 + x + \frac{1}{4} + 4 - \frac{1}{4}} dx = \int \frac{2x}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{4}} dx$$

después se realiza un primer cambio de variable con $u = x + 1/2$; $x = u - 1/2$ y $du = dx$, con lo que se obtiene

$$\int \frac{2x}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{4}} dx = \int \frac{2u-1}{u^2 + \frac{15}{4}} du$$

Esta última integral se separa en dos más

$$\int \frac{2u-1}{u^2 + \frac{15}{4}} du = \int \frac{2u}{u^2 + \frac{15}{4}} du - \int \frac{1}{u^2 + \frac{15}{4}} du$$

Para $\int \frac{2u}{u^2 + \frac{15}{4}} du$, se realiza un segundo cambio $t = u^2 + 15/4$ y $dt = 2du$

Con lo que se obtiene

$$\int \frac{2u}{u^2 + \frac{15}{4}} du = \int \frac{1}{t} dt$$

Se realiza la integración y después se hacen las sustituciones pertinentes para cada variable y así volver a la variable x . De esa forma se llega al resultado presentado.



Método 2

Es un procedimiento semejante al que se aplicó en los ejemplos anteriores, por lo que se omitirá la explicación detallada de cada paso. Se proponen las fracciones parciales para el integrando, para después multiplicar por el común denominador y llegar a la identidad

$$x+3 = A(x^2+6) + (Bx+C)(x-1)$$

Usando $x = -2$, porque anula uno de los factores y los valores sencillos $x = 0$ y $x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 0; \quad 3(0)^2 + 2(0) - 2 &= A((0)^2 + (0) + 4) + (B(0) + C)(0 + 2) \\ -2 &= 4A + 2C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 1; \quad 3(1)^2 + 2(1) - 2 &= A((1)^2 + (1) + 4) + (B(1) + C)(1 + 2) \\ 3 &= 6A + 3B + 3C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } x = -2; \quad 3(-2)^2 + 2(-2) - 2 &= A((-2)^2 + (-2) + 4) + (B(-2) + C)(-2 + 2) \\ 6 &= 6A \end{aligned}$$

Con las sustituciones anteriores se obtiene un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{r} -2 = 4A + 2C \\ 3 = 6A + 3B + 3C \\ \underline{6 = 6A} \end{array}$$

Se resuelve el sistema y se obtiene $A = 1$, $B = 2$ y $C = -3$, así que la integral se puede escribir con fracciones parciales como

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2+x+4)} dx = \int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{2x}{x^2+x+4} dx + \int \frac{-3}{x^2+x+4} dx$$

Integrando el lado derecho, se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo: calcular $\int \frac{x^2 - 4x - 4}{(x-2)(x^2+4)} dx$

Primero se comprueba que el factor cuadrático sea irreducible con $0^2 - 4(1)(4) < 0$; como resulta menor que cero, es irreducible y se procede a la descomposición en fracciones parciales.

Método 1

$$\frac{x^2 - 4x - 4}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Procediendo de la misma manera que en los ejemplos anteriores, multipliquemos ambos miembros de la ecuación por el común denominador

$$(x-2)(x^2+4)$$

$$\left(\frac{x^2 - 4x - 4}{(x-2)(x^2+4)} \right) (x-2)(x^2+4) = \left(\frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \right) (x-2)(x^2+4)$$

Simplificando se obtiene

$$x^2 - 4x - 4 = \left(\frac{A(x-2)(x^2+4)}{x-2} + \frac{(Bx+C)(x-2)(x^2+4)}{x^2+4} \right)$$

$$x^2 - 4x - 4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-2)$$

Desarrollando el lado derecho de la ecuación anterior y agrupando coeficientes de x

$$x^2 - 4x - 4 = (A+B)x^2 + (-2B+C)x + 4A - 2C$$



Igualando coeficientes se obtiene un sistema de ecuaciones

$$1 = A + B$$

$$-4 = -2B + C$$

$$-4 = 4A - 2C$$

Se realiza la solución del sistema; los valores obtenidos para las constantes son $A = -1$, $B = 2$ y $C = 0$. Con estas constantes se puede escribir la integral como

$$\int \frac{x^2 - 4x - 4}{(x-2)(x^2+4)} dx = \int \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2x+0}{x^2+4} \right) dx$$

y se procede a integrar el lado derecho

$$\int \frac{x^2 - 4x - 4}{(x-2)(x^2+4)} dx = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{2x}{x^2+4} dx$$

El resultado es

$$\int \frac{x^2 - 4x - 4}{(x-2)(x^2+4)} dx = -\ln|x-2| + \ln|x^2+4| + C$$

Método 2

Se siguen los mismos pasos que en el método 1 para llegar a la identidad

$$x^2 - 4x - 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x - 2)$$

Sustituyendo valores sencillos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

$$\text{Para } x = 0; \quad 0^2 - 4(0) - 4 = A(0^2 + 4) + (B(0) + C)(0 - 2)$$

$$-4 = 4A - 2C$$

$$\text{Para } x = 1; \quad 1^2 - 4(1) - 4 = A(1^2 + 4) + (B(1) + C)(1 - 2)$$

$$-7 = 5A - B - C$$

$$\text{Para } x = 2; (2)^2 - 4(2) - 4 = A((2)^2 + 4) + (B(2) + C)(2 - 2)$$

$$-8 = 8A$$

Con las sustituciones anteriores se obtiene el sistema de ecuaciones

$$-4 = 4A - 2C$$

$$-7 = 5A - B - C$$

$$\underline{-8 = 8A}$$

Solucionando el sistema, las constantes son $A = -1$, $B = 2$ y $C = 0$, así que la integral se escribe

$$\int \frac{x^2 - 4x - 4}{(x - 2)(x^2 + 4)} dx = \int \left(\frac{-1}{x - 2} + \frac{2x}{x^2 + 4} \right) dx$$

Integrando se obtiene el mismo resultado.



Ejercicio

Resolver lo siguiente; se recomienda derivar para comprobar el resultado.

$$\int \frac{-4}{x(x^2+1)} dx =$$

3.2.4 Factores cuadráticos repetidos

Caso IV. El denominador $Q(x)$ contiene un factor cuadrático repetido

Si en una función racional $\frac{R(x)}{Q(x)}$, en la que denominador $Q(x)$ se puede factorizar y uno de los factores es de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$, se escriben las fracciones parciales para la función racional que pueden tener la forma de las ecuaciones (2) y (3) y además una fracción como

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (5)$$

Al igual que en el caso tres, el factor cuadrático deber ser irreducible, es decir, debe satisfacer $b^2 - 4ac < 0$.

Cada uno de los términos cuadráticos de la fracción anterior pueden integrarse utilizando una sustitución o completando el cuadrado. A continuación, se explica a detalle este caso con algunos ejemplos.

Ejemplo: calcular $\int \frac{x^3 + x}{(x^2 + 6)^2} dx$

Del integrando se puede observar que se tiene un factor cuadrático irreducible, ya que se cumple que $0^2 - 4(1)(6) < 0$; se procede a la descomposición en fracciones parciales. Como en los casos anteriores, existen dos métodos para encontrar las constantes.

Método 1

$$\frac{x^3 + x}{(x^2 + 6)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 6} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 6)^2}$$

Para determinar los valores de las constantes A , B , C y D necesitamos cuatro ecuaciones independientes que las relacionen; multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador $(x^2 + 6)^2$



$$\left(\frac{x^3 + x}{(x^2 + 6)^2} \right) (x^2 + 6)^2 = \left(\frac{Ax + B}{x^2 + 6} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 6)^2} \right) (x^2 + 6)^2$$

Simplificando se obtiene

$$x^3 + x = \left(\frac{(Ax + B)(x^2 + 6)^2}{x^2 + 6} + \frac{(Cx + D)(x^2 + 6)^2}{(x^2 + 6)^2} \right)$$

$$x^3 + x = (Ax + B)(x^2 + 6) + (Cx + D)$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación anterior y escribirlo como polinomio de x

$$x^3 + 0x^2 + x = Ax^3 + Bx^2 + (6A + C)x + 6B + D$$

se obtiene un sistema de ecuaciones

$$1 = A$$

$$0 = B$$

$$1 = 6A + C$$

$$0 = 6B + D$$

Se realiza la solución del sistema y se obtiene $A = 1$, $B = 0$, $C = -5$ y $D = 0$; así que la integral se puede escribir con fracciones parciales

$$\int \frac{x^3 + x}{(x^2 + 6)^2} dx = \int \left(\frac{1x}{x^2 + 6} + \frac{-5x}{(x^2 + 6)^2} \right) dx$$

Para las integrales del lado derecho, se puede emplear la sustitución $u = x^2 + 6$ y $du = 2x dx$, con lo que se obtiene el siguiente resultado:

$$\int \frac{x^3 + x}{(x^2 + 6)^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 6| + \frac{5}{2(x^2 + 6)} + C$$

Método 2

Siguiendo un procedimiento similar al descrito en los ejemplos anteriores, se proponen las fracciones para el integrando y después se obtiene la identidad

$$x^3 + x = (Ax + B)(x^2 + 6) + (Cx + D)$$

Como se tienen factores cuadráticos repetidos y cuatro constantes, se emplean cuatro valores sencillos para x , por ejemplo $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ y $x = 2$, para obtener cuatro ecuaciones independientes que relacionen las constantes A , B , C y D .

Para determinar las constantes, sustituimos los valores sencillos:

$$\text{Para } x = 0; \quad 0^3 + 0 = (A(0) + B)(0^2 + 6) + (C(0) + D)$$

$$0 = 6B + D$$

$$\text{Para } x = 1; \quad (1)^3 + 1 = (A(1) + B)(1^2 + 6) + (C(1) + D)$$

$$2 = (A + B)(7) + C + D$$

$$2 = 7A + 7B + C + D$$

$$\text{Para } x = -1; \quad (-1)^3 + (-1) = (A(-1) + B)((-1)^2 + 6) + (C(-1) + D)$$

$$-2 = (-A + B)(7) - C + D$$

$$-2 = -7A + 7B - C + D$$

$$\text{Para } x = 2; \quad (2)^3 + (2) = (A(2) + B)((2)^2 + 6) + (C(2) + D)$$

$$10 = (2A + B)10 + 2C + D$$

$$10 = 20A + 10B + 2C + D$$



De las sustituciones anteriores se obtienen las siguientes ecuaciones

$$0 = 6B + D$$

$$2 = 7A + 7B + C + D$$

$$-2 = -7A + 7B - C + D$$

$$10 = 20A + 10B + 2C + D$$

Se resuelve el sistema y resulta $A = 1$, $B = 0$, $C = -5$ y $D = 0$. Con estas constantes la integral se puede escribir con fracciones parciales como

$$\int \frac{x^3 + x + 3}{(x^2 + 6)^2} dx = \int \left(\frac{1x}{x^2 + 6} + \frac{-5x}{(x^2 + 6)^2} \right) dx$$

Integrando el lado derecho, se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo: calcular $\int \frac{3x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2} dx$

En este caso, el integrando tiene solo un factor cuadrático repetido e irreducible en el denominador; se procede a la descomposición en fracciones parciales:

Método 1

$$\frac{3x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

Para determinar los valores de las constantes A , B , C y D necesitamos cuatro ecuaciones independientes que las relacionen; multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador $(x^2 + 1)^2$

$$\left(\frac{3x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2} \right) (x^2 + 1)^2 = \left(\frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} \right) (x^2 + 1)^2$$

Simplificando

$$3x^2 + 4 = \left(\frac{(Ax+B)(x^2+1)^2}{x^2+1} + \frac{(Cx+D)(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} \right)$$

$$3x^2 + 4 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación anterior y escribirlo como polinomio de x se obtiene

$$3x^2 + 0x + 4 = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B + D$$

Igualando coeficientes se obtiene el sistema de ecuaciones

$$0 = A$$

$$3 = B$$

$$0 = A + C$$

$$4 = B + D$$

La solución del sistema es $A=0$, $B=3$, $C=0$ y $D=1$; con estos valores la integral se escribe como

$$\int \frac{3x^2+4}{(x^2+1)^2} dx = \int \left(\frac{3}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

Y se procede a integrar el lado derecho

$$\int \frac{3x^2+4}{(x^2+1)^2} dx = 3 \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

Sumando términos semejantes, se obtiene el resultado:

$$\int \frac{3x^2+4}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{7}{2} \arctan x + C$$



Para $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ se usó la fórmula de reducción

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

Método 2

De la misma manera que en los ejemplos anteriores, para encontrar el valor de las constantes A , B , C y D partimos de la identidad.

$$3x^2+4=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)$$

Se tienen factores cuadráticos repetidos y cuatro constantes; se emplean cuatro valores sencillos para x , por ejemplo $x=0$, $x=1$, $x=-1$ y $x=2$. Con esto se van a obtener cuatro ecuaciones independientes que relacionen las constantes.

