Universidad Autónoma
del Estado de México

E-BOOK
PENSAMIENTO MATEMÁTICO II
2DO. SEMESTRE

Alicia León Galeana
Vasti Galicia Aldama
Alejandro Ortega Nolasco
Gabriela Patricia González Navarro

ADMINISTRACIÓN UNIVERSITARIA
2021 - 2025

SD



Presentación

En este módulo vamos a revisar la **introducción al álgebra.** Esta disciplina **es una rama de las matemáticas** que hace uso de símbolos y letras para representar números y expresar relaciones entre estos, por ello se puede entender a esta como una generalización de la aritmética. Esto permite resolver problemas de manera más general y abstracta que simplemente con números. En lugar de depender de valores específicos, el álgebra utiliza variables que pueden representar un número desconocido o cualquier número dentro de un conjunto posible.

Se suele empezar aprendiendo sobre cómo manipular expresiones algebraicas, que son combinaciones de números, letras y operaciones matemáticos como la suma, resta, multiplicación y división.

Otro punto que veremos será el de término algebraico y con él las expresiones algebraicas, así como su clasificación según el número de términos como esta expresión sencilla como $x + 3$, se puede clasificar de acuerdo con el número de términos.

Los **temas básicos** del álgebra incluyen:

- Expresiones y las operaciones entre ella: suma, resta, producto, cociente y potencia.
- Simplificar y desarrollar expresiones algebraicas por medio de productos notables o factorización.
- Polinomios: expresiones que incluyen términos con potencias enteras positivas de una o más variables.

El **álgebra** es una herramienta poderosa que se aplica en diversas áreas, desde la resolución de problemas cotidianos hasta en campos científicos y técnicos. Al aprender álgebra, se desarrolla la capacidad de razonar lógicamente, pensar de manera abstracta y formular problemas de manera que puedan ser resueltos con métodos sistemáticos.

En este módulo **vamos a explorar qué es el álgebra,** a través de cinco temas, el primero nos dará las bases, pues veremos qué es una expresión algebraica; en definitiva podremos entender que sus **principales elementos** son las **variables con sus exponentes, las constantes y los operadores.** Las **variables** son las letras como x, y, z, que representan números, las **constantes** son los números fijos como 2, 5, o 10 y los **operadores** son los símbolos matemáticos que usamos, como (+) suma, (-) resta, (×) multiplicación y (÷) división; dentro de estas conoceremos su clasificación y traducción entre lenguaje común y lenguaje algebraico, comprenderemos cómo funciona y por qué es tan importante en nuestras vidas. De igual manera explicaremos las operaciones con expresiones polinomiales, las cuales desarrollaremos utilizando herramientas como términos semejantes y leyes de los exponentes, una vez aprendido lo mencionado, entraremos a productos notables, lo cual nos facilitará desarrollar las operaciones, y que va de la mano de factorización, que también explicaremos en su momento. Aunque a veces puedan parecer un poco complicadas, en realidad son herramientas muy útiles para resolver problemas cotidianos.

Ahora bien, **¿por qué aprender álgebra?**

Lo anterior implica que la velocidad y el tiempo son cantidades o magnitudes inversamente proporcionales, como se muestra en la siguiente tabla:

Velocidad (km/h)	60	72	90	120	180
Tiempo (h)	6	5	4	3	2

Generalizando lo anterior, se puede establecer que:

$$k=\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$$

$$k=a(b)=c(d)$$

O bien:

Ejemplos:

1. Se sabe que 4 personas tardan en pintar una pared de 180 metros cuadrados en 18 horas, ¿cuántas personas se necesitarán para pintar la misma pared en 8 horas?

   Solución:

   Planteamos a manera de proporción:

$$k=\frac{4}{18}=\frac{x}{8}$$

   Se observa que, al querer disminuir las horas de trabajo, se deben incrementar el número de personas, por ello la proporción se reescribe como:

$$k=\frac{4}{x}=\frac{8}{18}$$

$$k=(4)(18)=(8)(x)$$

   Despejar x

$$x=\frac{(4)(18)}{8}=9$$

Se requiere de 9 personas para realizar el trabajo de pintura en 8 horas.

2. En un negocio de frituras se necesitan 8 recipientes de 500 mililitros para colocar 350 gramos de cierta fritura, si se desea colocar la misma cantidad, pero en 20 recipientes ¿de qué capacidad tendrían que ser dichos recipientes?

   Solución:

   Planteamos a manera de proporción:

$$k=\frac{8}{500}=\frac{20}{x}$$

Se observa que, al querer aumentar el número de recipientes, se debe disminuir su capacidad, por ello la proporción se reescribe como:

$$k=\frac{8}{x}=\frac{20}{500}$$

$$k=(8)(500)=(20)(x)$$

Despejar x

$$x=\frac{(8)(500)}{20}=200$$

Se requieren de 20 recipientes de 200 mililitros.

3. Tres amigos quieren hacer un regalo a su profesor, por lo que cada uno tendría que aportar $592.00, al momento de hacer la compra resulta que se unen otros cinco compañeros, ¿cuál es el monto que aportará cada uno?

   Solución:

   Planteamos a manera de proporción:

$$k=\frac{3}{592}=\frac{8}{x}$$

Se observa que, al querer aumentar el número de recipientes, se debe disminuir su capacidad, por ello la proporción se reescribe como:

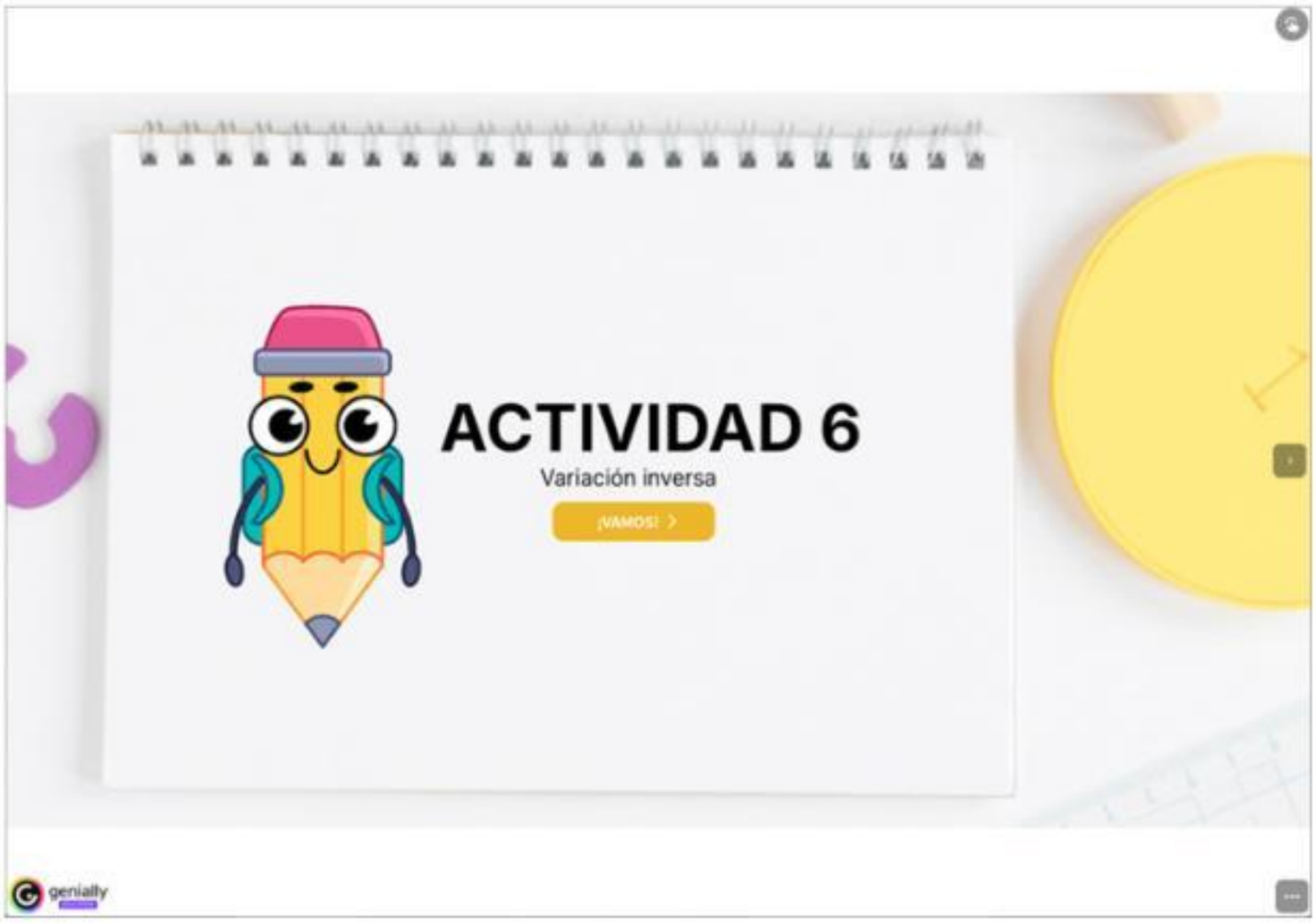
$$k=\frac{3}{x}=\frac{8}{592}$$

$$\mathrm{k}=(3)(592)=(8)(x)$$

Despejar a x

$$x=\frac{(3)(592)}{8}=\frac{1776}{8}=222$$

El monto que aportará cada compañero es de $222.00



Actividad 6.

Variación inversa

Instrucciones: aplicando el procedimiento para determinar la variación inversa, realiza la actividad, solo da clic en el enlace para comenzar.

3.2.3 Compuestas

Las proporciones o variaciones en las que intervienen más de dos magnitudes o cantidades ligadas entre sí, por variaciones directas o inversas, se denominan variaciones compuestas.

El procedimiento general para seguir es el que se menciona:

a. Leer de forma comprensiva.
b. Identificar las cantidades o magnitudes o variables que intervienen.
c. Realizar el vaciado de información en una tabla en la que la variable a determinar quede al centro:

Variable o magnitud 1	Variable o magnitud 2 Contiene la variable a determinar	Variable o magnitud 3
Valor 1	Valor 1	Valor 1
Valor 2	Valor 2	Valor 2

d. Identificar comparando dos a dos el tipo de variación que se presenta.
e. Aplicar multiplicaciones o divisiones que se indican.
f. Despejar la variable a determinar y
g. Dar una conclusión.

Para ello, se analizarán los siguientes casos, los cuales se resuelven con el procedimiento descrito anteriormente:

1). Compuesta directa – directa: implica que todas las variables cambian directamente proporcional.

Ejemplo:

Dos alumnos redactan 50 cuartillas para un ensayo en 5 horas, ¿cuántas cuartillas redactarán 6 alumnos en 8 horas?

Solución:

Identificar las magnitudes y sus valores para cada caso:

Alumnos	Cuartillas	Tiempo h
2	50	5
6	x	8

Verificar la relación entre cada magnitud y la que tiene a la variable a determinar:

Se observa que alumnos – cuartillas son directas porque ambas crecen.

Se observa que cuartillas – tiempo son directas porque ambas crecen, entonces:

La relación es: $(6)(50)(8)=(2)(x)(5)$

Despejar a x

$$x=\frac{(6)(50)(8)}{(2)(5)}=\frac{2\,400}{10}=240$$

Conclusión: 6 alumnos redactarán 240 cuartillas en 8 horas.

2) Compuesta inversa – inversa: implica que todas las variables cambian de manera inversamente proporcional.

Ejemplo:

Una persona contrata a un desarrollador Web para hacer un proyecto de desarrollo de un sistema automatizado, el desarrollador le dice que se requieren 183 días para hacerlo, para lo cual requiere de 16 personas que trabajen durante 10 horas diarias, pero el patrón le dice que tiene un presupuesto limitado por el tiempo, por lo que requiere contratar solamente 8 personas que trabajen 6 horas diarias, ¿cuánto tiempo tardarán en realizar dicho proyecto?

Solución:

Identificar las magnitudes o variables y sus valores para cada caso:

Personas	Días	Tiempo horas
16	183	10
8	x	6

Verificar la relación entre cada magnitud y la que tiene a la variable a determinar:

Se observa que personas – días son inversas porque mientras el número de personas decrementan los días aumentan.

Se observa que días – tiempo son inversas porque mientras las horas en tiempo decrementan, los días aumentan, entonces:

La relación es: $(16)(183)(10)=(8)(x)(6)$

Despejar x: $x=\frac{(16)(183)(10)}{(8)(6)}=\frac{29,280}{48}=610$

Conclusión: se requieren 610 días con el trabajo de 8 personas durante 6 horas diarias.

3) Compuesta directa – inversa (mixta): mientras un par de variables aumenta o disminuye el otro par disminuye o aumente respectivamente.

Ejemplo:

Se sabe que, en un hotel, tres mangueras abiertas durante una hora y media llenan una piscina de 5 000 litros de agua, ¿cuánto tiempo se necesita para llenar una piscina con capacidad de 65 000 litros con 2 mangueras?

Solución:

Identificar las magnitudes o variables y sus valores para cada caso:

Mangueras	Tiempo (horas)	Litros
3	1.5	5 000
2	x	65 000

Verificar la relación entre cada magnitud y la que tiene a la variable a determinar:

Se observa que mangueras – tiempo son inversas porque mientras el número de mangueras disminuyen, el tiempo aumenta,

Se observa que tiempo – litros son directas porque mientras los litros aumentan, las horas aumentan, entonces:

La relación es: $(3)(1.5)(65\ 000)=(2)(x)(5\ 000)$

Despejar x: $x=\frac{(3)(1.5)(65,000)}{(2)(5,000)}=\frac{292,500}{10,000}=29.25$

Conclusión: para llenar una piscina de 65 000 litros con dos mangueras abiertas se requieren de 29.25 horas ya que la capacidad de la piscina es mayor.





Actividad 7.

Variación compuesta

Instrucciones: aplicando el procedimiento para determinar la variación inversa, realiza la actividad, solo da clic en el enlace para comenzar.

3.3 Interés simple y compuesto

De acuerdo con Rodríguez Franco, Rodríguez Jiménez & Pierdant Rodríguez (2014), **interés** es el pago por el uso del dinero ajeno que se hace durante un periodo determinado y se representa por la letra I.