Sustituyendo los valores propuestos:

$$\text{Para } x=0; \quad 3(0)^2+4=(A(0)+B)((0)^2+1)+(C(0)+D)$$

$$4=B+D$$

$$\text{Para } x=1; \quad 3(1)^2+4=(A(1)+B)((1)^2+1)+(C(1)+D)$$

$$7=2A+2B+C+D$$

$$\text{Para } x=-1; \quad 3(-1)^2+4=(A(-1)+B)((-1)^2+1)+(C(-1)+D)$$

$$7=-2A+2B-C+D$$

$$\text{Para } x=2; \quad 3(2)^2+4=(A(2)+B)((2)^2+1)+(C(2)+D)$$

$$16=10A+5B+2C+D$$

Con las sustituciones anteriores se obtienen las siguientes ecuaciones

$$4 = B + D$$

$$7 = 2A + 2B + C + D$$

$$7 = -2A + 2B - C + D$$

$$16 = 10A + 5B + 2C + D$$

Se realiza la solución de este sistema y se obtiene $A = 0$, $B = 3$, $C = 0$ y $D = 1$; así que la integral se puede escribir con fracciones parciales

$$\int \frac{3x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \left(\frac{3}{x^2 + 1} + \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \right) dx$$

Al resolver la integral se obtiene la misma solución que con el método anterior.

Ejemplo: calcular $\int \frac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2} dx$

Del integrando se puede observar que se tiene un factor cuadrático repetido e irreducible; se procede a la descomposición en fracciones parciales.

Método 1

$$\frac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}$$

Para determinar los valores de las constantes A , B , C y D multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador $(x^2 + 2)^2$

$$\left(\frac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2} \right) (x^2 + 2)^2 = \left(\frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} \right) (x^2 + 2)^2$$



Simplificando se obtiene

$$x^3 + 2x + 5 = \left(\frac{(Ax + B)(x^2 + 2)^2}{x^2 + 2} + \frac{(Cx + D)(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 2)^2} \right)$$

$$x^3 + 2x + 5 = (Ax + B)(x^2 + 2) + (Cx + D)$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación anterior

$$x^3 + 0x^2 + 2x + 5 = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + D$$

Igualando los coeficientes, se obtiene un sistema de ecuaciones

$$1 = A$$

$$0 = B$$

$$2 = 2A + C$$

$$5 = D$$

Solucionando el sistema se obtiene $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ y $D = 5$; así que la integral se puede escribir con fracciones parciales

$$\int \frac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2} dx = \int \left(\frac{x}{x^2 + 2} + \frac{5}{(x^2 + 2)^2} \right) dx$$

$$\int \frac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2} dx = \int \frac{x}{x^2 + 2} dx + \int \frac{5}{(x^2 + 2)^2} dx$$

Se procede a integrar el lado derecho, obteniendo el siguiente resultado:

$$\int \frac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| + \frac{5x}{4(x^2 + 2)} + \frac{5\sqrt{2}}{8} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

Método 2

Partiendo de la identidad $x^3 + 2x + 5 = (Ax + B)(x^2 + 2) + (Cx + D)$ para obtener el valor de las constantes A , B , C y D .

Se tienen factores cuadráticos repetidos y cuatro constantes; por lo tanto, se emplean cuatro valores sencillos para x , por ejemplo, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ y $x = 2$.

Sustituyendo los valores sencillos

$$\text{Para } x = 0; \quad (0)^3 + 2(0) + 5 = (A(0) + B)((0)^2 + 2) + (C(0) + D)$$

$$5 = 2B + D$$

$$\text{Para } x = 1; \quad (1)^3 + 2(1) + 5 = (A(1) + B)((1)^2 + 2) + (C(1) + D)$$

$$8 = 3A + 3B + C + D$$

$$\text{Para } x = -1; \quad (-1)^3 + 2(-1) + 5 = (A(-1) + B)((-1)^2 + 2) + (C(-1) + D)$$

$$2 = -3A + 3B - C + D$$

$$\text{Para } x = 2; \quad (2)^3 + 2(2) + 5 = (A(2) + B)((2)^2 + 2) + (C(2) + D)$$

$$17 = 12A + 6B + 2C + D$$

Con las sustituciones anteriores se obtienen las siguientes ecuaciones

$$5 = 2B + D$$

$$8 = 3A + 3B + C + D$$

$$2 = -3A + 3B - C + D$$

$$17 = 12A + 6B + 2C + D$$

La solución al sistema es $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ y $D = 5$. Con los valores de las constantes se escribe la integral de la forma

$$\int \frac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2} dx = \int \left(\frac{x}{x^2 + 2} + \frac{5}{(x^2 + 2)^2} \right) dx$$



Al resolver la integral se obtiene la misma solución que con el método anterior.

Ejercicio

Resolver lo siguiente; se recomienda derivar para comprobar el resultado.

$$\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx =$$

Actividad

Responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la diferencia entre fracción propia e impropia?
2. ¿En qué tipo de integrales se aplica el método de fracciones parciales?
3. Si el integrando de una $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ es una fracción impropia ¿qué debes hacer como primer paso antes de descomponer en fracciones parciales el integrando?
4. ¿Cómo eliges el caso de fracciones parciales al que corresponde una integral del tipo $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$?
5. ¿Cómo compruebas que un factor de la forma $ax^2 + bx + c$ sea irreducible?



Ejercicios adicionales

Caso I.

$$1. \quad \int \frac{4}{x^2 + 2x - 15} dx =$$

$$2. \quad \int \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x - 5} dx =$$

Caso II.

$$3. \quad \int \frac{1}{(x+2)(x+3)^2} dx =$$

$$4. \quad \int \frac{4}{x(x-1)^2} dx =$$

Caso III.

$$5. \quad \int \frac{8}{x^3 + 4x} dx =$$

$$6. \quad \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} dx =$$

Caso IV.

$$7. \quad \int \frac{x^3 + x}{(x^2 + 5)^2} dx =$$

$$8. \quad \int \frac{3x^2}{(3+x^2)^2} dx =$$

Actividad colaborativa:

Siguiendo las instrucciones del profesor, formen equipos y verifiquen el proceso de solución de las integrales anteriores.

Recurso en línea

Puedes comprobar la solución de las integrales empleando la *Calculadora de Integrales* disponible en: www.calculadora-de-integrales.com/

Curso en línea

Se recomienda revisar este tema en KHANacademy, en el apartado de Cálculo Integral, los métodos de integración: Desarrollo en fracciones parciales, disponible en:

<https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus/integration-techniques/integrate-partial-fraction-expansion/v/partial-fraction-expansion-to-integrate>

Videos

Se recomienda revisar los videos de integración por fracciones parciales, disponibles en:

<https://www.youtube.com/watch?v=sIJtWkE-t3w&index=192&list=PLECF5D37F414A8A5>



Solución a los ejercicios adicionales:

Caso I.

$$1. \quad \int \frac{4}{x^2 + 2x - 15} dx = \frac{-1}{2} \ln|x+5| + \frac{1}{2} \ln|x-3| + C$$

$$2. \quad \int \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x - 5} dx = x + \frac{1}{6} \ln|x+1| + \frac{35}{6} \ln|x-5| + C$$

Caso II.

$$3. \quad \int \frac{1}{(x+2)(x+3)^2} dx = \frac{1}{x+3} + \ln|x+2| - \ln|x+3| + C$$

$$4. \quad \int \frac{4}{x(x-1)^2} dx = 4\ln|x| - \frac{4}{x-1} - 4\ln|x-1| + C$$

Caso III.

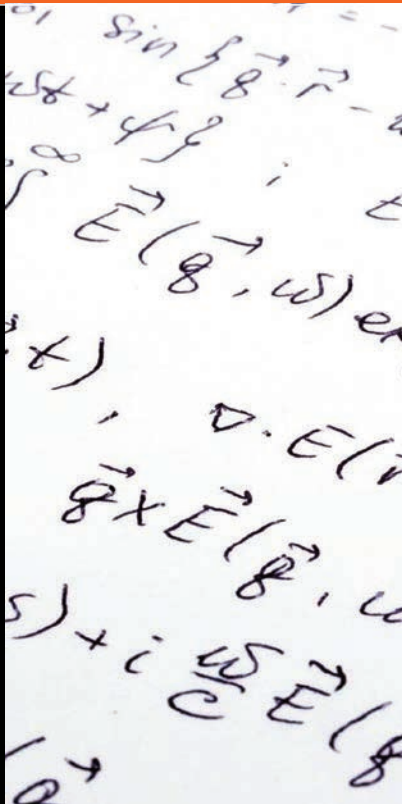
$$5. \quad \int \frac{8}{x^3 + 4x} dx = 2\ln|x| - \ln|x^2 + 4| + C$$

$$6. \quad \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} dx = \frac{-1}{2} \ln|x^2+1| + \ln|x-1| + C$$

Caso IV.

$$7. \quad \int \frac{x^3 + x}{(x^2 + 5)^2} dx = \frac{2}{(x^2 + 5)} + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 5| + C$$

$$8. \quad \int \frac{3x^2}{(3+x^2)^2} dx = \frac{-3x}{2(x^2+3)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$



Arriba a la izquierda: <https://www.agricolajerez.com/es/category/academica-espanola-omniscryptum-publishing-house/product/modelos-de-analisis-y-diseno-de-antenas-microstrip-en-matlab>

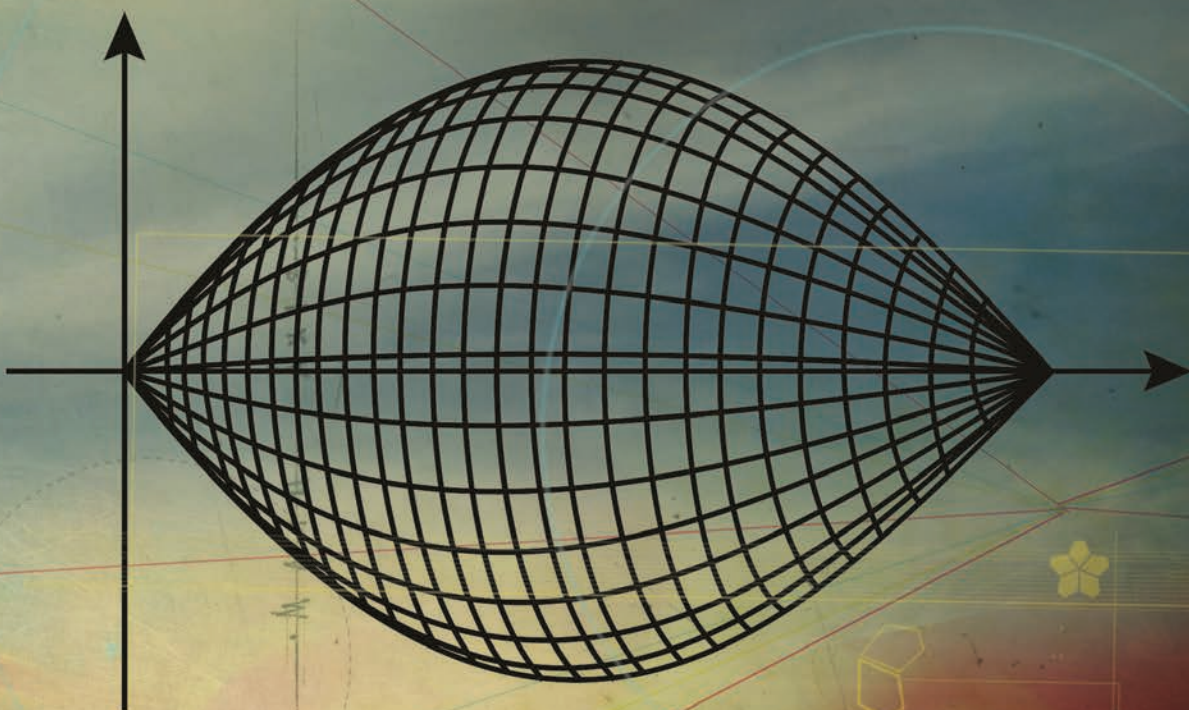
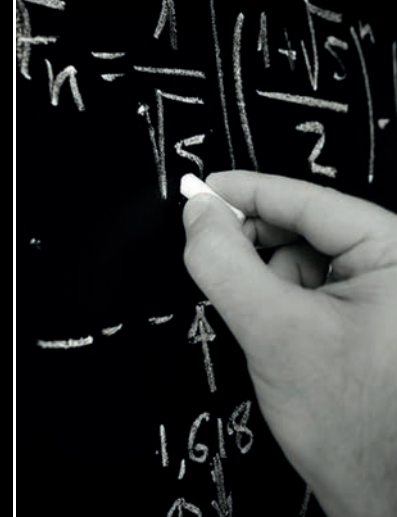
Arriba al centro: <http://arquitectl.blogspot.mx/2015/03/obras-maestras-de-la-arquitectura.html>

Arriba a la derecha: <http://www.amusal.es/noticias/153-noticias?start=90>

Página derecha: <https://www.gutierrez-rubi.es/2016/05/11/las-matematicas-las-campanas-y-la-politica/>

Módulo Cuatro

Aplicaciones de la integral definida



Propósito

Piensa de manera flexible, analítica y crítica al resolver diversas situaciones problema, aplicando la integral definida.



Competencias a desarrollar

Genéricas

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
 - 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
 - 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
8. Participa y colabora de una manera efectiva en equipos diversos.
 - 8.1. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

Disciplinares

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un fenómeno, y argumenta su pertinencia.

Introducción

El concepto de integral, y en general del cálculo integral, tiene su génesis en la necesidad de resolver problemas concretos como el ejemplo más característico que es el cálculo del área de una figura curvilínea.

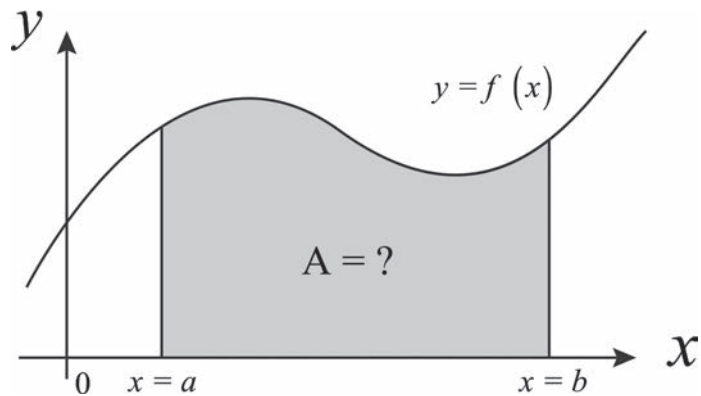
El tipo de región más simple con el que nos podemos encontrar es un rectángulo, cuya área se define como el producto de su base por su altura. A partir de esta definición podemos obtener las fórmulas para el área de regiones más complicadas: triángulos, paralelogramos, polígonos regulares, etc. El gran problema se plantea cuando se intenta calcular el área de regiones más generales que las poligonales.

Los primeros matemáticos que intentaron resolver el problema de una forma seria fueron los griegos a través del método de "exhaución", atribuido a Arquímedes, que consiste en encajar la región entre dos polígonos, uno inscrito y otro circunscrito. Si la diferencia entre las áreas de los dos polígonos es pequeña, po-

demostramos aproximar el área de la región por cualquier número comprendido entre el área del polígono inscrito y el área del polígono circunscrito.

4.1 Concepto de integral definida

Se desea calcular el área A comprendida entre la gráfica de una función $f(x) > 0$, el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la siguiente figura:



Una solución aproximada al cálculo de esta área se puede obtener dividiendo primero el área en rectángulos por debajo o por encima de la gráfica de $f(x)$, después calculando el área de cada uno de ellos y finalmente sumando todas las áreas tal como se muestra en las siguientes figuras:

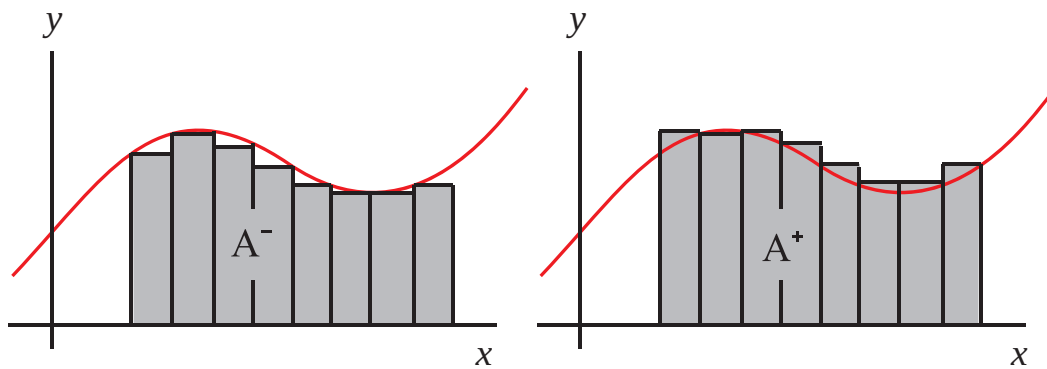


Figura (a)

Figura (b)

La aproximación se puede mejorar aumentando el número de rectángulos, aunque en la figura (a) hay un *error por defecto* y en la figura (b) un *error por exceso*, de donde se deduce que: $A^- < A < A^+$

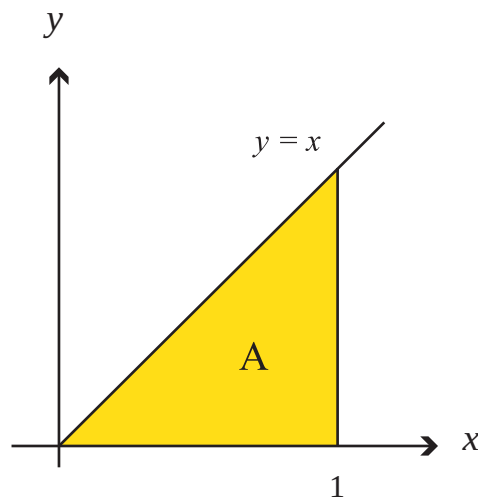


Ejemplo:

Calcular de manera aproximada el área A comprendida entre la gráfica de la función $y = x$, el eje X y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

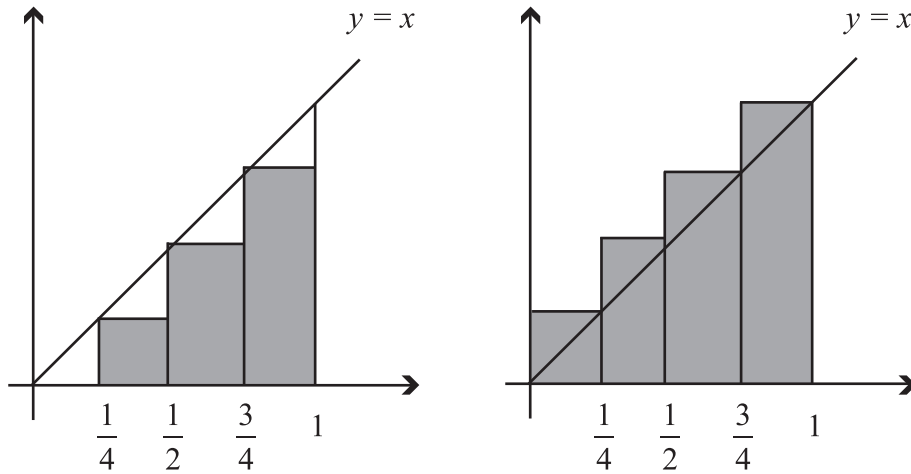
El área A gráficamente representada es:



Se observa que el área A de la región a calcular corresponde a un triángulo, la cual puede ser calculada inmediatamente por la fórmula:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(1)(1)}{2} = \frac{1}{2}$$

Sin embargo, se calculará el área de la región por aproximaciones mediante rectángulos, como se muestran en las siguientes gráficas:



Al dividir en cuatro partes iguales la base del triángulo, se forman los rectángulos, unos por debajo de la recta y los otros por encima de la recta. Si se calcula el área aproximada del triángulo con base en los tres rectángulos por debajo de la recta se obtiene que:

Rectángulo	$y = x$		Base	Área
	x	y (altura)		
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$	$A_1 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	$A_2 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$A_3 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}$

Suma de las áreas parciales:

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$



Si ahora calculamos el área del triángulo con base en los cuatro rectángulos que sobrepasan la recta, se obtiene que:

Rectángulo	$y = x$		Base	Área
	x	y (altura)		
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$	$A_1 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	$A_2 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$A_3 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}$
4	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$A_4 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{4}{16}$

La suma de las áreas parciales es:

$$A^+ = \sum_{i=1}^4 A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

El área real se encuentra entre ambas áreas, es decir:

$$A^- = \frac{3}{8} < A < A^+ = \frac{5}{8}$$

Estos cálculos se pueden aproximar tanto como se desee al área real, aumentando el número de rectángulos, ya sea por abajo o por arriba de la curva, y dividiendo en n partes iguales el área bajo la recta y en el mismo intervalo; por lo tanto, el área del triángulo con base en los rectángulos por debajo de la gráfica se explica en el siguiente cuadro:

Rectángulo	$y = x$		Base	Área (base x altura)
	x	y (altura)		
1	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$
2	$\frac{2}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n^2}$
3	$\frac{3}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{3}{n^2}$
4	$\frac{4}{n}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{4}{n^2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-2$	$\frac{n-2}{n}$	$\frac{n-2}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-2}{n^2}$
$n-1$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n^2}$