Capital: valor presente del monto *M* o la ganancia, se denota por *C*.

Monto: denominado también cantidad o valor futuro del capital *C* o bien, valor acumulado del capital *C* o valor pagadero del capital *C*.

El **interés** se denomina **simple** cuando la tasa de interés simple aplica desde la fecha de inicio hasta la fecha final, esto quiere decir que los intereses se pagan al final del periodo y se calcula sobre el capital inicial, el cual permanece invariable durante todo el tiempo, mediante la fórmula:

$$I = iCt$$

Donde:

I: Interés

i: Tasa de interés

C: capital inicial

t: tiempo

Asimismo, para calcular el monto o capital final, denotado por *M* se hará mediante:

$$M = C + I$$

$$M = C + iCt = C(1 + it)$$

Para calcular el interés, dependiendo del tiempo en que se deposita el capital que puede ser en días o meses o años, las fórmulas son:

Tiempo		
Días	Meses	Año
$I = \frac{iCt}{360\,(100)}$	$I = \frac{iCt}{12\,(100)}$	$I = \frac{iCt}{1(100)}$

Las fórmulas anteriormente descritas son despejables.

Ejemplo:

1. Determinar el interés que genera un capital de $25 000.00 y el monto si su tasa de interés es de 40% anual en 4 años.

Solución:

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
I = ¿? C = $25 000.00 t = 4 i = 40% M = ¿?	$I = \frac{iCt}{(100)}$ $M = C+I$	$I = \frac{(40)(25\,000)(4)}{100}$ $M = 25\,000+40\,000$	$I = 40\,000$ $M = 65\,000$

2. ¿Qué intereses se deben pagar por la adquisición de un coche con un valor de $475 000 que será pagado con una tasa de interés de 32% bimestral en 3 años?

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
I = ¿? C = $475 000.00 t = 3 i = 32%	$I = \frac{iCt}{100(6)}$ *Ya que un año tiene 6 bimestres*	$I = \frac{(32)(475{,}000)(3)}{600}$	$I = 76\,000$

3. Determinar el tiempo que debe transcurrir para que una inversión de $70 000.00 produzca un interés de $14 000.00 a una tasa de interés simple de 8% anual

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
I = $28 000.00 C = $70 000.00 t = ¿? i = 8%	$I = \frac{iCt}{(100)}$ Despejando: $t = \frac{(100)(I)}{(i)(C)}$	$t = \frac{(100)(28\,000)}{(8)(70\,000)}$	t =5 años

4. Javier pide a su amigo Luis un préstamo por $1,000.00 Luis le indica que su interés tendrá una tasa del 28% anual y que, además debe cubrir el pago en 90 días ¿Cuál será el interés que Luis pagará al final el periodo de tiempo establecido?

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
I = ¿? C = $1,000.00 t = 90 días i = 28% anual	$I = \frac{iCt}{36000}$	$I = \frac{(28)(1000)(90)}{36000}$	$I = \$70$

5. El gobierno de cierto país establece un programa de apoyo a familias de escasos recursos las cuales pueden solicitar préstamos con una tasa de interés del 18% anual que, además tiene la posibilidad de pagar cada 5 meses, si la familia Lira solicita un préstamo por $15,000.00 ¿cuánto pagará en ese periodo?

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
I = ¿? C = $15,000.00 t = 5 meses i = 18% anual	$I = \frac{iCt}{1200}$	$I = \frac{(18)(15000)(5)}{1200}$	$I = \$1,125$



Actividad 8.



Interés simple

Instrucciones: aplicando el procedimiento para determinar lo que se indica respecto al tema de interés simple, realiza la actividad, solo da clic en el enlace para comenzar.

Por otro lado, el interés compuesto al igual que el interés simple, depende de la tasa de interés, el capital y el tiempo; se entiende como el interés obtenido en cada unidad de tiempo cuando este se capitaliza, es decir, pasa a formar parte del capital, el cual se determina mediante la fórmula siguiente:

$$M = C(1+i)^t$$

Donde:

M: Monto
C: Capital inicial
i: tasa de interés
t: tiempo

Nota: Tanto la tasa de interés como el tiempo deben estar en las mismas unidades.

Ejemplos:

1. Determinar el monto que se obtiene al ahorrar $20 000.00 durante 1 año con 4 meses si la tasa de interés es de 12% anual capitalizable bimestralmente.

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
M = ¿? C = $20 000.00 t = 1 año 4 meses 8 bimestres i = 12% =0.12 Nota: El 0.12 se tiene que dividir entre 6 ya que el problema habla de bimestres y un año tiene 6 bimestres	$i = \frac{0.12}{6} = 0.02$ $M = C(1+i)^t$	$M = 20\,000\,(1+0.02)^8$	$M = 23\,433.19$

2. ¿Cuál es la cantidad para invertir si se paga una tasa de interés anual capitalizable semestralmente de 28% para que en un plazo de 5.5 años se obtengan $600 000.00?

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
M = $600 000.00 C = ¿? t = 5.5 años 11 semestres i = 28% = 0.28 Nota: El 0.28 se tiene que dividir entre 2 ya que el problema habla de semestres y un año tiene 2 semestres	$i = \frac{0.28}{2} = 0.14$ $M = C(1+i)^t$ $C = \frac{M}{(1+i)^t}$	$C = \frac{600\,000.00}{(1+0.14)^{11}}$	$C = \frac{600\,000}{4.2262}$ $C = 141{,}970.4$

Para resolver problemas de interés compuesto donde la incógnita sea el tiempo, se utilizarán los logaritmos, los cuales se definen a continuación junto con sus propiedades:

El logaritmo base b es el exponente al que se debe elevar la base b para obtener un número x. Se puede expresar como $log_a\ x = b$, donde a es un valor positivo y distinto de 1.

Propiedades:

Para todo $x\ y\ y \in R^+$ y $c \in R$:

1. $log_a(xy) = log_a x + log_a y$
2. $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$
3. $log_a(x^n) = n log_a x$

3. ¿Durante cuánto tiempo se deben invertir $75 000? a una tasa de interés de 20% anual capitalizable trimestralmente para hacer crecer la inversión hasta $135 000.00?

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
$M = \$135\,000.00$ $C = \$75\,000.00$ $t = ¿?$ $i = 20\% = 0.20$ Nota: El 0.20 se tiene que dividir entre 4 ya que el problema habla de trimestres y un año tiene 4 trimestres	$i = \frac{0.20}{4} = 0.05$ $M = C(1+i)^t$	$135\,000 = 75\,000(1+0.05)^t$ $\frac{135\,000}{75\,0000} = (1.05)^t$ $1.8 = (1.05)^t$ Aplicando logaritmos en ambos lados de la igualdad: $\log 1.8 = \log(1.05)^t$ $t \log(1.05) = \log(1.8)$ $t = \frac{\log 1.8}{\log 1.05}$	$t = \frac{0.2553}{0.02119}$ $t = 12$

El **álgebra** no solo se usa en matemáticas, sino que tiene muchas aplicaciones prácticas en nuestra vida diaria. Imaginemos que queremos calcular cuánto nos costará comprar varias unidades de un producto. Si cada producto cuesta x pesos y queremos comprar 5, podemos usar la expresión 5x para encontrar el costo total.

En el campo de la ciencia y la tecnología es esencial. Se utiliza para analizar datos, crear modelos, y resolver problemas. Por ejemplo, en física usamos ecuaciones algebraicas para calcular velocidad, aceleración y fuerza.

Antes de comenzar con la explicación del contenido temático, nos interesa saber sobre tus conocimientos matemáticos; te pedimos realizar la siguiente actividad.

Actividad 1.



Evaluación Diagnóstica

Instrucciones: antes de iniciar con la revisión de los contenidos del módulo I, te invitamos a responder a la evaluación diagnóstica.

Esto te ayudará a descubrir los conocimientos previos que tienes sobre los temas a abordar y, al mismo tiempo, le permitirá a tu docente conocer tus fortalezas y debilidades.

Para comenzar con el ejercicio, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada: M1 Evaluación Diagnóstica.

1. ¿Durante cuánto tiempo el Sr. Ramos deberá invertir $70 000? a una tasa de interés de 12% anual capitalizable semestralmente para hacer crecer su inversión hasta $125 360.00?

2. ¿Cuánto se debe invertir a una tasa de 15% anual capitalizable trimestralmente para que en un plazo de tres años con tres meses se obtengan $42 400.00?

3. Si una persona invierte $150 000.00 a una tasa de interés compuesto de 17% anual ¿Cuánto recibirá por esta inversión al cabo de 5 años?

4. ¿A qué tasa de interés anual convertible semestralmente se necesita colocar $400 000 para que al cabo de 6.5 años se obtengan $750 000.00?

Actividad 9.



Interés compuesto

Instrucciones: aplicando el procedimiento para determinar lo que se indica respecto al tema de interés compuesto, copia en tu cuaderno los ejercicios y ejecuta el procedimiento correcto para su evaluación.

3.4 Figuras geométricas

Una **figura geométrica** se define como la fracción de un plano acotada por una serie de lados unidos por sus extremos, también conocido como polígono.

Las figuras geométricas se clasifican en regulares e irregulares.

Figura 6. Figuras geométricas en la vida



Nota. Fuente: González N., G. P. (2024). Elaboración propia con Open AI. ChatGPT [Figuras geométricas]. https://files.oaiusercontent.com/file-949oMenp3JzbYetVx7l8rju-t?se=2024-10-22T23%3A01%3A26Z&sp=r&sv=2024-08-04&sr=b&rscc=-max-age%3D604800%2C%20immutable%2C%20private&rscd=attach-ment%3B%20filename%3D474d2d66-d7db-4a95-95a1-b51da906f893.webp&sig=29G4l5klf66QO4VUF9t41hs8z4QLmsh1CRDF0dXgjG0%3D

3.4.1 Definición y elementos básicos (punto, recta, plano, espacio y ángulo)

El punto: ente fundamental de la geometría.

La recta: línea formada por un conjunto de puntos que son continuos y van en una sola dirección, esta no tiene ángulos ni curvas.

El plano: superficie geométrica que puede solo posee una dimensión (unidimensional), dos (bidimensional) o tres (tridimensional) dimensiones, y contiene infinitos puntos y rectas.

El plano cartesiano: es un sistema de coordenadas rectangulares que está constituido por dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto O al que se le llama el origen. Una de las rectas se acostumbra a representarla en posición horizontal y se le da el nombre de eje x o eje de las abscisas; a la otra recta, vertical, se le denomina eje y o eje de las ordenadas, constituyendo así los dos ejes de coordenadas rectangulares, los cuales dividen al plano en

cuatro partes llamadas cuadrantes y estos están enumerados del I al IV en sentido contrario a las manecillas del reloj y los cuales dependiendo del cuadrante pueden ser positivo o negativo según la abscisa y ordenada.

El espacio: se refiere al área o volumen que la figura ocupa, es decir, si está en un plano bidimensional o tridimensional.

Los ángulos: parte del plano determinada por dos semirrectas llamadas lados que tienen el mismo punto de origen llamado vértice del ángulo.

Los segmentos: fragmento de recta que está comprendido entre dos puntos, llamados puntos extremos

Los lados: cada uno de los segmentos de la línea poligonal.

Los vértices: puntos de intersección entre cada dos segmentos o lados consecutivos.

Las diagonales, o cada uno de los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

3.4.2 Áreas y perímetros de figuras regulares e irregulares

Las figuras geométricas pueden clasificarse de diferentes maneras, una muy común es de acuerdo con la medida de sus lados, pueden ser regulares e irregulares.

Las figuras geométricas regulares son aquellas que tienen todos sus lados y ángulos internos con la misma medida. Las figuras geométricas irregulares son los que no cumplen esas dos condiciones.

Los elementos principales de un polígono son:

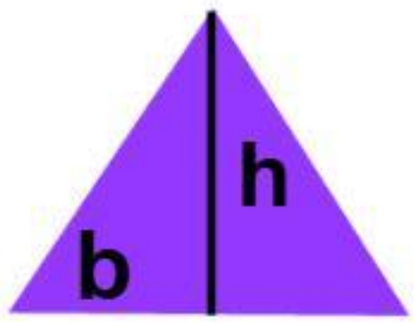
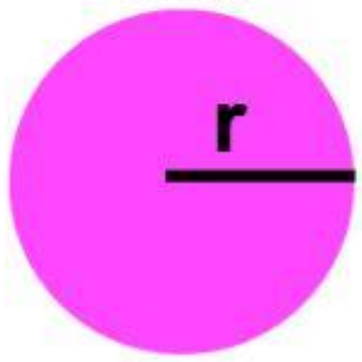
- Los lados: cada uno de los segmentos de la línea poligonal.
- Los vértices: puntos de intersección entre cada dos lados consecutivos.
- Los ángulos interiores: determinados por cada dos lados consecutivos; y los ángulos exteriores: definidos como los suplementarios de los interiores.
- Las diagonales son cada uno de los segmentos que une dos vértices no consecutivos.

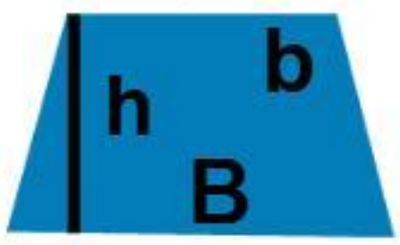
Figura 8. Regulares e irregulares



Nota. Fuente: González N., G. P. (2024). Elaboración propia. [Regulares e irregulares].