La suma total de las áreas de los $n-1$ rectángulos será:

$$\begin{aligned}
 A^- &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{i}{n} \right) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{n-2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \\
 &= \frac{1}{n^2} [1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-2) + (n-1)] \\
 &= \frac{1}{n^2} \left[\left(\frac{n+1}{2} \right) (n) \right] \\
 &= \frac{n+1}{2n}
 \end{aligned}$$



Para mejorar la aproximación hasta el máximo, aumentamos el número de rectángulos hasta el infinito, lo cual implica que:

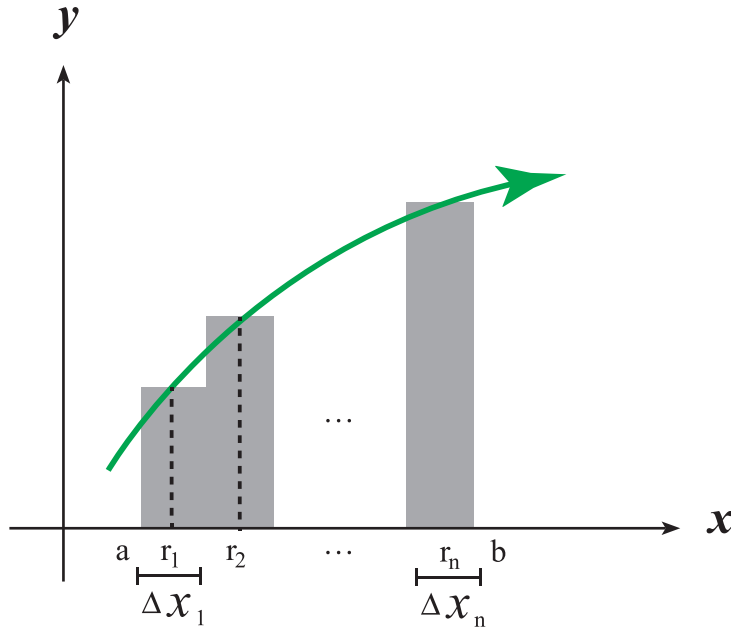
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Comparando las áreas obtenidas por la fórmula del triángulo, el área promedio de los rectángulos y por esta última fórmula (que encontramos a través de límite de la sumatoria de las áreas de los rectángulos), encontramos y corroboramos que el área obtenida para los tres casos es la misma.

Ejercicio

Calcular con la mejor aproximación posible el área A comprendida entre la gráfica de la función $y = x^2$, el eje X y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$.

Al generalizar y formalizar el procedimiento anterior para calcular áreas bajo una curva, se considera una curva situada sobre el eje X , que representa la gráfica de la función continua con ecuación $y = f(x)$. Cuando se desea encontrar el área S de la superficie limitada por la curva con ecuación $y = f(x)$, el eje X y las rectas paralelas al eje Y con ecuaciones $x = a$ y $x = b$, se divide el intervalo $[a, b]$ en n partes, no necesariamente iguales, como se muestra a continuación:



Por lo tanto, la función f es continua y definida para el intervalo $[a, b]$, y éste es dividido entre n subintervalos iguales $\Delta x_1 = x_1 - a$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, $\dots$, $\Delta x_m = b - x_{n-1}$; cada uno de ellos será la base correspondiente a uno de los rectángulos, los cuales podrán estar por arriba o por debajo de la curva. La altura de dichos rectángulos será dada por el valor de la función para algún valor de x dentro de cada subintervalo, o sea, $y_i = f(x_i)$ en particular, de donde se puede escribir el área aproximada por n rectángulos S_n bajo la curva como la suma de las áreas de todos los rectángulos de la siguiente manera:

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$

Si se considera un número infinito de subintervalos entre los cuales dividir el intervalo $[a, b]$, cada Δx_i será cada vez más pequeño, $\Delta x_i \rightarrow 0$, por lo que cada vez se tendrán más rectángulos que llenen el área bajo la curva y, en consecuencia, el área definida por la suma se aproximará cada vez más al área total buscada, hasta llegar a ser igual a ella, es decir:

$$A = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} S_n = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$



Esto nos indica, que el área real puede ser determinada mediante el cálculo del límite de la sumatoria de las áreas de los rectángulos usados en la aproximación.

De esta forma, la **integral definida de f de a a b** es el número:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta_x$$

Donde:

$f(x)dx$ se denomina integrando

a Límite inferior del intervalo

b Límite superior del intervalo

La integral definida $\int_a^b f(x) dx$, es un número, que no depende de x . De hecho,

podría utilizar cualquier letra en lugar de x , sin cambiar el valor de la integral:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$$

La suma $\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta_x$ que aparece en la definición de integral definida se llama

Suma de Riemann en honor al matemático alemán Bernahrd Riemann.

Propiedades de la integral definida

Suponga que f y g son funciones continuas.

$$\text{I)} \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\text{II)} \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\text{III)} \int_a^b c = c(b-a), \text{ donde } c \text{ es cualquier constante}$$

$$\text{IV)} \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\text{V)} \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx, \text{ donde } c \text{ es cualquier constante}$$

$$\text{VI)} \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \text{ donde } a \leq b \leq c$$

Teorema fundamental del Cálculo

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde F es una antiderivada de f , es decir, una función tal que $F' = f$

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El primero surgió del problema de la tangente, mientras que el cálculo integral lo hizo de un problema aparentemente no relacionado: el problema del área. Isaac Barrow (1630-1677), profesor de Newton en Cambridge, descubrió que estos dos problemas en realidad estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta que la derivación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo da la correspondencia inversa inequívoca entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta correspondencia y la aplicaron para desarrollar el cálculo en un método matemático sistemático. En particular, ellos advirtieron que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas.



Ejemplo:

Usar las propiedades de las integrales y el teorema fundamental del cálculo para evaluar:

$$\int_0^1 (4 + 3x^2) dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (4 + 3x^2) dx &= \int_0^1 4 dx + \int_0^1 3x^2 dx \\ &= \int_0^1 4 dx + 3 \int_0^1 x^2 dx \\ &= 4 \Big|_0^1 + 3 \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= 4(1 - 0) + 3 \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \\ &= 4(1) + 3 \left(\frac{1}{3} \right) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ejercicio

Usar las propiedades de las integrales y el teorema fundamental del cálculo para evaluar $\int_{-1}^1 (4x^3 - 7x^2 - 2x + 9) dx$

Ejercicio

Usar las propiedades de las integrales y el teorema fundamental del cálculo para evaluar $\int_{-2}^4 \left(x^2 + \frac{1}{2}x + 5 \right) dx$



Ejemplo:

Si se sabe que $\int_0^{10} f(x) dx = 17$ y $\int_0^8 f(x) dx = 12$, determinar $\int_8^{10} f(x) dx$

Solución:

Por la propiedad VI se tiene:

$$\int_0^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_8^{10} f(x) dx &= \int_0^{10} f(x) dx - \int_0^8 f(x) dx \\ &= 17 - 12 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ejercicio

Si se sabe que $\int_1^5 f(x) dx = 12$ y $\int_4^5 f(x) dx = 3.6$, determinar $\int_1^4 f(x) dx$

Ejercicio

Si se sabe que $\int_{-3}^5 f(x) dx = 10$ y $\int_1^5 f(x) dx = 2.7$, determinar $\int_{-3}^1 f(x) dx$

Ejemplo:

Determinar la integral definida $\int_{-1}^2 |x| dx$

Solución:

Por la propiedad VI y la definición del valor absoluto, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 |x| dx &= \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx \\
 &= \left(-\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 \\
 &= -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) \\
 &= -\left(0 - \frac{1}{2} \right) + (2 - 0) \\
 &= \frac{1}{2} + 2 \\
 &= \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$



Ejercicio

Determinar la integral $\int_{-5}^7 |5x - 1| dx$

Ejercicio

Determinar la integral $\int_{-1}^4 (|x - 3| - 5) dx$

4.1.1 Área bajo la curva de una función

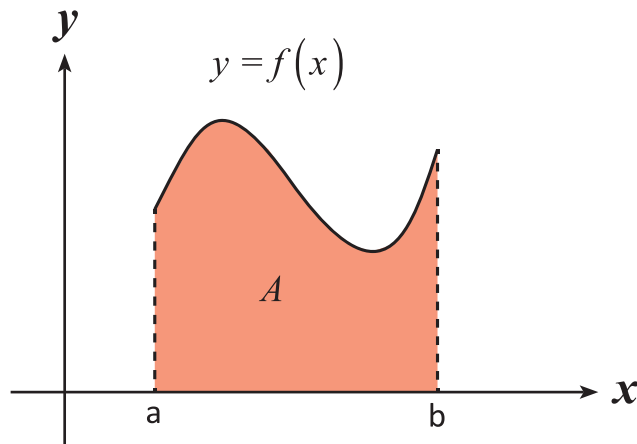
Una de las aplicaciones del cálculo de integrales definidas es el cálculo de áreas de regiones acotadas del plano delimitadas por gráficos de funciones.

El cálculo del área de una región plana acotada por la gráfica de una función f , el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, considerando que f es integrable en el intervalo $[a, b]$, se presenta en los siguientes casos:

Primer caso:

Cuando $f(x) \geq 0$, es decir, que la gráfica de f está por arriba del eje x , el área se obtiene mediante:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

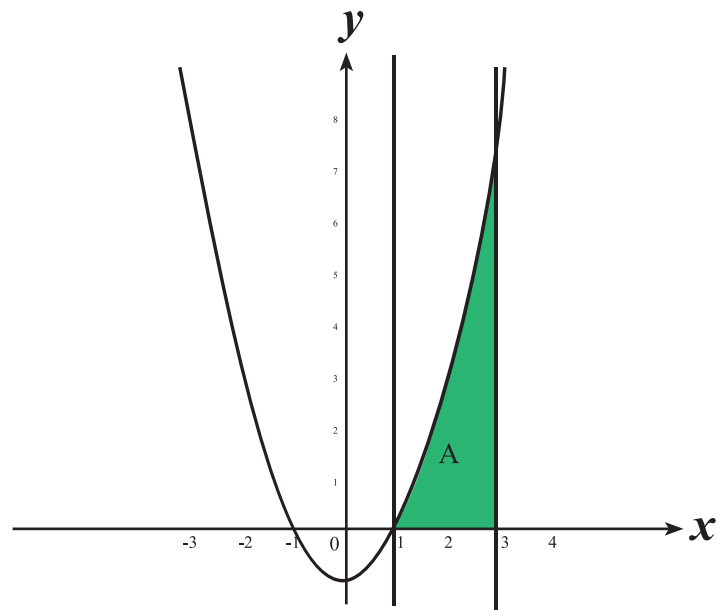


Ejemplo:

Calcular el área de la región acotada por el eje x , la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$ y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

La grafica de la región es:



Como la función es positiva en el intervalo $[1, 3]$, el área de la región es:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^3 (x^2 - 1) dx \\
 &= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^3 \\
 &= \left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1 \right) \\
 &= \left(\frac{27}{3} - 3 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\
 &= (9 - 3) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\
 &= 6 - \left(-\frac{2}{3} \right) \\
 &= 6 + \frac{2}{3} \\
 &= \frac{20}{3}
 \end{aligned}$$

Por lo que el área bajo la curva es $A = \frac{20}{3}u^2$

Ejercicio

Calcular el área de la región acotada por el eje x , la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 2$.

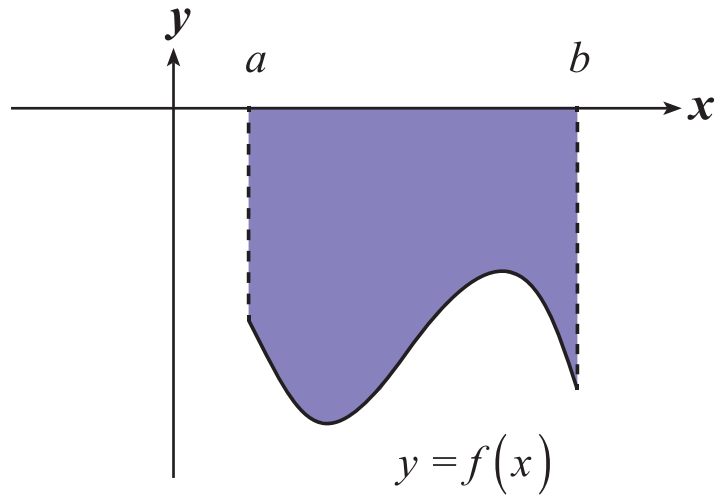
Ejercicio

Calcular el área de la región acotada por el eje x , la función $f(x) = (x-1)^3$ y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$.


Segundo caso:

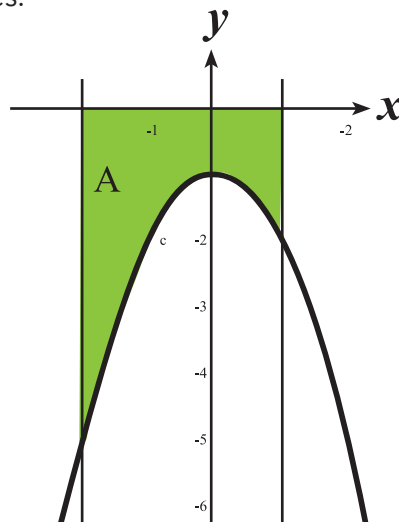
Cuando $f(x) \leq 0$, es decir, que la gráfica de f está por abajo del eje x , el área se obtiene mediante:

$$A = -\int_a^b f(x) dx$$


Ejemplo:

Calcular el área de la región acotada por el eje x , la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - 1$ y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 1$.

La gráfica de la región es:



Como la función es negativa en el intervalo $[-2, 1]$, el área de la región es:

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-2}^1 (-x^2 - 1) dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-2}^1 \\ &= \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + (-2) \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{-8}{3} - 2 \right) \\ &= \left(\frac{4}{3} \right) - \left(\frac{-14}{3} \right) \\ &= \frac{18}{3} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Por lo que el área bajo la curva es $A = 6 \text{ u}^2$.



Ejercicio

Calcular el área de la región acotada por el eje x , la gráfica de la función

$$f(x) = -\sqrt{x+5} \text{ y las rectas verticales } x = 3 \text{ y } x = 7.$$

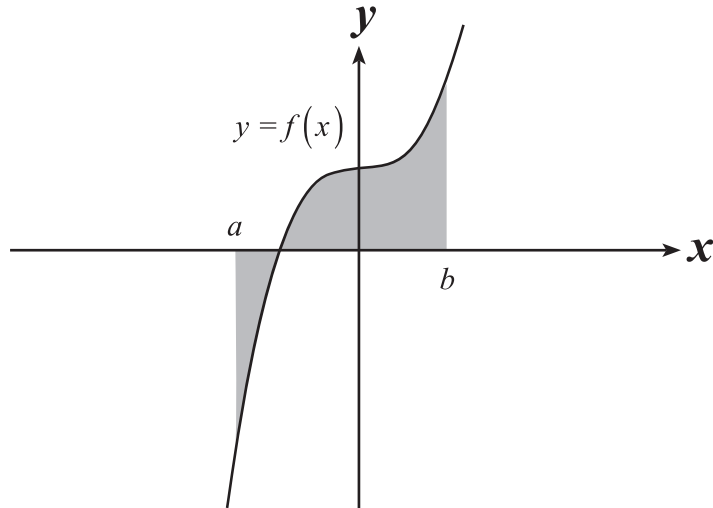
Ejercicio

Calcular el área de la región acotada por el eje x , la función $f(x) = x^2 - 6x$ y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 5$.

Tercer caso:

Cuando la función f toma valores positivos y negativos en el intervalo $[a, b]$, se deben estudiar los cambios de signo de la función en el intervalo considerado.

Para calcular el área de la región de la siguiente figura:

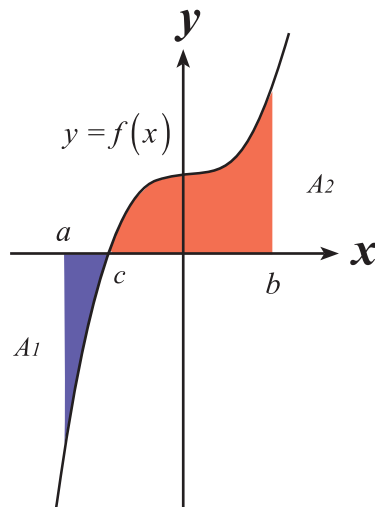


se descompone en dos regiones. Si c es el punto de intersección de la gráfica de f con el eje x , entonces:

- I. $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, c]$
- II. $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [c, b]$

Se obtienen dos regiones planas para la gráfica comprendida por la función f , el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Gráficamente:





Se calcula el área A_1 comprendida entre la gráfica de f y el eje x para $a \leq x \leq c$ y el área A_2 contenida entre la gráfica de f y el eje x para $c \leq x \leq b$, y se obtiene el área de A como la suma de estas dos áreas:

$$A = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Ejemplo

Calcular el área de la región plana comprendida por la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$, el eje x y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 2$.

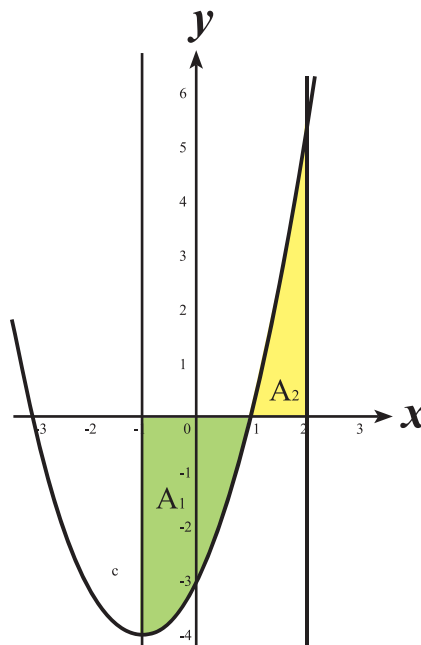
Solución:

Se determina el punto de intersección de la gráfica de f con el eje x , es decir,

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -3, \quad x = 1$$

De donde, $1 \in [-1, 2]$ y $-3 \notin [-1, 2]$. El punto de intersección de la gráfica de f con el eje x en el intervalo $[-1, 2]$ es $c = 1$.

Gráficamente se representa así:



Se tiene que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [-1, 1]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1, 2]$. Por lo tanto, el área a calcular es:

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 \\
 &= -\int_{-1}^1 (x^2 + 2x - 3) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx \\
 &= -\left(\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_1^2 \\
 &= -\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)\Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)\Big|_1^2 \\
 &= -\left[\left(\frac{1^3}{3} + 1^2 - 3(1)\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 - 3(-1)\right)\right] + \left[\left(\frac{2^3}{3} + 2^2 - 3(2)\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1^2 - 3(1)\right)\right] \\
 &= -\left(-\frac{16}{3}\right) + \frac{7}{3} \\
 &= \frac{23}{3}
 \end{aligned}$$

De esta manera, el área bajo la curva es $A = \frac{23}{3}u^2$.

Ejercicio

Calcular el área de la región acotada por el eje x , la gráfica de la función $f(x) = \sin x$ y las rectas verticales $x = -\pi$ y $x = \pi$.

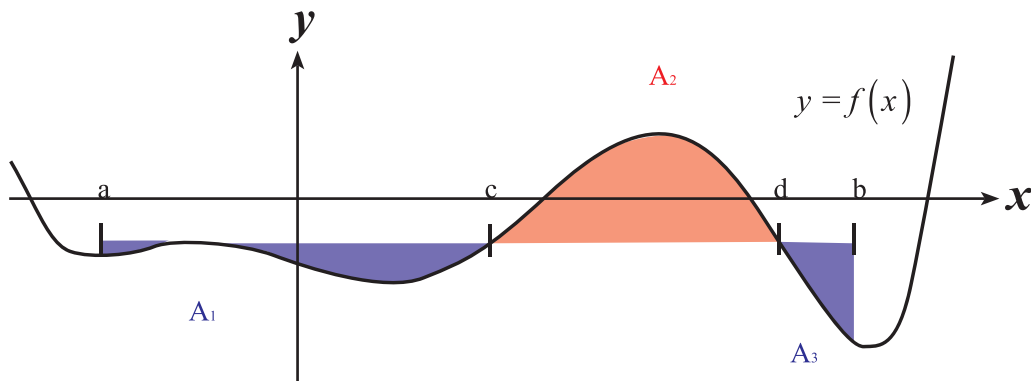


Ejercicio

Calcular el área de la región acotada por el eje x , el eje y , la gráfica de la función $f(x) = 4 - 2x^2$ y la recta vertical $x = 2$.

La misma idea puede usarse en el caso en que la función f tenga varias intersecciones en el intervalo $[a, b]$, partiéndolo en varios intervalos (delimitados por los extremos del intervalo y las intersecciones de f de manera que, en cada uno de ellos, los valores de f sean siempre positivos o, bien, negativos.

Lo anterior se ejemplifica en la siguiente grafica de la función f .



El área de la región plana comprendida por la gráfica de la función f y el eje x para $a \leq x \leq b$ se obtiene como la suma de las áreas de las tres regiones sombreadas, delimitadas por las intersecciones de f . Cada una de estas áreas, a su vez, puede calcularse por medio de una integral con el signo correspondiente:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^b f(x) dx$$

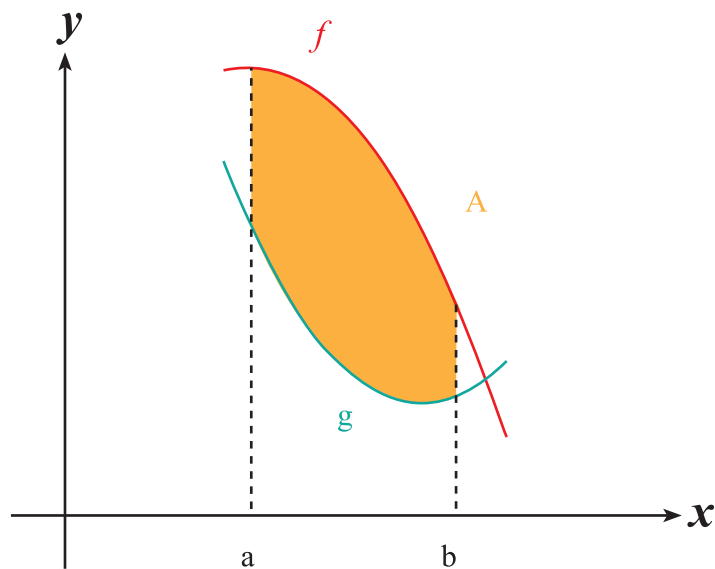


4.1.2 Área entre curvas

Con muy escasas modificaciones, se calculará el área de la región plana comprendida entre dos curvas.