A continuación, se muestra una tabla con las fórmulas de áreas y perímetros de figuras:

Nombre/Figura	Fórmula		Explicación
	Área	Perímetro	
Cuadrado 	$A = LL$	$P = 4L$ $P = L+L+L+L$	L: lado del cuadrado
Rectángulo 	$A=bh$	$P = 2b + 2h$ $P= b+b+h+h$	b: base h: altura
Triángulo 	$A = \frac{bh}{2}$	$P = L+L+L$	b: base h: altura
Círculo 	$A = \pi r^2$	$P= 2\pi r$	r: radio del círculo
Pentágono regular 	$A = \frac{Pa}{2}$	$P = 5L$	P: perímetro a: apotema
Hexágono regular 	$A = \frac{(B+b)h}{2}$	$P = 6L$	P: perímetro a apotema

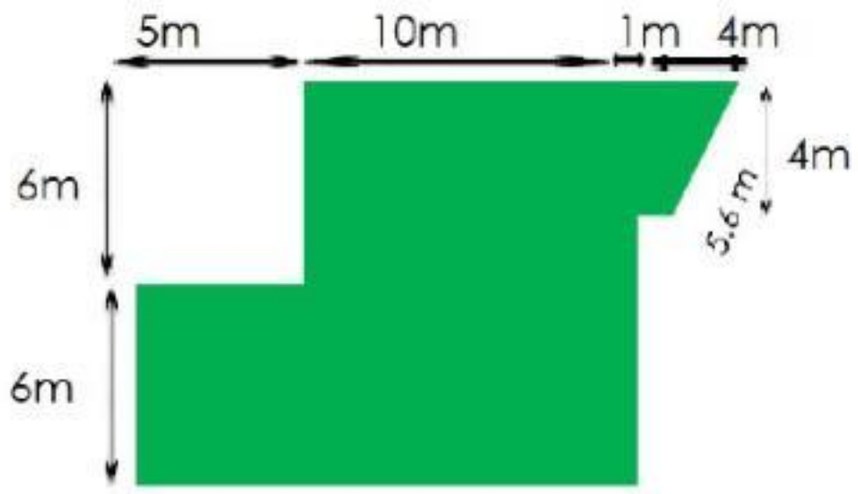
Trapecio 		$P = B + b + 2L$	B: base mayor, b: base menor h:altura
Figura irregular 	Descomponer en figuras más sencillas para calcular el área total		

Nota. Fuente: González N., G. P. (2024). Elaboración propia. [Fórmulas de áreas y perímetros].

Revisemos un ejercicio

Instrucciones: con base en el contenido anterior resuelve las siguientes situaciones:

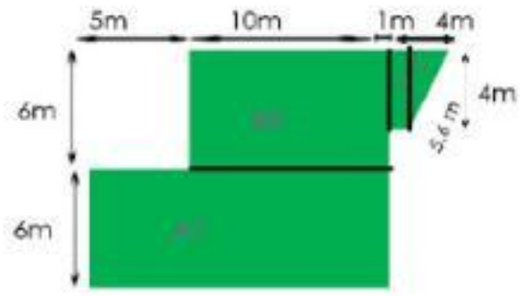
1. Claudio desea impermeabilizar toda la azotea de su casa para evitar se meta el agua de lluvia, si su casa tiene la siguiente forma en el techo, ¿cuál es el área que necesita impermeabilizar?



Solución:

1. Identificar de cuántas figuras se compone y hacer la separación.

Se divide en las 4 figuras, 3 rectángulos y un triángulo



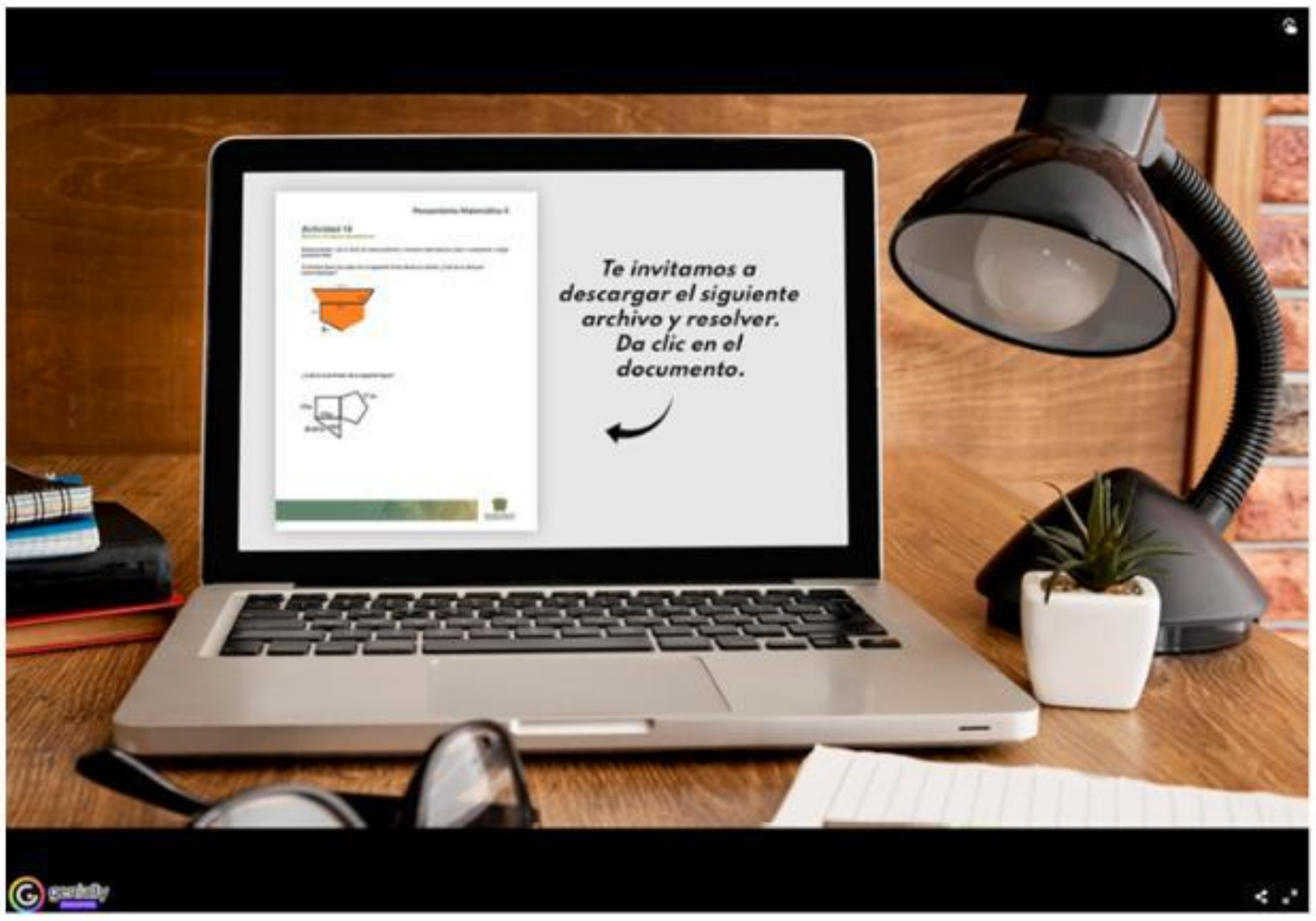
2. Obtener el área de esas figuras.

$A1 = bh = (15\ \text{m})(6\ \text{m}) = 90\ \text{m}^2$
$A2 = bh = (10\ \text{m})(6\ \text{m}) = 60\text{m}^2$
$A3 = bh = (1\text{m})(4\ \text{m}) = 4\ \text{m}^2$
$A4 = bh = \frac{(4\text{m})(4\text{m})}{2} = 8m^2$

3. Hacer la suma de cada área. $Área\_total = A^1 + A^2 + A^3 + A4$
$Área\_total = 90\,m^2 + 60\,m^2 + 4\,m^2 + 8\,m^2$

4. Obtener el resultado final. $Área\ total = 162\,m^2$

5. Responder la pregunta del problema. Necesitará impermeabilizar $162\,m^2$



Actividad 10.



Ejercicio de figuras geométricas

Instrucciones: para ejercitar lo antes visto se te pide entrar al siguiente enlace, descarga el archivo y sigue las indicaciones.

3.4.3 Nociones básicas

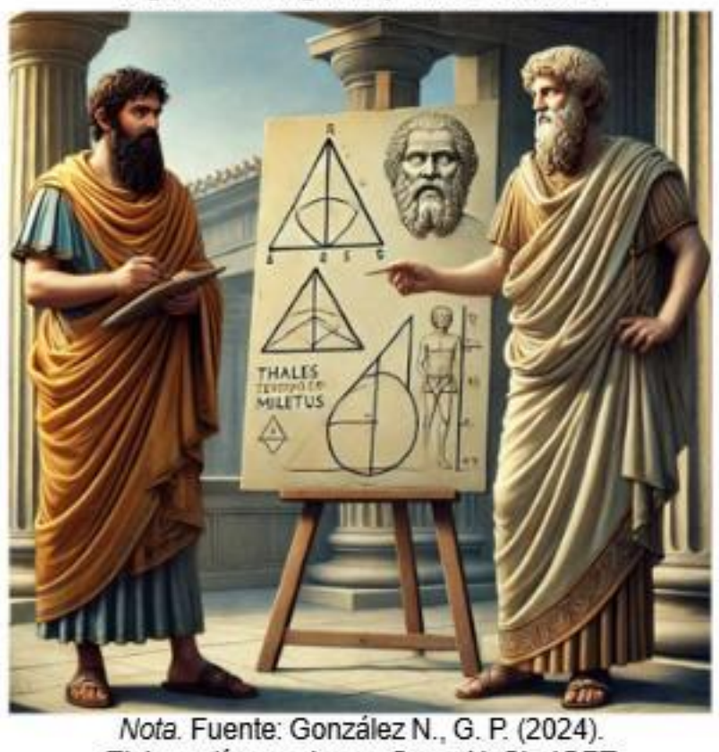
3.4.3.1 Teorema de Pitágoras

Pitágoras de Samos fue un filósofo y matemático griego que vivió aproximadamente en el año 600 antes de Cristo. Viajó por muchos lugares del Mediterráneo y alrededores, como Egipto, Italia, Babilonia y Fenicia; asimismo, a lo largo de su vida fundó varias escuelas de pensamiento pitagórico que influyeron de manera significativa en cuestiones sociales, espirituales y políticas. Él y su escuela sostenían ya el postulado de que la Tierra era redonda y basaban su filosofía en los números y su esencia.

Uno de sus principales discípulos fue Tales de Mileto, quien con un pensamiento filosófico relevante realizó importantes aportaciones en las áreas de la geometría y astrología.

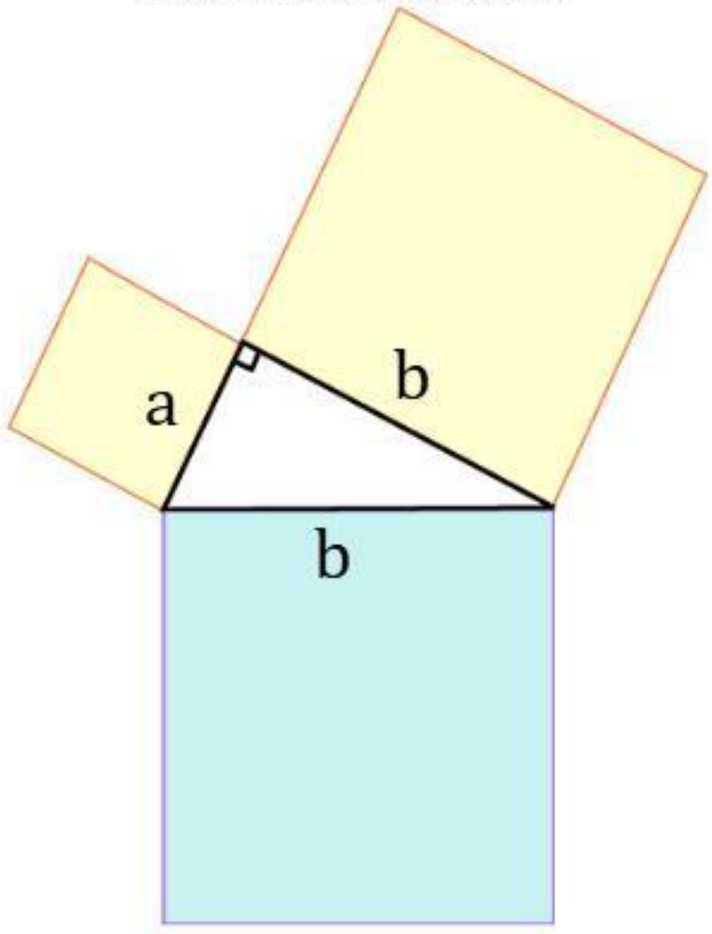
Si bien, la vida de estos dos personajes la conocemos por mezclas de historias y leyendas, lo que nos interesa en mayor parte son las aplicaciones reales y contemporáneas de su trabajo en nuestro entorno.

Figura 8. Pitágoras y Tales de Mileto



Nota. Fuente: González N., G. P. (2024). Elaboración propia con Open AI. ChatGPT [Pitágoras y Tales de Mileto]. https://files.oaiusercontent.com/file-NdVMINDpvJVZ6lOnJfBqEet4?se=2024-10-19T23%3A49%3A44Z&sp=r&sv=2024-08-04&sr=b&rscc=max-age%3D604800%2C%20immutable%2C%20private&rscd=attachment%3B%20filename%3D0cf05953-0b8d-40d3-b2c6-6d259b3b9b1a.webp&sig=kmh9GWp5Ht3hNx/0cKV/IwwJOhhJUZRclafySnQ7uBM%3D

Figura 9. Teorema de Pitágoras



Nota. Fuente: González N., G. P. Elaboración propia [Teorema de Pitágoras]

El Teorema de Pitágoras es un principio fundamental en geometría que establece una relación entre los lados de un triángulo rectángulo.

Este teorema es uno de los pilares de los conocimientos en arquitectura e ingeniería.

También es utilizado en una diversa cantidad de disciplinas y haciendo posible muchas de las actividades que realizamos de manera cotidiana.

El Teorema de Pitágoras establece que: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

En lenguaje algebraico se escribe como:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde:

a y b representan los catetos del triángulo rectángulo y c a la hipotenusa

Aquí encontrarás la explicación de cómo resolver ejercicios del Teorema de Pitágoras. Si a cada lado del triángulo rectángulo representamos como uno de los lados de un cuadrado, el Teorema de Pitágoras nos dice que: el área de un cuadrado de lado c es igual a la suma de los cuadrados de los lados a y b.