Sean f y g funciones definidas en un intervalo $[a, b]$ tales que, $f(x) \geq g(x)$ para todo x de $[a, b]$, entonces el área de la región limitada por las gráficas de f y g y las rectas $x=a$ y $x=b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



Ejemplo:

Calcular el área de la región comprendida por la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 - 2$ y la recta $g(x) = 2x - 1$.

Solución:

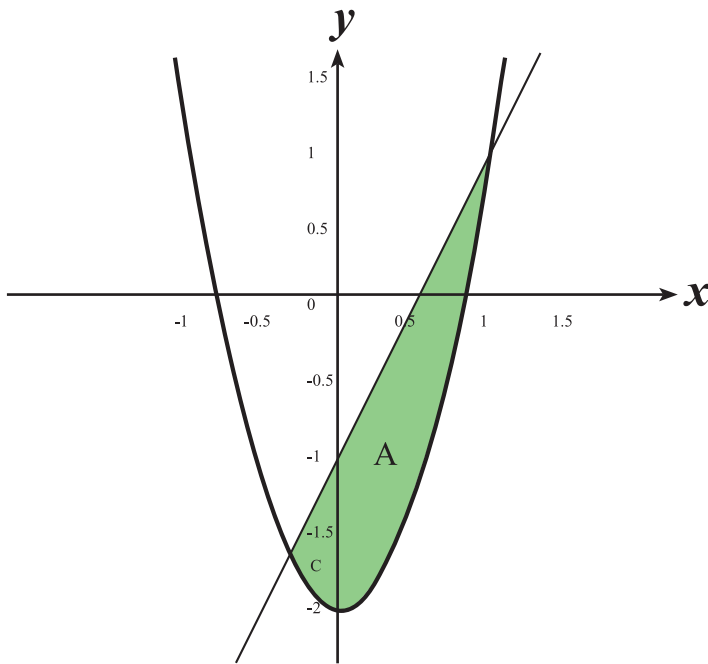
La región está limitada por los valores de x correspondientes a los dos puntos de intersección de las gráficas de f y g , es decir, los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$.

Calculando estos valores:

$$3x^2 - 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{3}$$

Los valores de x que delimitan al área son $x = 1$ y $x = -\frac{1}{3}$.

La gráfica de la región es:



Como se observa en la gráfica, $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

Por lo tanto, el área de la región limitada por las curvas de f y g es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{1}{3}}^1 [g(x) - f(x)] dx \\ &= \int_{-\frac{1}{3}}^1 [(2x - 1) - (3x^2 - 2)] dx \\ &= \int_{-\frac{1}{3}}^1 [2x - 1 - 3x^2 + 2] dx \end{aligned}$$



$$= \int_{-\frac{1}{3}}^1 [-3x^2 + 2x + 1] dx$$

$$= \left(-x^3 + x^2 + x \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^1$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{27} \right)$$

$$= \frac{32}{27}$$

Por lo que el área es $A = \frac{32}{27} u^2$.

Ejercicio

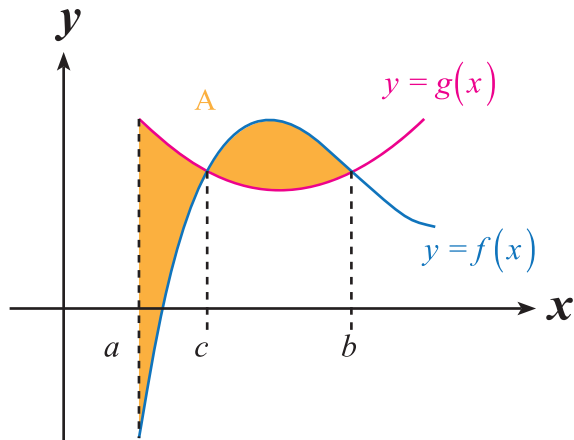
Calcular el área de la región comprendida por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x$ y la recta $g(x) = 6x - x^2$.

Ejercicio

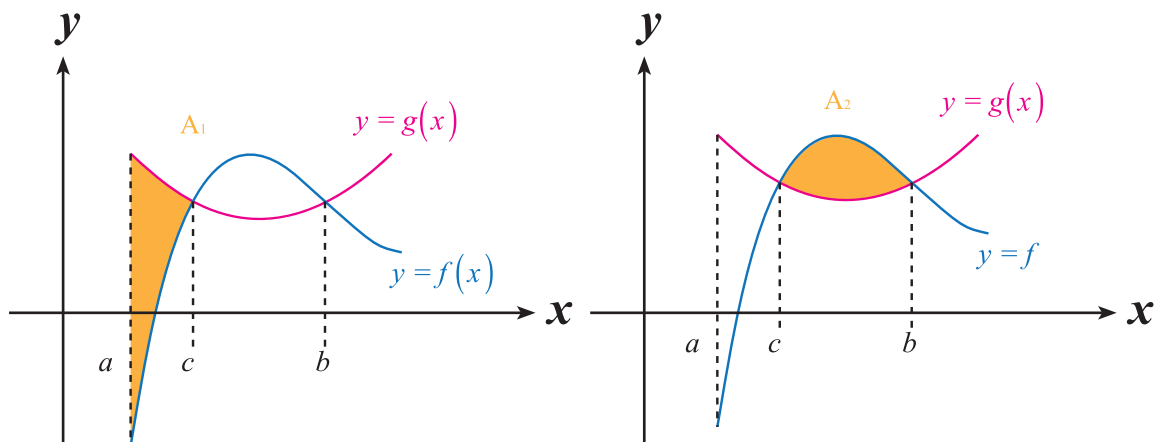
Calcular el área de la región comprendida por la gráfica de la función $f(x) = -x^2$ y la recta $g(x) = x$



Para determinar el área de la región delimitada por las funciones f y g , cuya grafica es:



El área A de la región comprendida entre las gráficas de f y g para $a \leq x \leq b$ puede descomponerse como la suma de dos áreas, como se observa en las gráficas siguientes:



Como en cada uno de los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, la gráfica de una de las funciones está siempre arriba del de la otra, y se tiene que:

$$A_1 = \int_a^c [g(x) - f(x)] dx, \text{ ya que } g(x) \geq f(x) \text{ para todo } x \in [a, c]$$

$$A_2 = \int_c^b [f(x) - g(x)] dx, \text{ ya que } f(x) \geq g(x) \text{ para todo } x \in [c, b]$$

Por lo tanto,

$$A = \int_a^c [g(x) - f(x)] dx + \int_c^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región comprendida por las parábolas

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ y } g(x) = 2x^2 \text{ para } 0 \leq x \leq 2.$$

Solución:

Se analiza si las gráficas de las funciones se intersectan en algún $x \in [0, 2]$:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x^2 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Por lo tanto, $1 \in [0, 2]$ y $-1 \notin [0, 2]$.

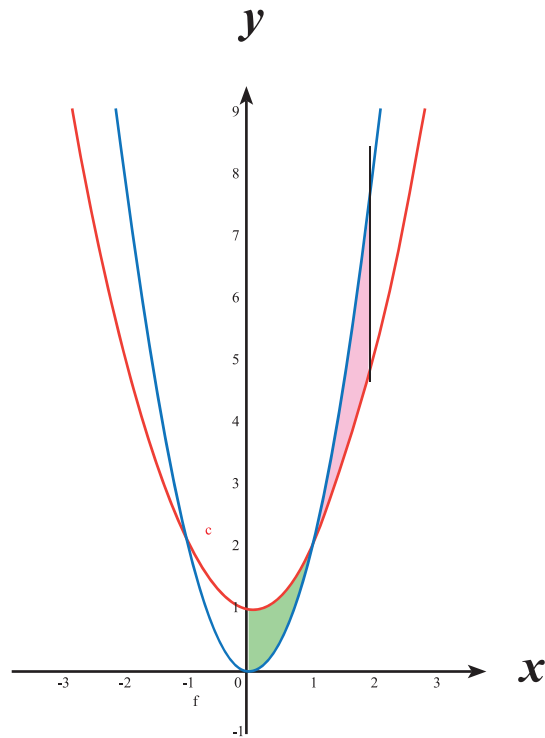
Analizando el comportamiento de las gráficas de f y g en cada uno de los

intervalos $[0, 1)$ y $(1, 2]$, es decir, $f(x) > g(x)$ ó $f(x) < g(x)$, dado que f y g son continuas, se pueden evaluar en un punto de cada uno de los intervalos:

x	$[0, 1)$	1	$(1, 2]$
f	$f(0) = 1$	$f(1) = 2$	$f(2) = 5$
g	$g(0) = 0$	$g(1) = 2$	$g(2) = 8$
luego	$f > g$		$f < g$



Gráficamente:



Por lo tanto, el área de la región limitada por las curvas de f y g es:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx \\
 &= \int_0^1 [x^2 + 1 - 2x^2] dx + \int_1^2 [2x^2 - (x^2 + 1)] dx \\
 &= \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\
 &= \left(-\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^2 \\
 &= \left(\frac{2}{3} - 0 \right) + \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Derivado de lo anterior, el área de la región es $2u^2$.

Ejercicio

Calcular el área de la región comprendida por las parábolas

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^3 + 2x \quad \text{para} \quad -1 \leq x \leq 1.$$



Ejercicio

Calcular el área de la región comprendida por las funciones

$$f(x) = x^2 \quad y \quad g(x) = 2 - x^2 \quad \text{para} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

4.2 Problemas de aplicación

La integral definida es una herramienta útil en las ciencias físicas y sociales, ya que muchas cantidades de interés en dichas ciencias pueden definirse mediante el tipo de suma que se presenta en la integral definida.

Cálculo de trabajo con ayuda de la integral definida

Una aplicación de la integral se puede asociar al concepto de “trabajo”. Si una fuerza constante F actúa sobre un objeto, desplazándolo una distancia x a lo largo de una línea recta, y la dirección de la fuerza coincide con la del movimiento, entonces el trabajo realizado W se expresa como el producto de la fuerza F por el camino recorrido. Es decir:

$$W = F \cdot x$$

Considerando una partícula P que se desplaza sobre el eje x , desde el punto $(a,0)$ al punto $(b,0)$ por medio de una fuerza $f = F(x)$, $x \in [a, b]$, el trabajo realizado por la fuerza $f = F(x)$ al mover una partícula de a a b , a lo largo del eje x , está dado por:

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

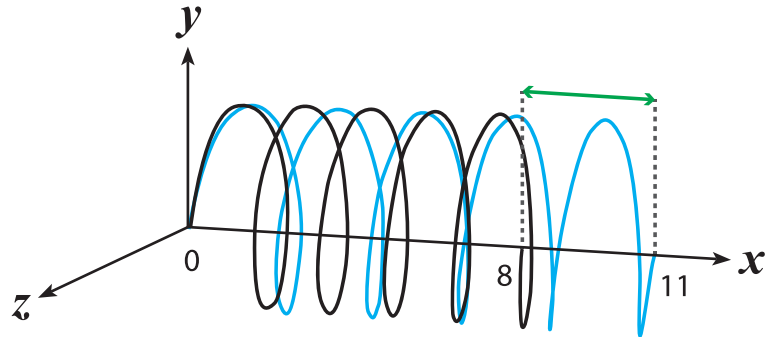
Ejemplo:

Un resorte tiene una longitud natural de 8 pulgadas. Si una fuerza de 20 libras estira el resorte $\frac{1}{2}$ pulgada, determinar el trabajo realizado al estirar el resorte de 8 pulgadas a 11 pulgadas.



Solución:

Consideremos el resorte ubicado a lo largo del eje x , con su extremo fijo en el origen:



Por la ley de Hooke se sabe que $F = kx$. Como $x = 0.5$ pulgadas, cuando $F = 20$ libras, entonces $20 = k(0.5)$, de donde $k = 40$.

Luego, $F = 40x$. Se desea calcular el trabajo realizado por esta fuerza si aumenta la extensión de 8 a 11 pulgadas. Entonces:

$$W = \int_0^3 40x dx = 20x^2 \Big|_0^3 = 180 \text{ pulgadas-libras.}$$

Ejercicio

Una fuerza de 25 kg alarga 3 cm un resorte. Determinar el trabajo requerido para alargar el resorte 2 cm más.

Ejercicio

Una fuerza de 38.750 kg alarga 7.8 cm un resorte. Determinar el trabajo requerido para alargar el resorte 45mm más.

Ejemplo:

Un resorte tiene una longitud natural de 10 pulgadas. Una fuerza de 30 libras lo estira 11.5 pulgadas. Determinar el trabajo realizado al estirar el resorte de 10 pulgadas a 12 pulgadas. Luego encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de 12 pulgadas a 14 pulgadas.

Solución:

Como $F = kx$, y $x = 11.5$ pulgadas, cuando $F = 30$ libras, entonces

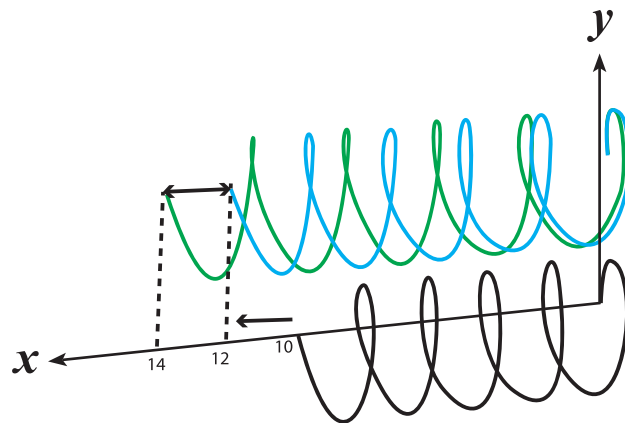
$$30 = 11.5k, \quad \text{por lo que} \quad k = \frac{60}{23}$$

El trabajo realizado para estirar el resorte de 10 a 12 pulgadas está dado por:

$$W = \int_0^2 \frac{60}{23} x dx = \frac{30}{23} x^2 \Big|_0^2 = \frac{120}{23} \text{ pulgadas-libras.}$$

El trabajo realizado para estirar el resorte de 12 a 14 pulgadas está dado por:

$$W = \int_2^4 \frac{60}{23} x dx = \frac{30}{23} x^2 \Big|_2^4 = \frac{480}{23} - \frac{120}{23} = \frac{360}{23} \text{ pulgadas-libras.}$$



Ejercicio

Determinar el trabajo efectuado al alargar un resorte 6 cm, sabiendo que se necesita una fuerza de 15 kg para alargarlo 1 cm.

Ejercicio

Un resorte tiene longitud natural de 10 cm. Si se requiere una fuerza de 20 kg para mantener el resorte estirado 0.7 cm. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud natural hasta una longitud de 12.5 cm?

Cambio de velocidad con ayuda de la integral definida

Si un objeto se mueve a lo largo de una recta con función de posición $x(t)$, por lo que su velocidad es $v(t) = x'(t)$. Por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} x'(t) dt$$

es el desplazamiento total en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$

Ejemplo:

Una partícula se mueve sobre una recta de modo que su velocidad en cada instante t es $v(t) = -6t^2 + 18t$. ¿Cuánto se desplaza esta partícula en el intervalo de tiempo $[0, 2]$?



Solución:

Desplazamiento de la partícula de 0 a 2 segundos:

$$\int_0^2 (-6t^2 + 18t) dt = -2t^3 + 9t^2 \Big|_0^2 = 20$$

Ejercicio

Un móvil se mueve sobre una recta de modo que su velocidad en cada instante t es $v(t) = 3t^2 - 15t + 2$. ¿Cuánto se desplaza esta partícula en el intervalo de tiempo $[3, 7]$?

Ejercicio

Un móvil se mueve sobre una recta de modo que su velocidad en cada instante de tiempo t es $v(t) = (2t + 1)^2$. ¿Cuánto se desplaza esta partícula en el intervalo de tiempo $[1, 5]$?

Longitud de arco

Para determinar la longitud S de un arco de una curva con ecuación $y = f(x)$, comprendida entre los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, se debe considerar que la longitud de arco está dada por:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Como la longitud de una curva no depende de la elección de los ejes coordenados, si x puede expresarse como función de y , la longitud del arco está dada por:

$$S = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Ejemplo:

Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$, desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

Solución:

Como $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$, entonces $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{x^2 + 2}$

Luego:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \sqrt{1 + \left[x\sqrt{x^2 + 2}\right]^2} dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{1 + x^2(x^2 + 2)} dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{1 + x^4 + 2x^2} dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx \end{aligned}$$



$$= \int_0^3 (x^2 + 1) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \Big|_0^3$$

$$= 12$$

Ejercicio

Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

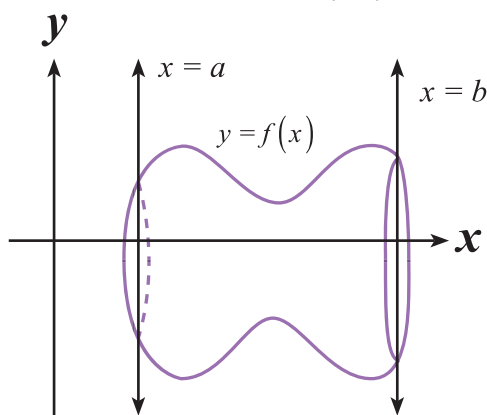
Ejercicio

Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{1}{4}\sqrt{x} - \frac{1}{5}$, desde $x = 1$ hasta $x = 5$.

Sólidos de revolución

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$.

El **sólido de revolución** es generado al girar alrededor del eje x , la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y las gráficas de $x = a$ y $x = b$. El x es un eje de simetría de dicho sólido, y una sección recta perpendicular al eje x es un círculo.



El volumen del sólido de revolución es

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

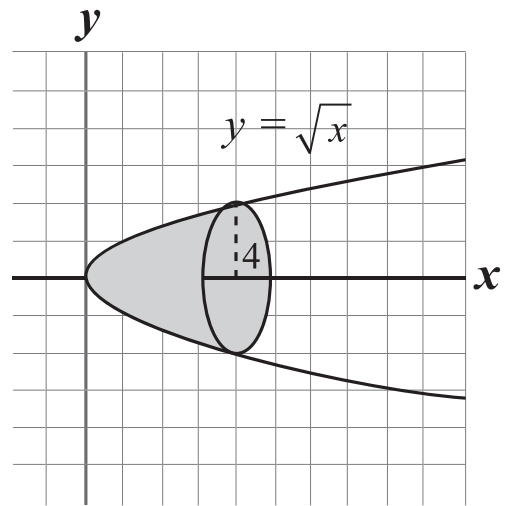


Ejemplo:

Calcular el volumen generado por la función $f(x) = \sqrt{x}$ cuando gira alrededor del eje x en el intervalo $[0, 4]$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx \\
 &= \pi \int_0^4 x dx \\
 &= \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 \\
 &= \pi (8 - 0) \\
 &= 8\pi u^3
 \end{aligned}$$



Ejercicio:

Calcular el volumen generado por la función $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ cuando gira alrededor del eje x en el intervalo $[2, 6]$.

Ejercicio:

Calcular el volumen generado por la hipérbola $xy = 9$ cuando gira alrededor del eje x en el intervalo $[2, 10]$.

Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, tales que $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a, b]$. Sea R la región del plano limitada por las curvas con ecuaciones $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas con ecuaciones $x = a$, $x = b$. El volumen de la región R está dado por:

$$V = \int_a^b \pi \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$$

Ejemplo:

Hallar el volumen engendrado cuando la superficie limitada por la curva $y = \sin x$, y las rectas con ecuaciones $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$, gira en torno al eje x .



Solución:

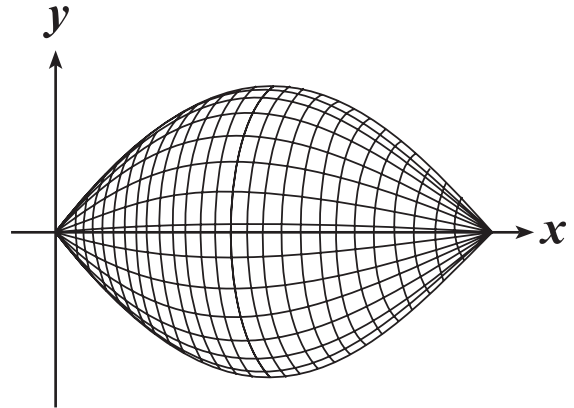
$$V = \int_0^{\pi} \pi \left[(\operatorname{sen} x)^2 - 0^2 \right] dx$$

$$= \int_0^{\pi} \pi \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} u^3$$



Ejercicio

Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje x , la superficie comprendida entre las parábolas con ecuaciones $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Ejercicio

Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje x , la superficie comprendida entre las parábolas con ecuaciones $y = x^3$, $y = 4x$.



Ejercicios adicionales

Escribir como una sola integral en la forma $\int_a^b f(x) dx$.

$$1) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_3^1 f(x) dx$$

Solución: $\int_{-1}^3 f(x) dx$

$$2) \quad \int_{-2}^5 f(x) dx - \int_{-2}^{-1} f(x) dx$$

Solución: $\int_1^5 f(x) dx$

$$3) \quad -\int_{-1}^{-5} f(x) dx + \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx$$

Solución: $\int_{-5}^6 f(x) dx$

$$4) \quad \int_{-3}^4 f(x) dx + \int_4^7 f(x) dx - \int_{-3}^{-5} f(x) dx$$

Solución: $\int_{-5}^7 f(x) dx$

Utilizar las propiedades de las integrales y el teorema fundamental del cálculo para evaluar:

$$5) \quad \int_2^5 (5 - 2x) dx$$

Solución: -6

$$6) \int_{-2}^0 (x^3 + x) dx$$

Solución: -6

$$7) \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1 \right) dx$$

Solución: 6.667

$$8) \int_{-1}^2 \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x + 3 \right) dx$$

Solución: 11.25

$$9) \int_{-2}^0 \left(5 - \sqrt{4 - x^2} \right) dx$$

Solución: 6.858

$$10) \int_{-3}^2 \left(x + \sqrt{9 - x^2} \right) dx$$

Solución: 14.137

$$11) \int_{-6}^4 \left(|x + 3| - 4 \right) dx$$

Solución: 1

$$12) \int_0^7 |x - 6| dx$$

Solución: 18.5



13) Si $\int_1^5 f(x) dx = 12$ y $\int_4^5 f(x) dx = 3$, determinar $\int_1^4 f(x) dx$

Solución: $\int_1^4 f(x) dx = 8.4$

14) Si $\int_{-5}^0 f(x) dx = 4.1$ y $\int_{-3}^0 f(x) dx = 1.1$, determinar $\int_{-5}^{-3} f(x) dx$