En todo triángulo rectángulo ABC, se cumple el Teorema de Pitágoras: $a^2+b^2=c^2$

1. Se tiene un triángulo rectángulo con catetos $a = 3$ cm y $b = 4$ cm

2. Se tiene un triángulo rectángulo con hipotenusa $c = 127$ m y cateto $a = 56$m

3. Se tiene un triángulo rectángulo con hipotenusa $c = 286$ m y cateto $b = 147$m

Actividad 11.

Teorema de Pitágoras.

Instrucciones: lee con atención los siguientes problemas, dibuja el triángulo y resuelve en tu cuaderno el dato faltante.

3.4.3.2 Criterios de congruencia y semejanza de triángulos

Dos triángulos son congruentes si sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales. Los siguientes triángulos son congruentes. El símbolo de congruencia es: ≅.

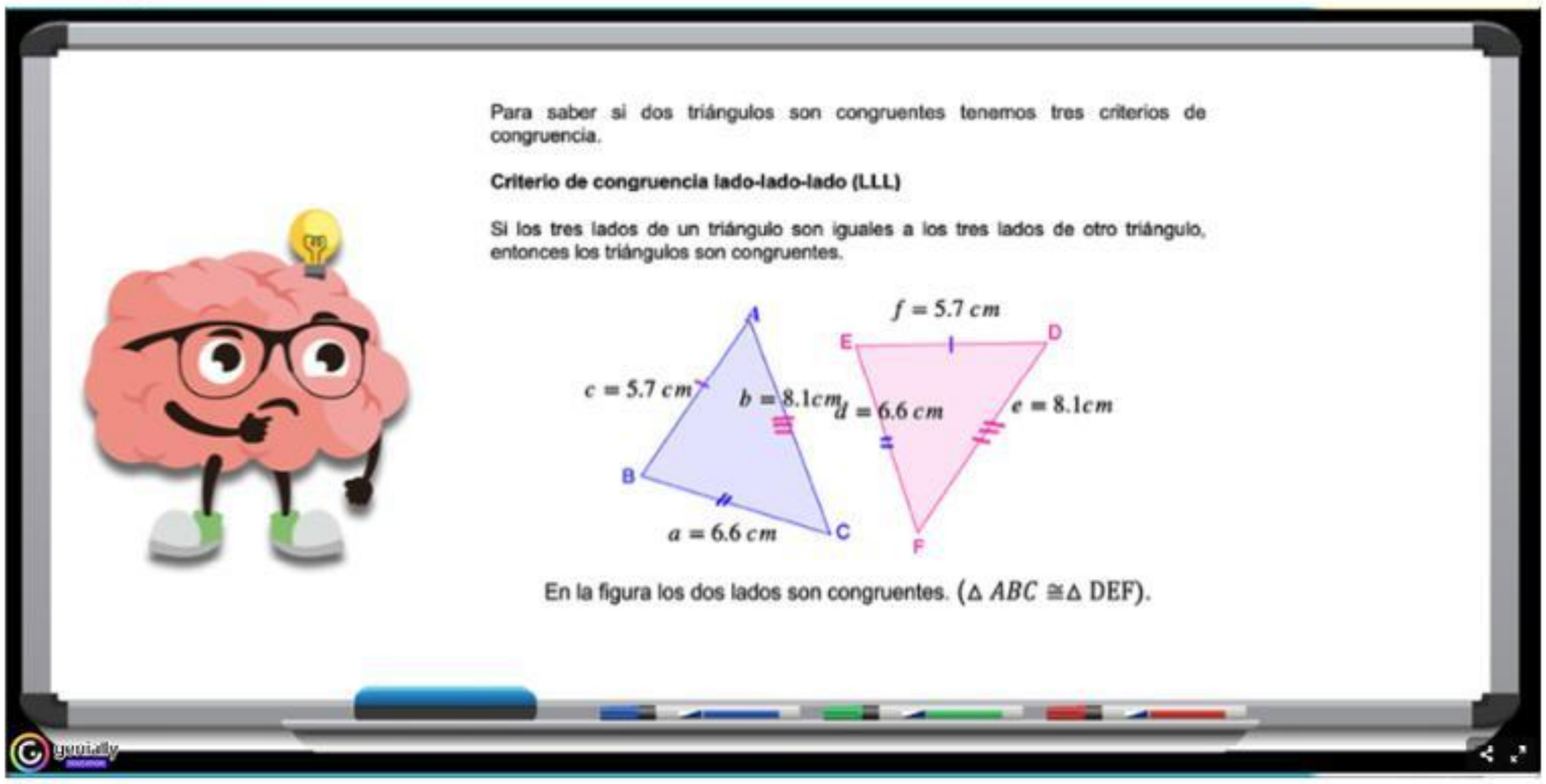


En la figura los tres triángulos son semejantes. ($\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle GHI$).

Para saber si dos triángulos son congruentes tenemos tres criterios de congruencia.

Criterio de congruencia lado-lado-lado (LLL)

Si los tres lados de un triángulo son iguales a los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

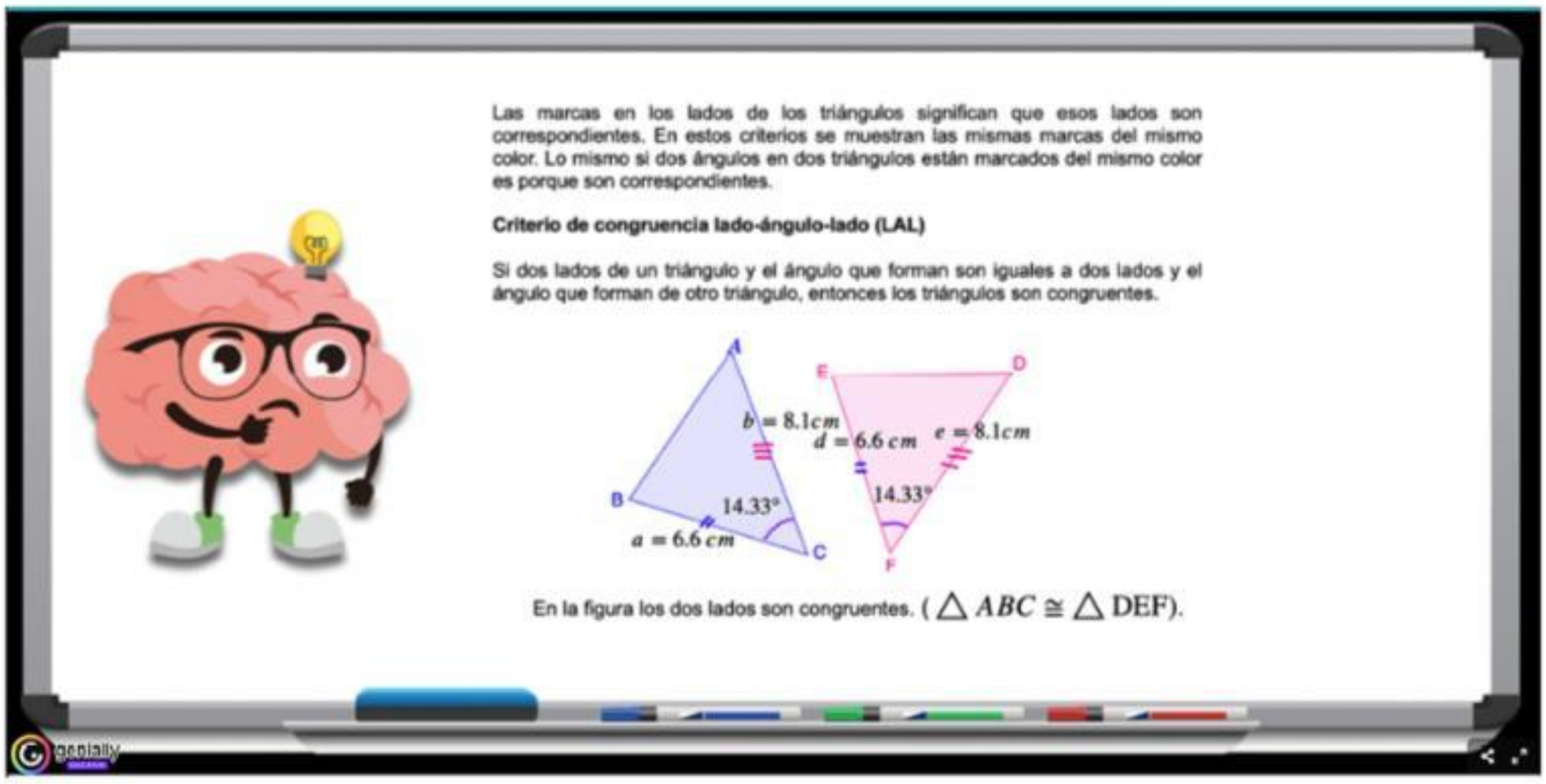


En la figura los dos lados son congruentes. (△ABC≅△DEF).

Las marcas en los lados de los triángulos significan que esos lados son correspondientes. En estos criterios se muestran las mismas marcas del mismo color. Lo mismo si dos ángulos en dos triángulos están marcados del mismo color es porque son correspondientes.

Criterio de congruencia lado-ángulo-lado (LAL)

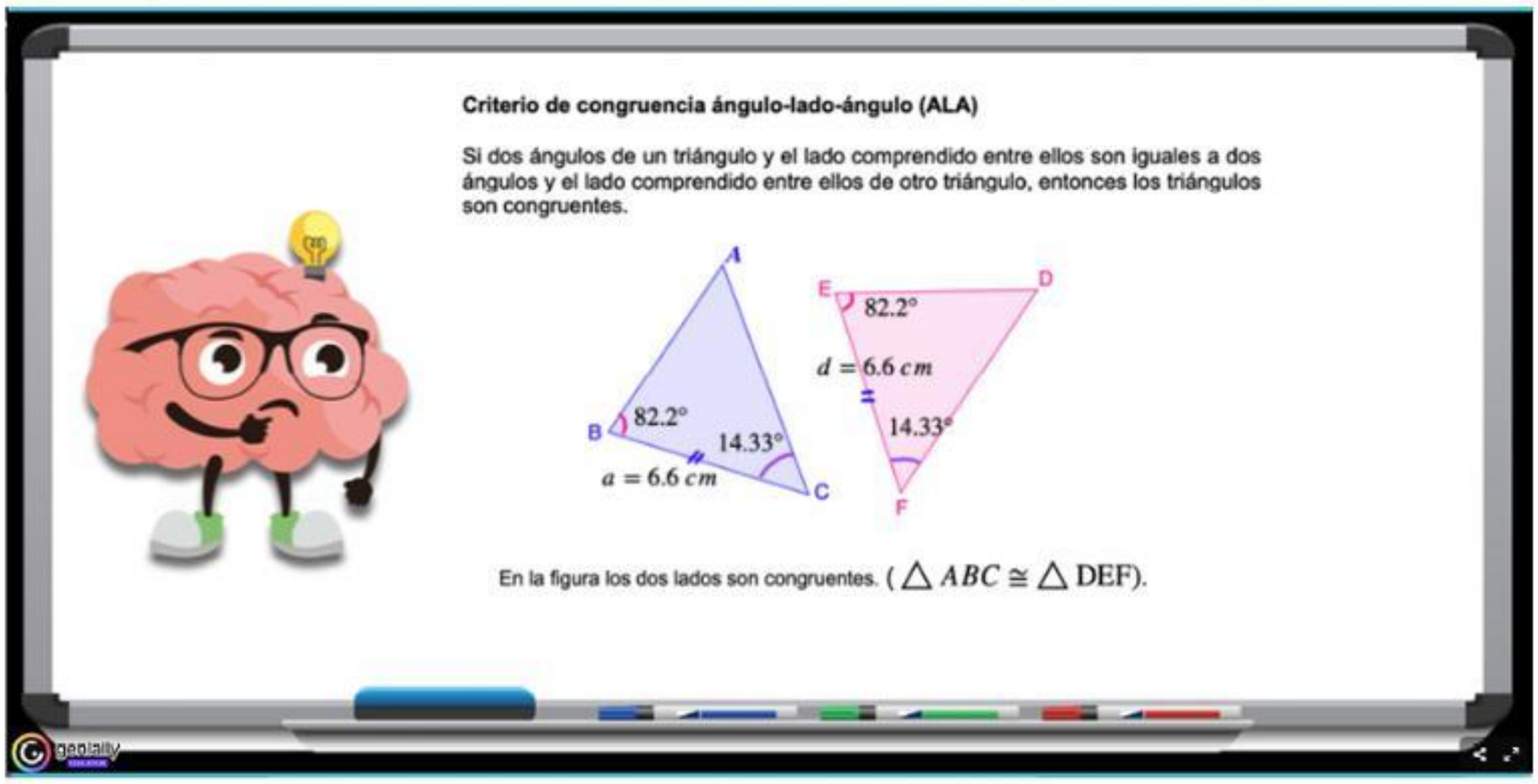
Si dos lados de un triángulo y el ángulo que forman son iguales a dos lados y el ángulo que forman de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



En la figura los dos lados son congruentes. (△ABC≅△DEF).

Criterio de congruencia ángulo-lado-ángulo (ALA)

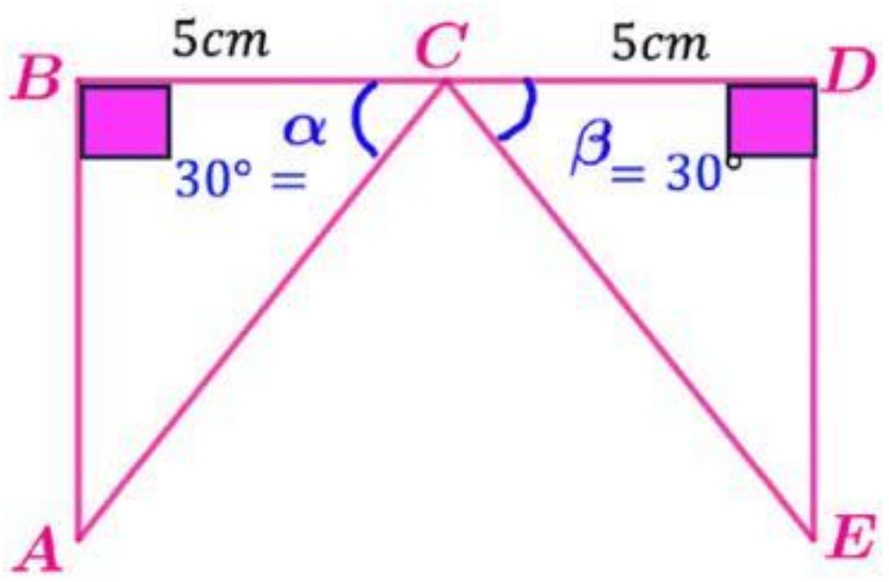
Si dos ángulos de un triángulo y el lado comprendido entre ellos son iguales a dos ángulos y el lado comprendido entre ellos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



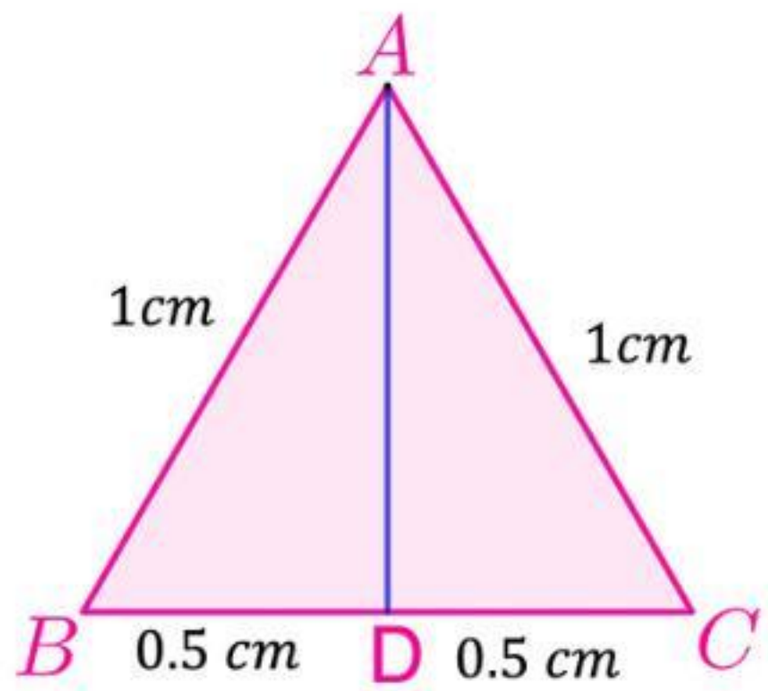
En la figura los dos lados son congruentes. (△ABC≅△DEF).

Ejemplo

1. En la siguiente figura, C es el punto medio del segmento BD y los ángulos α y β son iguales. Se observa que los triángulos ABC y EDC son congruentes porque los segmentos BC y CD son iguales, los ángulos B y D miden 90° porque así lo describe la imagen. Finalmente, los ángulos α y β son iguales. Por el criterio ángulo lado ángulo (ALA) los triángulos ABC y EDC son congruentes. $\triangle ABC \cong \triangle EDC$.



2. En la siguiente figura el triángulo ABC es un triángulo equilátero. D es el punto medio de BC. Demuestra que los triángulos ABD y ACD son congruentes.



Como D es el punto medio de BC entonces los segmentos $BD = 0.5 = DC$. Además $AB = AC = 1$ cm y el lado AD es común a los dos triángulos.

Por el criterio lado-lado-lado los triángulos ABD y ACD son congruentes. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.



Actividad 12.

Congruencia de triángulos

Instrucciones: copia en tu cuaderno cada uno de los problemas que se plantean y resuelve lo que se pide haciendo uso de los criterios de congruencia.

1.1 Término y expresión algebraica

Como se mencionó con anterioridad, el **álgebra** es un lenguaje que nos permite expresar problemas de manera general, en lugar de usar solo números específicos, podemos utilizar letras que representan cualquier valor posible. **Un término** es la mínima expresión algebraica, la cual se compone de cuatro elementos:

- **Un signo,** el cual puede ser positivo o negativo.
- **Coeficiente numérico,** que es un número racional.
- Una **parte literal** o también conocida como **variable** o **incógnita,** la cual puede ser cualquier letra del alfabeto.
- Y el **exponente de la parte literal,** el cual es cualquier número real.

Es decir…

Figura 2. Elementos de un término algebraico



Nota. Fuente: González, N.G. (2024). Elaboración propia.
[Elementos de un término algebraico]

Una **expresión algebraica** es la unión de términos algebraicos separados por algún operador como la (+) suma y/o (−) resta.

Ejemplo:

$$5x^3 + \frac{2x^2}{4} - 6x + 3$$

1.1.1 Términos semejantes

Los **términos semejantes** son aquellos que tienen las mismas variables con el mismo exponente; es importante identificar estos para las operaciones de suma y resta.

Veamos un ejemplo, ¿cómo podrías usar coeficientes para escribir la siguiente expresión?

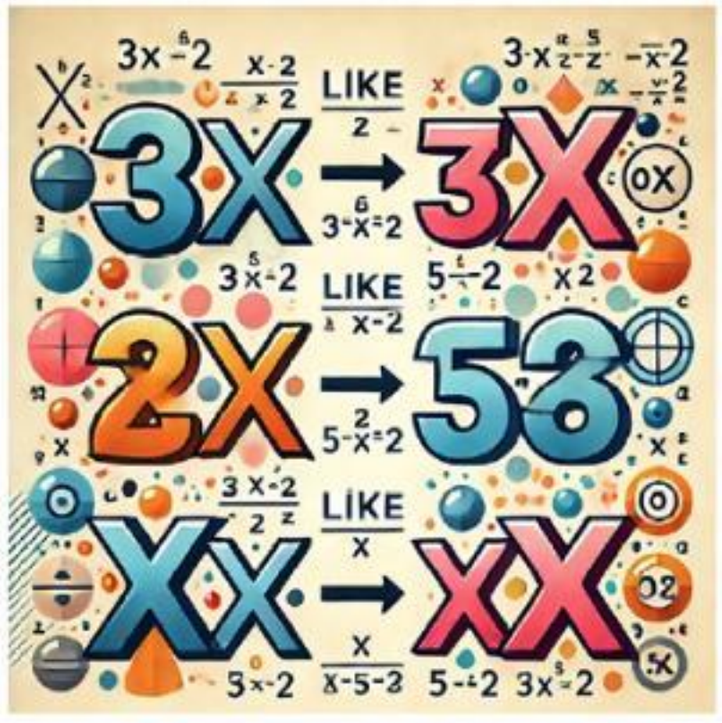
x + x + x + x + y + y + y

Figura 1. Término algebraico



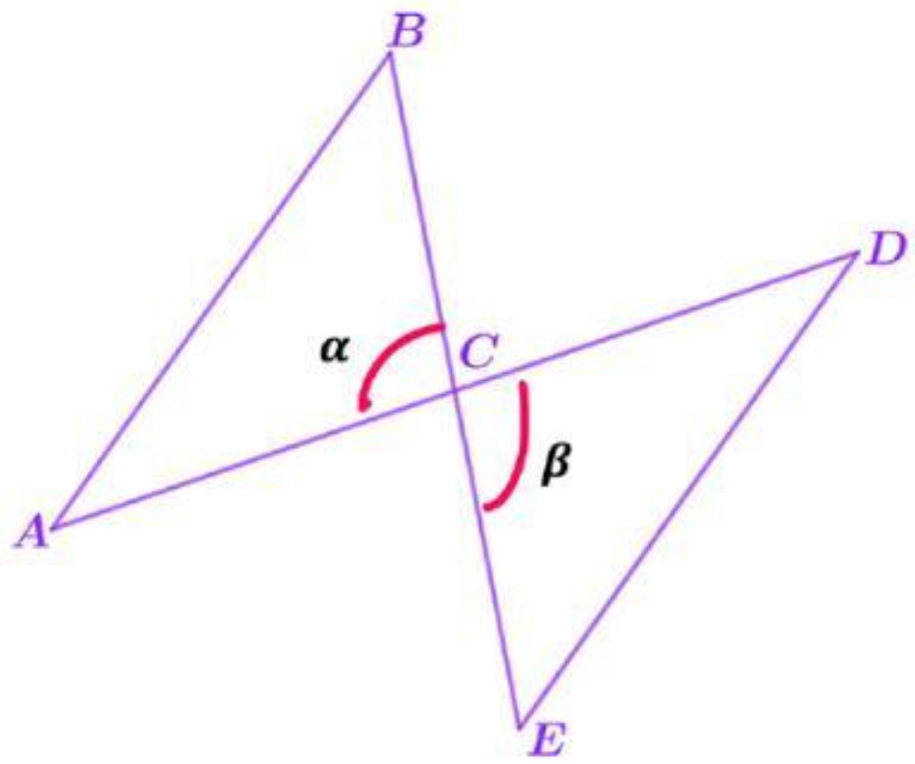
Nota. Fuente: González, N.G. (2024). Elaboración propia con Open AI. ChatGPT [Término algebraico].
https://files.oaiusercontent.com/file-v4OY9ObTdt3Jhnl5ktfvp3Ks?se=2024-10-15T02%3A24%3A48Z&sp=r&sv=2024-08-04&sr=b&rscc=max-age%3D604800%2C%20immutable%2C%20private&rscd=attachment%3B%20filename%3Dbe58e4a9-ebfd-4b32-89d3-ae30bdc44203.webp&sig=b%2BkZ4XyBYteN28kZnJqK1DPY4BEr5lHfhlxNEJPOzIg%3D

Figura 3. Términos semejantes

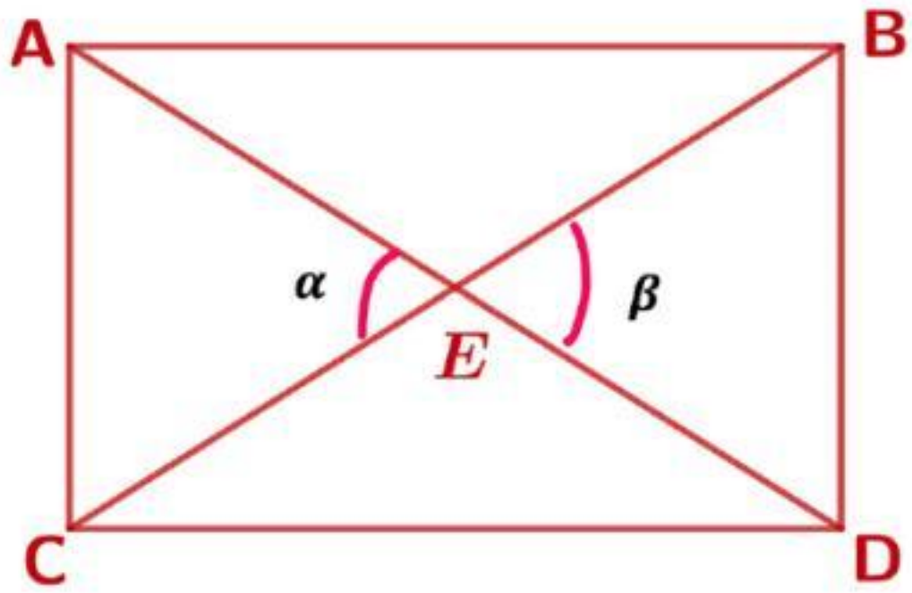


Nota. Fuente: González, N. G. (2024). Elaboración propia con Open AI. ChatGPT[Expresiones algebraicas].
https://files.oaiusercontent.com/file-n7ZlsZuCWknHwTkP12lBD3Ql?se=2024-10-15T02%3A27%3A16Z&sp=r&sv=2024-08-04&sr=b&rscc=maxage%3D604800%2C%20immutable%2C%20private&rscd=attachment%3B%20filename%3D2e2c7a0b-2fb5-4f82-a04e-ea0c08511687.webp&sig=pGFyBkyBrpWJrrVlHn67LF/pyCwMPAK8m3HSrHUHbOA%3D

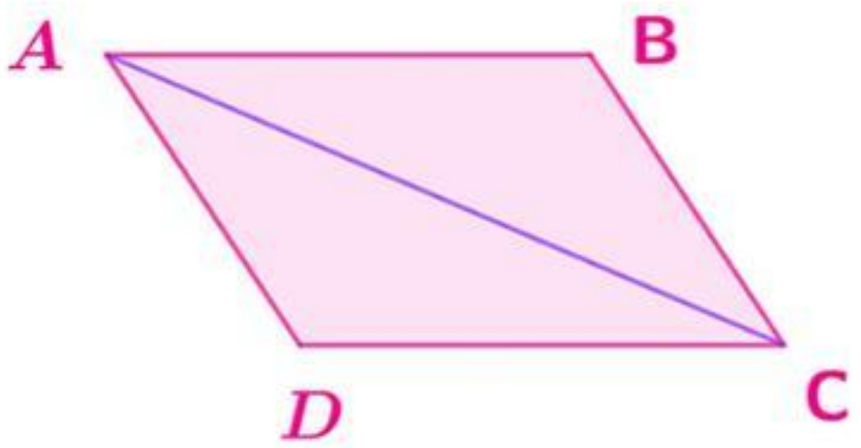
1. En la siguiente figura, $BC = CE = 5$ cm, $AC = CD = 4$ cm y los ángulos $\alpha = \beta = 60°$ Decir por qué criterio los triángulos ABC y DEC son congruentes.