Solución: $\int_{-5}^{-3} f(x) dx = 3$

15) Si $\int_0^5 f(x) dx = 15$ y $\int_0^5 f(x) dx = 21$, determinar $\int_0^5 [3f(x) - 2g(x)] dx$

Solución: $\int_0^5 [3f(x) - 2g(x)] dx = 3$

16) Si $\int_{-1}^3 f(x) dx = 6$ y $\int_{-1}^3 f(x) dx = 18$, determinar $\int_{-1}^3 [4f(x) + 3g(x)] dx$

Solución: $\int_{-1}^3 [4f(x) + 3g(x)] dx = 78$

17) Determinar la $\int_0^8 f(x) dx$ para $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{para } x < 5 \\ x^2 & \text{para } x \geq 5 \end{cases}$

Solución: $\int_0^8 f(x) = 159$

18) Determinar el área de la región acotada por:

a) $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$

Solución: $\int_a^b f(x) = 6.389$

b) $y = x^2 - 3, x = -1, x = 1$

Solución: $\int_a^b f(x) = -5.333$

c) $y = \sqrt{x+1}, x = -0.5, x = 3$

Solución: $\int_a^b f(x) = 5.097$

d) $y = \tan x, x = -1, x = 1$

Solución: $\int_a^b f(x) = 0$

e) $y = x^3 + x - 2, x = 1, x = 2$

Solución: $\int_a^b f(x) = 3.25$

f) $y = \operatorname{sen}(x+3), x = -4, x = -2$

Solución: $\int_a^b f(x) = 0$

g) $y = -e^{-x}, y = e^x, x = -2, x = 2$

Solución: $\int_a^b f(x) = 14.507$

h) $y = \operatorname{sen} x, y = \cos x, x = -1, x = 0$

Solución: $\int_a^b f(x) = 1.301$



i) $y = x^3 + 1, y = x^2 + 2x, x = -1, x = 0$

Solución: $\int_a^b f(x) = 1.416$

j) $y = |x|, y = \frac{1}{4}x, x = 0, x = 3$

Solución: $\int_a^b f(x) = -3.375$

19) Un resorte tiene una longitud natural de 4 pulgadas. Si una fuerza de 24 libras estira el resorte $1/4$ pulgada, determinar el trabajo realizado al estirar el resorte de 12 pulgadas a 17 pulgadas.

Solución: 1200 pg lb

20) Un resorte tiene una longitud natural de 7 pulgadas y una fuerza de 45 libras lo estira 10.5 pulgadas. Determinar el trabajo realizado al estirar el resorte de 7 pulgadas a 13 pulgadas. Posteriormente encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de 13 pulgadas a 18 pulgadas.

Solución:

a) 77.13 pg lb

b) 182.112 pg lb

21) Cuando una partícula se ubica a una distancia x pies del origen, una fuerza de $x^2 + x$ libras actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se efectúa al moverla desde $x = 0$ hasta $x = 4$?

Solución: 29.33 ft lb

22) Se requiere una fuerza de 53 N para sostener un resorte que está estirado desde su posición natural de 8 cm a una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabajo se hace al estirar el resorte de 8 a 17 cm?

Solución: 30.66 N m

23) Una partícula se mueve sobre una recta de modo que su velocidad en cada instante t es $v(t) = -6t^2 + 18t$. ¿Cuánto se desplaza esta partícula en el intervalo de tiempo $[0, 2]$?

Solución: 52

24) Un móvil se mueve sobre una recta de modo que su velocidad en cada instante de tiempo t es $v(t) = (2t + 1)^2$. ¿Cuánto se desplaza esta partícula en el intervalo de tiempo $[1, 5]$?

Solución: 217.33

25) La aceleración de un objeto en movimiento rectilíneo se modela con la expresión $a = -2$. ¿Cuál es la velocidad y la posición del objeto cuando $t = 6$ segundos?

Solución:

a) $v = 12 \text{ m/s}$

b) $s = 36 \text{ m/s}^2$

26) Una compañía de motores modela un nuevo prototipo en forma experimental y determinó que la aceleración de uno de sus modelos está dado por la expresión $a = 1.5t^2 - 0.8t$. El prototipo se encuentra en reposo al iniciar las pruebas con tiempo en cronometro de cero segundos ¿Cuáles son las expresiones que modelan su velocidad y posición en cualquier tiempo t ? ¿Cuál es la posición y velocidad del prototipo transcurridos diez segundos?



Solución:

$$v = t^3 - 0.4t^2, \quad v(10) = 960$$

$$x = 0.25t^4 - 0.13t^3, \quad x(10) = 2370$$

27) Determinar la longitud de las siguientes curvas:

a) $y = 2 + x^{4/3}, \quad 0 \leq x \leq 1$

Solución: $\int_a^b f(x) = 2.428 \, u$

b) $y = \frac{1}{4}x^2 + x^{1/2}, \quad 1 \leq x \leq 4$

Solución: $\int_a^b f(x) = 9.916 \, u$

c) $y = \sqrt{x - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$

Solución: $\int_a^b f(x) = 0.392 \, u$

d) $y = 1 - e^x, \quad -3 \leq x \leq 0$

Solución: $\int_a^b f(x) = -16.086 \, u$

e) $y = \ln(x+3) - x, \quad -2 \leq x \leq 1$

Solución: $\int_a^b f(x) = 4.044 \, u$

28) Un viento continuo arrastra un globo aerostático hacia el oeste. Su altura por encima de la superficie de la tierra desde la posición horizontal $x = 0 \text{ m}$ hasta $x = 100 \text{ m}$ está dada por $y = 80 - \frac{1}{20}(x-16)^2$. Halle la distancia recorrida por el globo aerostático.

Solución: $\int_a^b f(x) = .1946.7 \text{ u}$

29) Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje x.

a) $y = \sqrt{1+3x}$, $0 \leq x \leq 2$

Solución: $\int_a^b f(x) = 8\pi \text{ u}^2$

b) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $-1 \leq x \leq 1$

Solución: $\int_a^b f(x) = 0.498 \text{ u}^2$

c) $y = 1+2x^2$, $1 \leq x \leq 2$

Solución: $\int_a^b f(x) = 35.133\pi \text{ u}^2$

d) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{2}{x}$, $1/2 \leq x \leq 5/2$

Solución: $\int_a^b f(x) = 12.266\pi \text{ u}^2$

30) Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando la región



acotada por las curvas $y = x^3$, $y = 3x$, $x = 0$ y $x = 1$ gira alrededor del eje x en el primer cuadrante.

Solución: $\int_a^b f(x) = 2.857\pi u^2$

31) Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando la región acotada por las curvas $y = \sin x$, $y = (x-2)^2$, $x = 1.5$ y $x = 2.5$ gira alrededor del eje x en el primer cuadrante.

Solución: $\int_a^b f(x) = 0.468\pi u^2$

32) Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando la región acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $x = 0$ y $x = 1$ gira alrededor del eje x en el primer cuadrante.

Solución: $\int_a^b f(x) = 0.167\pi u^2$



A series of horizontal lines for writing, spanning the width of the page.



Bibliografía

Bosch, C. y Guerra, M. (1992). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Publicaciones Culturales.

Caballero, A. et al. (2006). *Iniciación al Cálculo diferencial e integral*. México: Esfinge.

Eslava, M. (2013). *Cálculo integral: Pensamiento matemático avanzado*. México: Patria.

Ibáñez, P. y García, G. (2008). *Matemáticas VI: Cálculo integral*. México: Cengage Learning.

Jiménez, R. (2011). *Matemáticas VI: Cálculo integral*. México: Pearson.

Lehmann, C. H. (2013). *Álgebra*. México: Limusa.

Leithold, L. (1973). *El Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

Ortega, P. y Serra, J.F. (2010). *Problemas de cálculo integral: cuestiones, ejercicios y tratamiento en DERIVE*. Madrid: Pearson Educación.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Swokowski, W. (1987). *Introducción al Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Referencias electrónicas

Instituto Tecnológico de Costa Rica (2017). "Integración por sustitución trigonométrica", *Revista Digital Matemática*. Disponible en: <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/integral_indefinida/html/node13.html> [consultado en septiembre de 2017].

KHAN Academy (2017). "*Desarrollo en fracciones parciales para evaluar la integral*". Disponible en <<https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus/integration-techniques/integrate-partial-fraction-expansion/v/partial-fraction-expansion-to-integrate>> [consultado en septiembre de 2017].

Ríos, J. A. (2009). *Integración por fracciones parciales - Ejercicio 1*. Disponible en <www.youtube.com/watch?v=sIJtWkE-t3w&index=192&list=PLECE5D37F414A8A5> [consultado en septiembre de 2017].

Scherfgen, D. (2017). *Calculadora de Integrales*. Disponible en <www.calculadora-de-integrales.com> [consultado en septiembre de 2017].

Métodos de Integración

<http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/metodos.pdf>

Directorio

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

Doctor en Ciencias Computacionales
José Raymundo Marcial Romero
Secretario de Docencia

Doctora en Ciencias Sociales
Patricia Zarza Delgado
Secretaria de Investigación y Estudios Avanzados

Doctor en Ciencias de la Educación
Marco Aurelio Cienfuegos Terrón
Secretario de Rectoría

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Luja
Secretaria de Difusión Cultural

Doctor en Ciencias del Agua
Francisco Zepeda Mondragón
Secretario de Extensión y Vinculación

Doctor en Educación
Octavio Crisóforo Bernal Ramos
Secretario de Finanzas

Doctora en Ciencias Económico Administrativas
Eréndira Fierro Moreno
Secretaria de Administración

Doctora en Ciencias Administrativas
María Esther Aurora Contreras Lara Vega
Secretaria de Planeación y Desarrollo Institucional

Doctora en Derecho
Luz María Consuelo Jaimes Legorreta
Abogada General

Doctor en Ciencias Sociales
Luis Raúl Ortiz Ramírez
Secretario Técnico de la Rectoría

Licenciada en Comunicación
Ginarely Valencia Alcántara
Directora General de Comunicación Universitaria

Doctor en Ciencias Sociales
Luis Raúl Ortiz Ramírez
**Director de Centros Universitarios y Unidades Académicas Profesionales
Región A y Encargado del Despacho Región B**

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Estudios de Nivel Medio Superior

Planteles dependientes de la Escuela Preparatoria

Doctor en Tecnología e Innovación de la Educación
Arturo Mejía Zamora

Plantel "Lic. Adolfo López Mateos"

Maestro en Ciencias de la Educación
Erick Vieyra Méndez

Plantel "Nezahualcóyotl"

Maestro en Administración Pública y Gobierno
Raúl Juárez Toledo

Plantel "Cuauhtémoc"

Doctora en Ciencias de la Educación
María del Rocío García de León Pastrana

Plantel "Ignacio Ramírez Calzada"

Doctor en Ciencias de la Educación
Alejandro Morales Velázquez

Plantel "Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana"

Maestro en Educación con Orientación en Innovación y Tecnología Educativa
Sergio Luis Roldán Vásquez

Plantel "Texcoco"

Maestro en Docencia
Erick Rodolfo Sánchez Cortés

Plantel "Sor Juana Inés de la Cruz"

Química Farmacéutica Bióloga
Janette Jaimes García

Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel "Dr. Pablo González Casanova"

Doctora en Educación
María del Rosario Sotelo Hurtado

Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel "Isidro Fabela Alfaro"

Licenciada en Comunicación
Ana Vianey Suárez Castro

Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel "Mtro. José Ignacio Pichardo Pagaza"