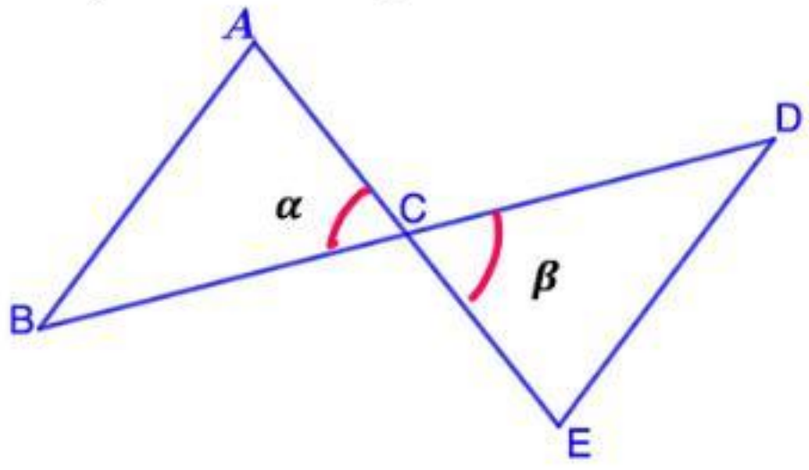
2. En la siguiente figura $AE = EC = 7$ cm, $BE = ED = 7$ cm y los ángulos $\alpha = \beta = 40°$ Decir por qué criterio los triángulos AEC y BED son congruentes.



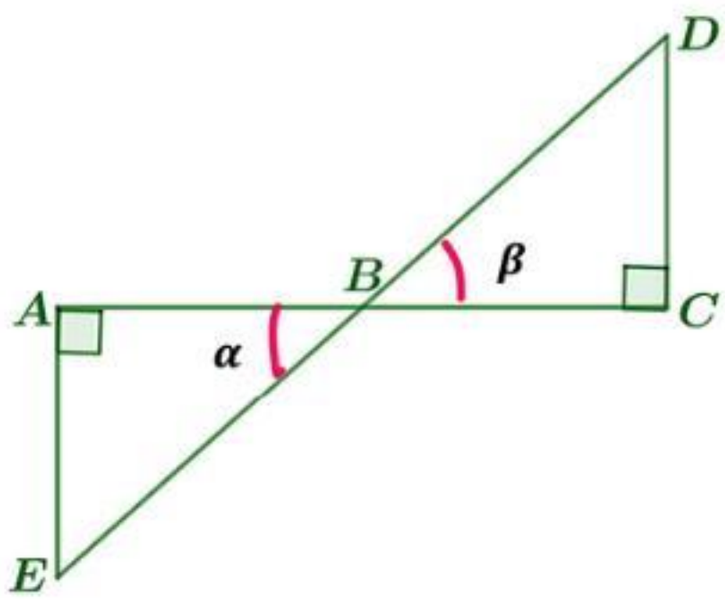
3. En la siguiente figura los segmentos $AB = DC = 5$ cm y $AD = BC = 7$ cm AB y DC son paralelos. Decir por qué criterio los triángulos ABC y CDA son congruentes.



4. En la siguiente figura, $AC = CE = 6$ cm, $BC = CD = 7$ cm y los ángulos $\alpha = \beta = 45°$ Decir por qué criterio los triángulos C ABC y EDC son congruentes.

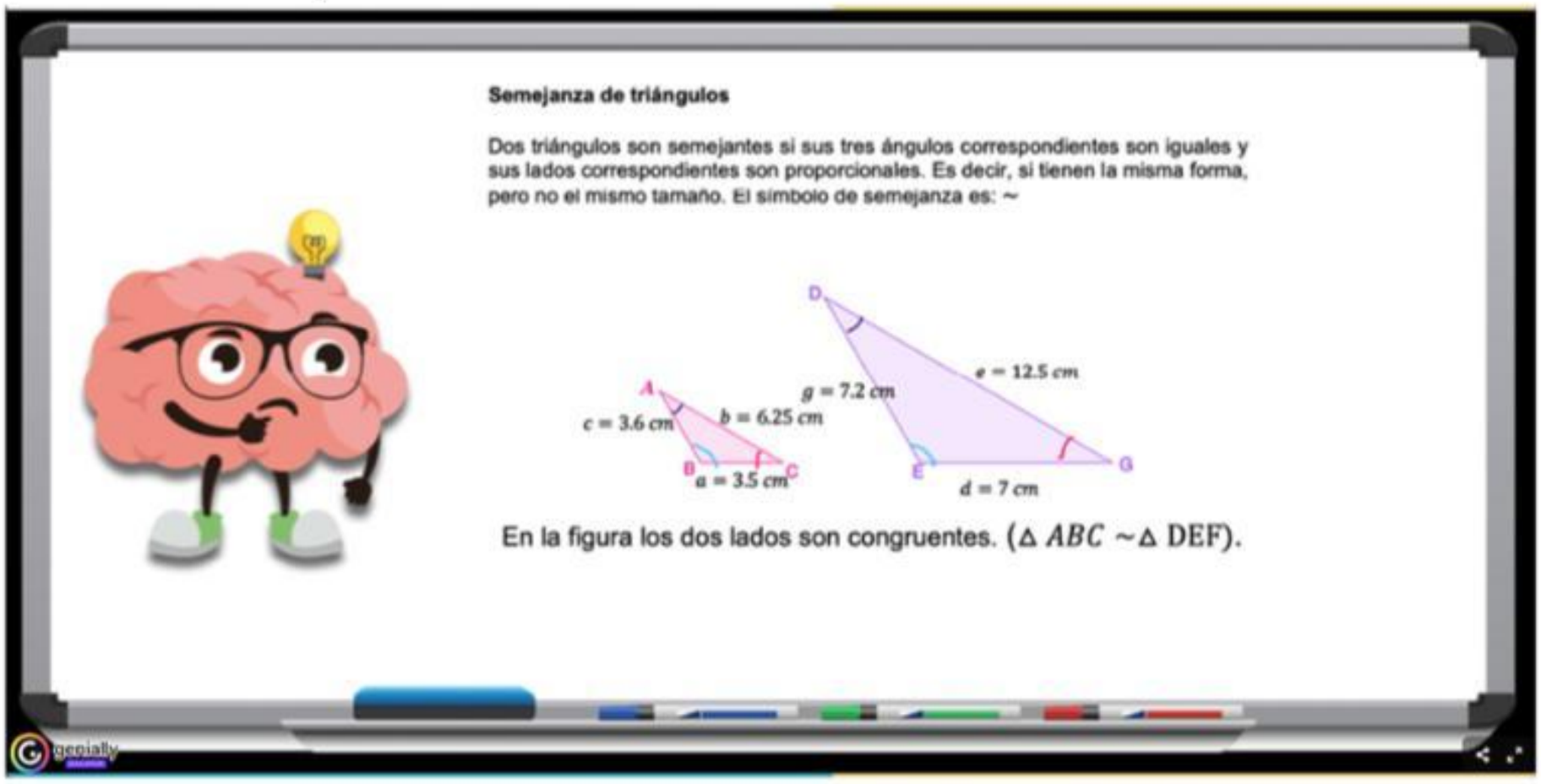


5. En la siguiente figura, los segmentos $AB = BC = 6$ cm, $EB = BD = 8$ cm y los ángulos $\alpha = \beta = 30°$ Decir por qué criterio los triángulos ABE y CDE son congruentes.



Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si sus tres ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. Es decir, si tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño. El símbolo de semejanza es: ~

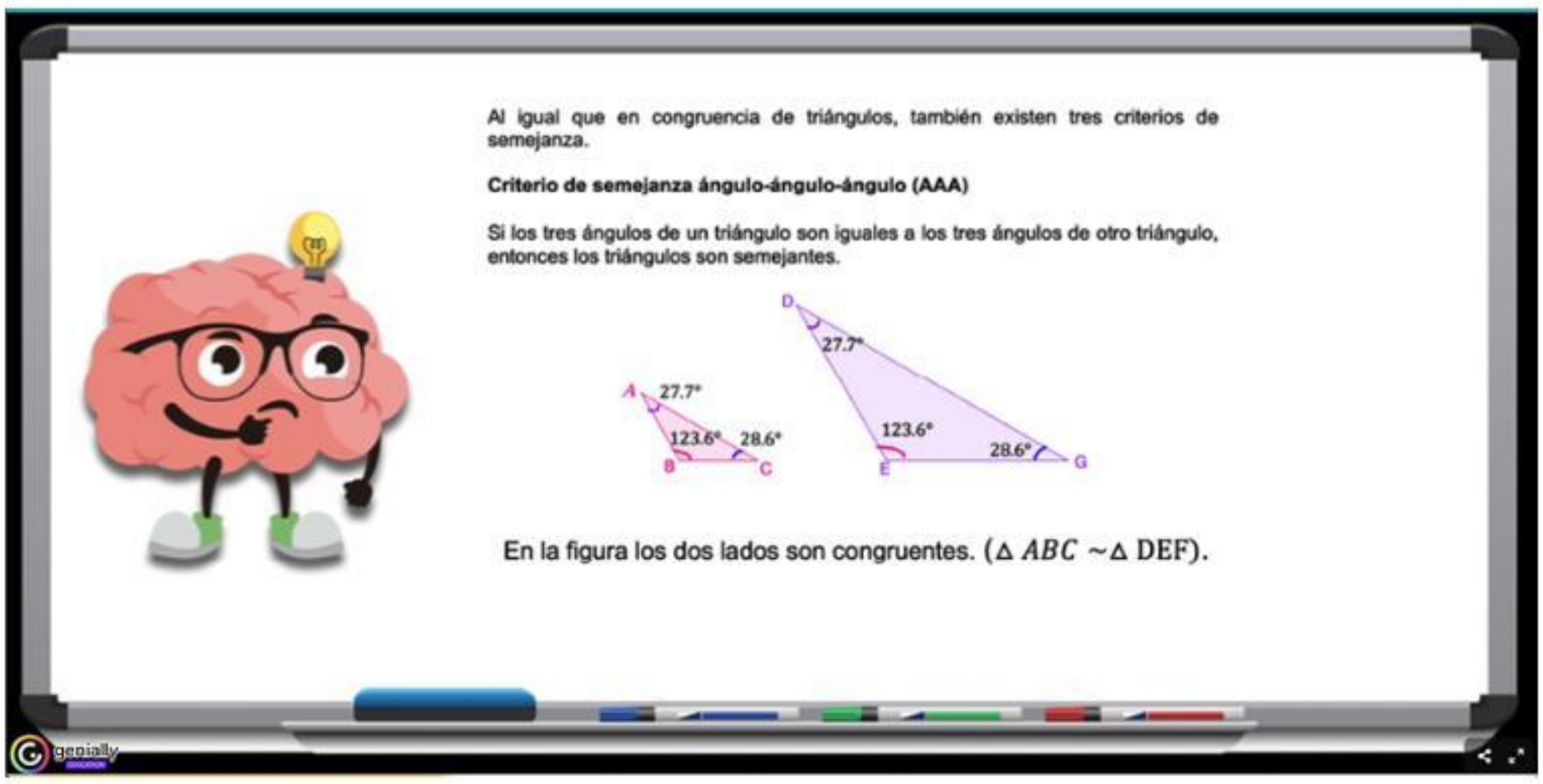


En la figura los dos lados son congruentes. $(\triangle ABC \sim \triangle DEF)$.

Al igual que en congruencia de triángulos, también existen tres criterios de semejanza.

Criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA)

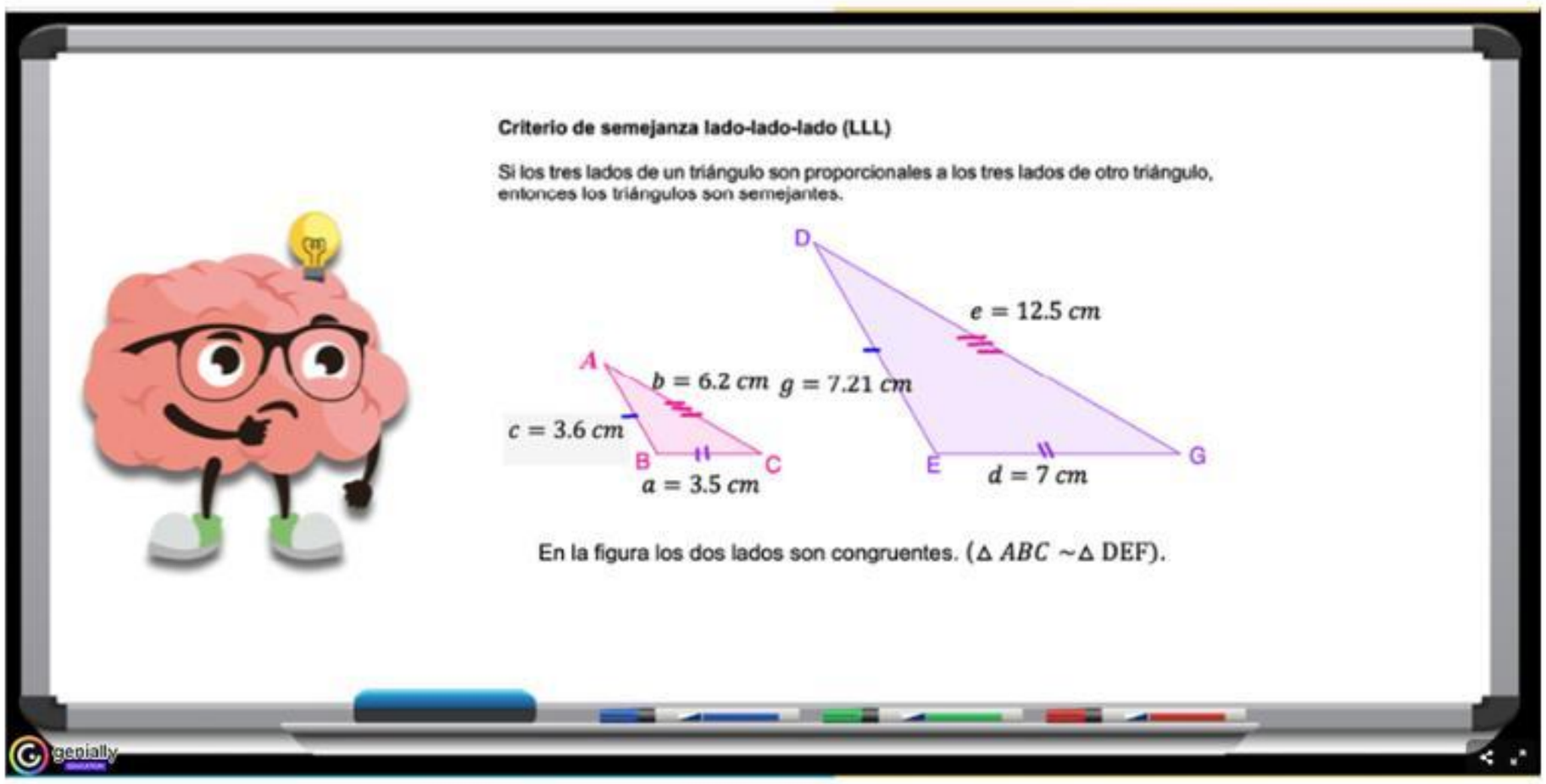
Si los tres ángulos de un triángulo son iguales a los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.



En la figura los dos lados son congruentes. (△ABC~△DEF).

Criterio de semejanza lado-lado-lado (LLL)

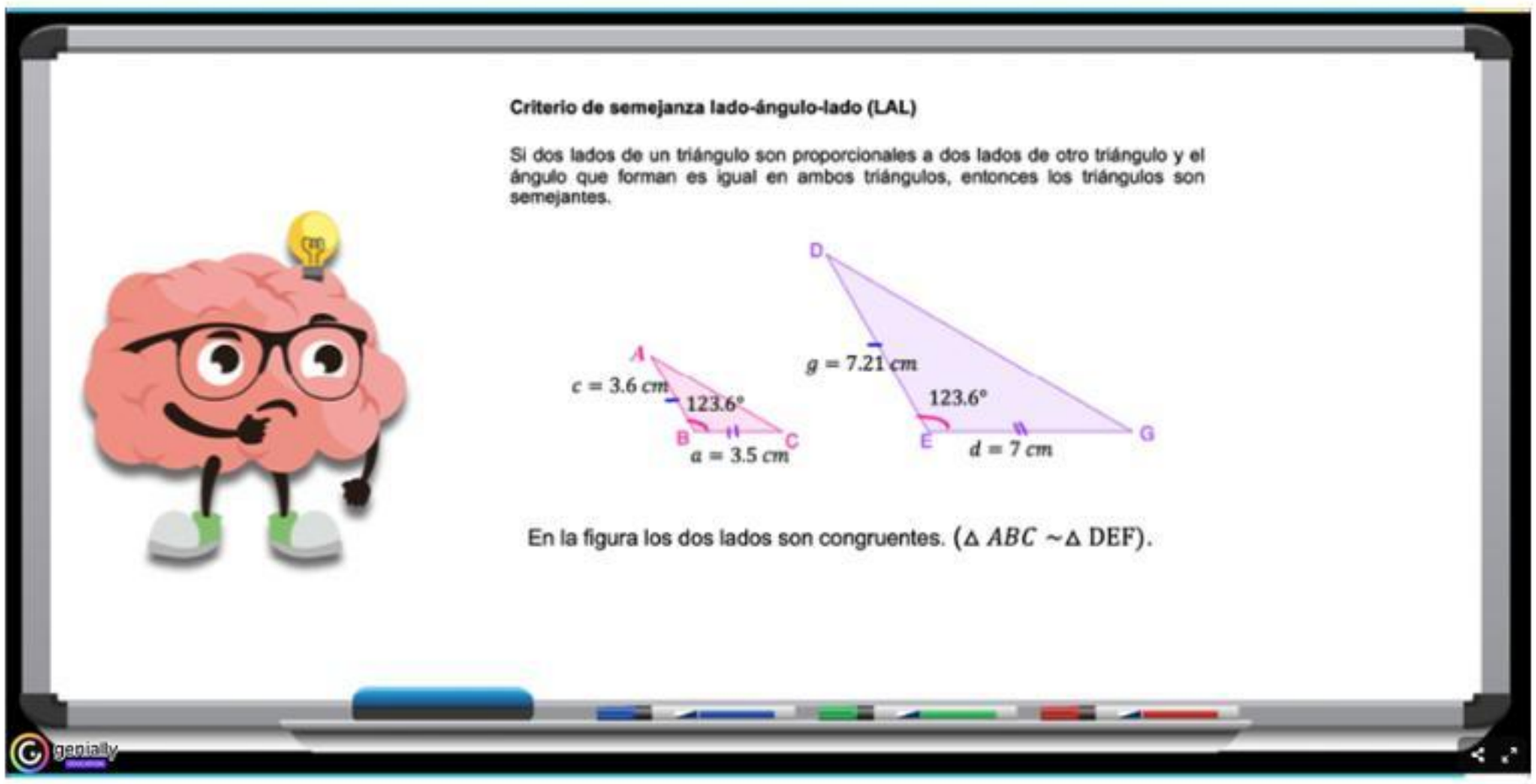
Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.



En la figura los dos lados son congruentes. (△ABC~△DEF).

Criterio de semejanza lado-ángulo-lado (LAL)

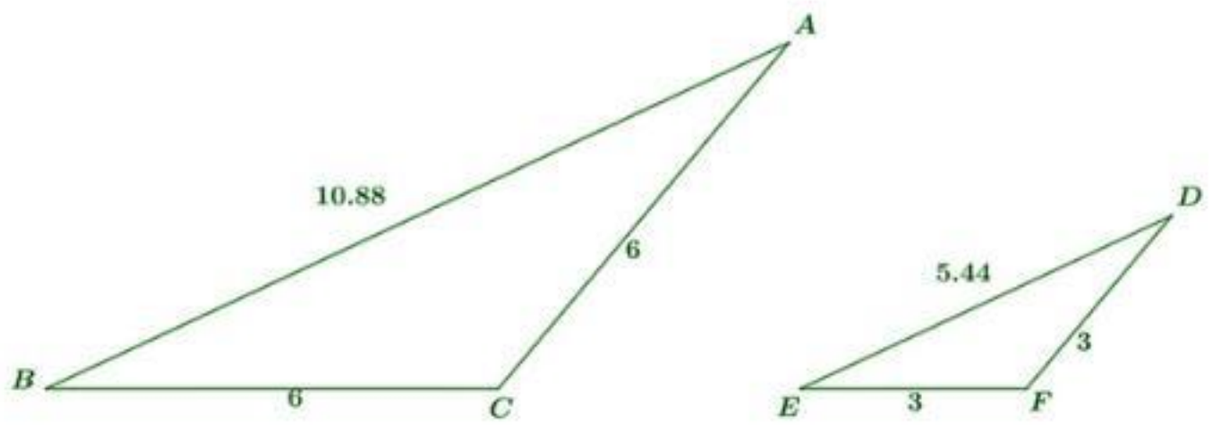
Si dos lados de un triángulo son proporcionales a dos lados de otro triángulo y el ángulo que forman es igual en ambos triángulos, entonces los triángulos son semejantes.



En la figura los dos lados son congruentes. $(\triangle ABC \sim \triangle DEF)$.

Ejemplo

1. En la siguiente figura demuestra que los triángulos ABC y DEF son semejantes.



Analizando la proporción.

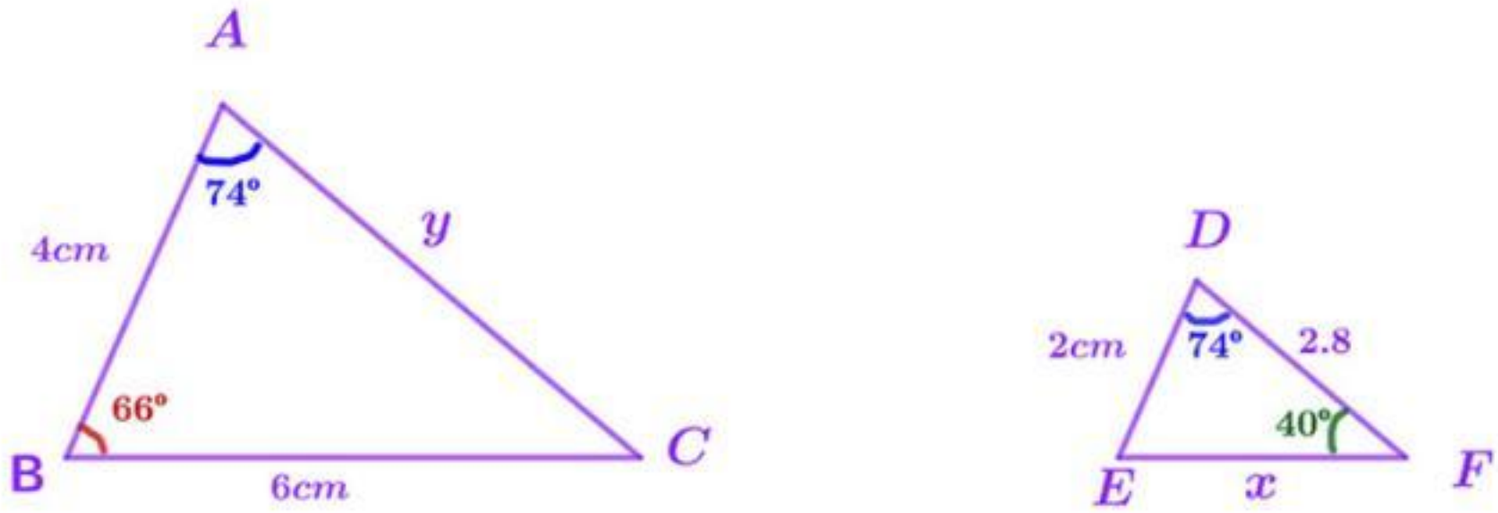
$$\frac{AB}{DE} = \frac{10.88}{5.44} = 2$$

$$\frac{AC}{DF} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{6}{3} = 2$$

Así los lados son proporcionales y la proporción es 2.
Por el criterio lado-lado-lado (LLL) los triángulos son proporcionales. $(\triangle ABC \sim \triangle DEF)$.

2. En la siguiente figura demostrar que los triángulos son semejantes. Dar la proporción y obtener el valor de x y y.



En $\triangle ABC$ la suma de los ángulos A y B es:

$$\measuredangle A + \measuredangle B = 66 + 74 = 140$$

Como la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es 180. Entonces el ángulo C mide 40°.

De manera análoga en $\triangle DEF$ la suma de los ángulos D y F es:

$$\measuredangle D + \measuredangle F = 74 + 40 = 114.$$

Como la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es 180. Entonces el ángulo E mide 66°.

Así, por el criterio ángulo-ángulo-ángulo (AAA) los dos triángulos son semejantes. Luego los lados son proporcionales. La proporción es:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

Sustituyendo los valores tenemos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{2} = 2$$

Así, la proporción es 2. Es decir, la medida de los lados del triángulo ABC es el doble que la medida de los lados del triángulo DEF.

Entonces $y = 2(2.8) = 5.6\ \text{cm}$ y $x = \frac{6}{2} = 3$.





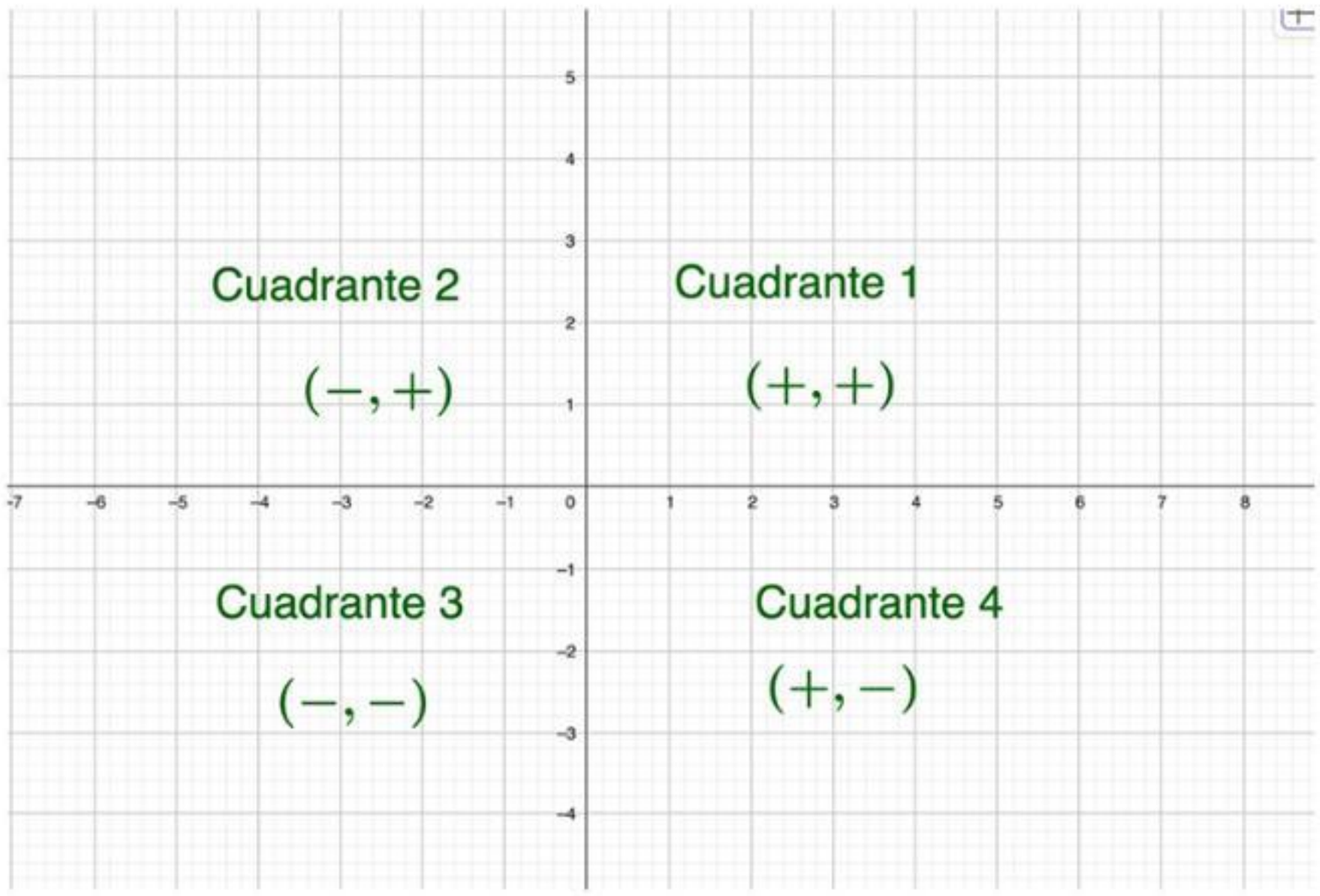
Actividad 13.

Semejanza de triángulos.

Instrucciones: para ver la actividad da clic en el enlace.

3.4.3.3 Distancia entre dos puntos

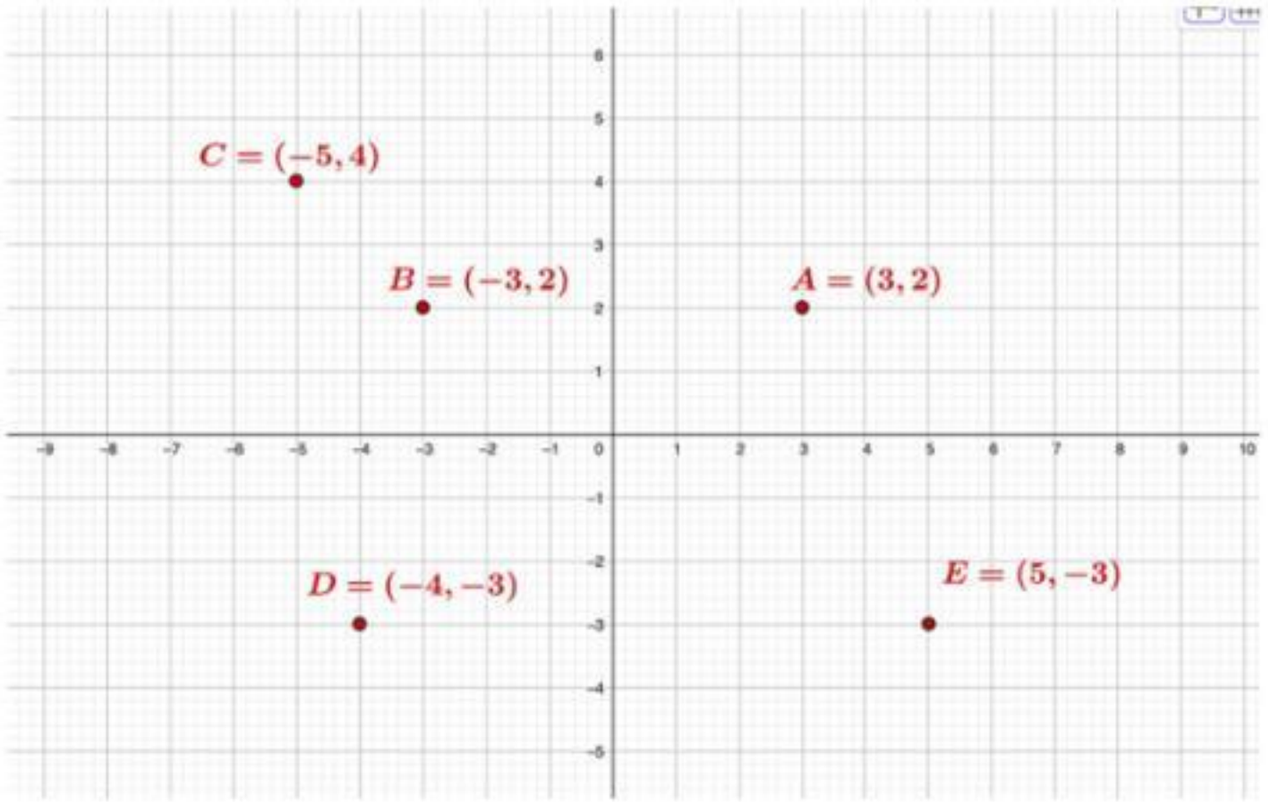
Antes de hablar de distancia entre dos puntos, primero recordemos el Plano Cartesiano, el cual está formado por dos rectas perpendiculares que se intersectan en un punto llamado origen. La recta horizontal se llama eje x o eje de las abscisas y al igual que la recta real a la derecha del cero están los números positivos y a la izquierda los negativos. La recta vertical se llama eje y o eje de las ordenadas; del cero hacia arriba se encuentran los positivos y del cero hacia abajo los negativos. Así se tienen cuatro cuadrantes como se ilustra en la siguiente figura.



Los puntos en el Plano Cartesiano son parejas ordenadas de la forma (x,y), donde x,y son números reales $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x, y \in \mathbb{R}\}$. Como las parejas son ordenadas, la x, llamada también abscisa, se localiza en el eje de las abscisas y la y, llamada ordenada, se localiza en el eje de las ordenadas.

Ejemplo: localiza los siguientes puntos en el Plano Cartesiano.

1. A = (3,2)
2. B=(-3,2)
3. C=(-5,4)
4. D=(5,-3)

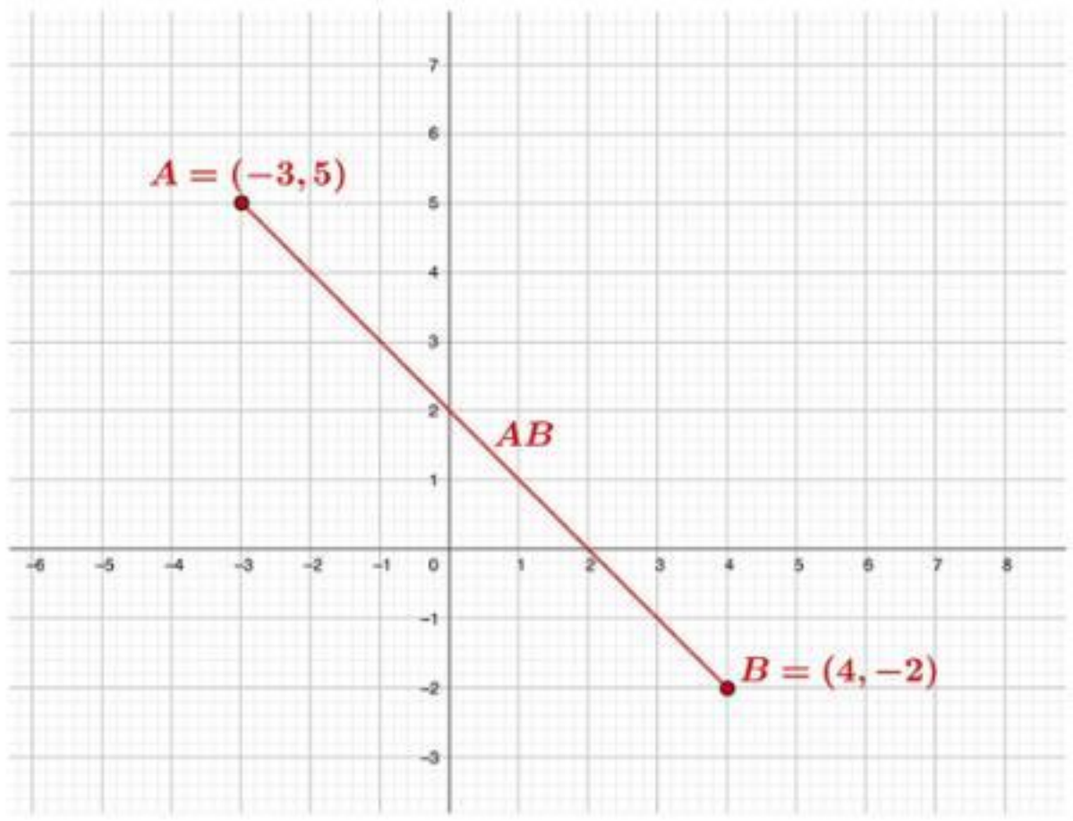


Dados los puntos $P = (x_0, y_0)$ y $Q = (x_1, y_1)$, en el Plano Cartesiano podemos obtener la longitud del segmento PQ con la fórmula de la distancia entre dos puntos. La cual se obtiene como una consecuencia del Teorema de Pitágoras. En este curso sólo utilizaremos la fórmula.

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Ejemplo.

1. En el Plano Cartesiano, localizar los puntos $A = (-3,5)$ y $B = (4,-2)$ y obtener la longitud del segmento AB.



En el segmento AB el punto inicial es $A = (-3,5)$ y el punto final es $B = (4,-2)$. Entonces tenemos

$$A = (-3,5)\ B = (4,-2)$$
$$(x_0, y_0) \qquad (x_1, y_1)$$

Escribimos la fórmula.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Sustituyendo los valores.

$$d(A,B) = \sqrt{(4-(-3))^2 + (-2-5)^2}$$

Aplicando ley de signos.

$$d(A,B) = \sqrt{(4+3)^2 + (-2-5)^2}$$

Realizando las operaciones

$$d(A,B) = \sqrt{(7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98} = 9.89$$

Distancia del segmento $d(A,B) = 9.89\ ul$

2. En el Plano Cartesiano, localizar los puntos $A = (-3,5)$ y $B = (4,-1)$ y obtener la longitud del segmento AB.

En el segmento AB el punto inicial es $A = (4,-1)$ y el punto final es $B = (-3,-5)$. Entonces tenemos

$$A = (4,-1)\ \ B = (-3,-5)$$
$$(x_0, y_0) \qquad (x_1, y_1)$$

Escribimos la fórmula.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Sustituyendo los valores.

$$d(A,B) = \sqrt{(-3-4)^2 + (-5-(-1))^2}$$

Aplicando ley de signos.

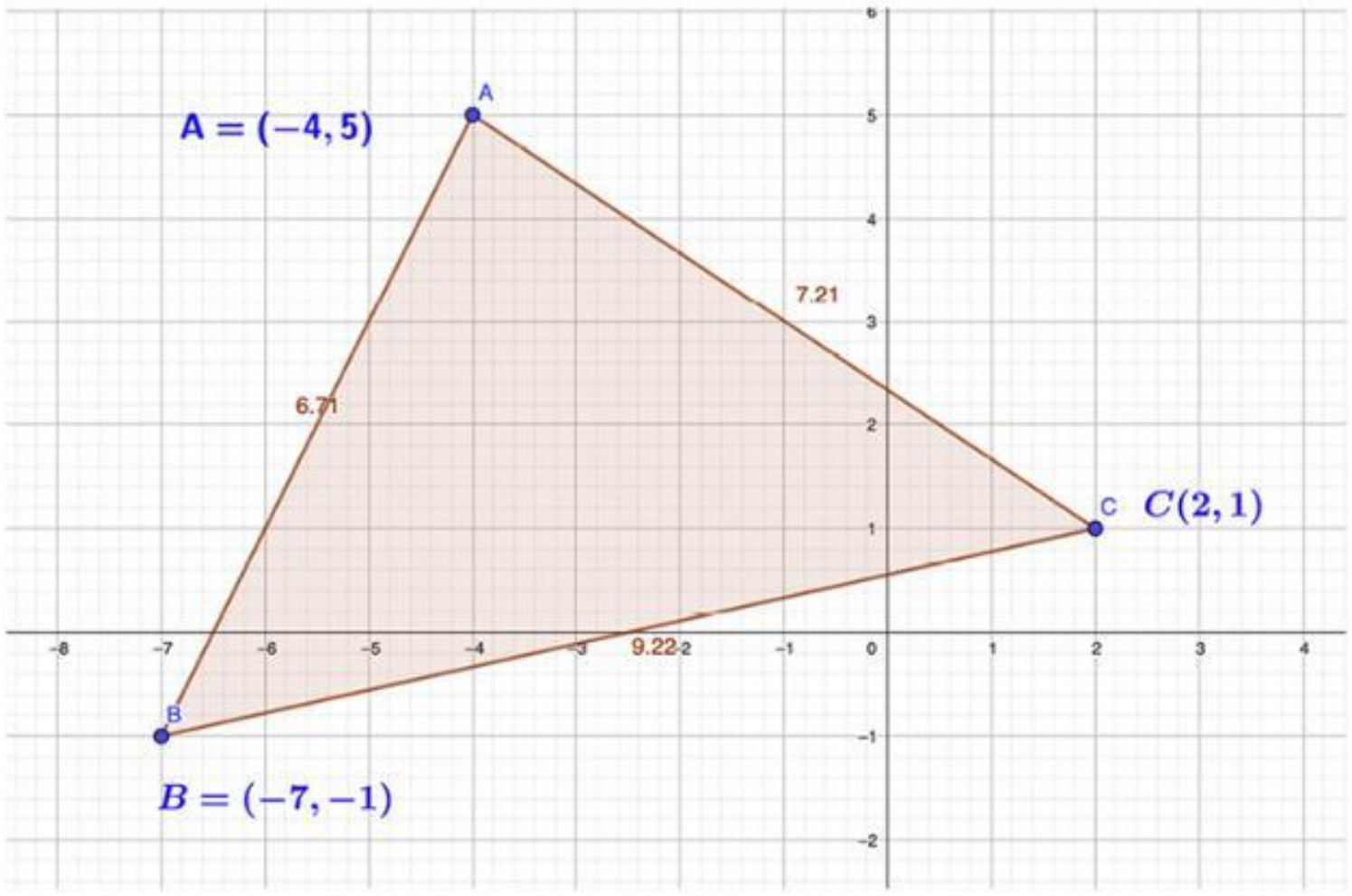
$$d(A,B) = \sqrt{(-3-4)^2 + (-5+1)^2}$$

Realizando las operaciones

$$d(A,B) = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} = 8.06$$

Resultado 8.06

2. Obtener el perímetro de un triángulo con vértices en $A\ (-4,5)$, $B=(-7,-1)$ y $C=(2,1)$.



Primero calcularemos la distancia AB.

$A=(-4,5)$ $\quad B=(-7,-1)$
(x_0,y_0) $\quad (x_1,y_1)$

$$d(B,C)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

$$=\sqrt{(-1-(-4))^2+(-1-(5))^2}$$

$$=\sqrt{(-1+4)^2+(-1-5)^2}$$

$$=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2}$$

$$=\sqrt{9+36}$$

$$=\sqrt{45}$$

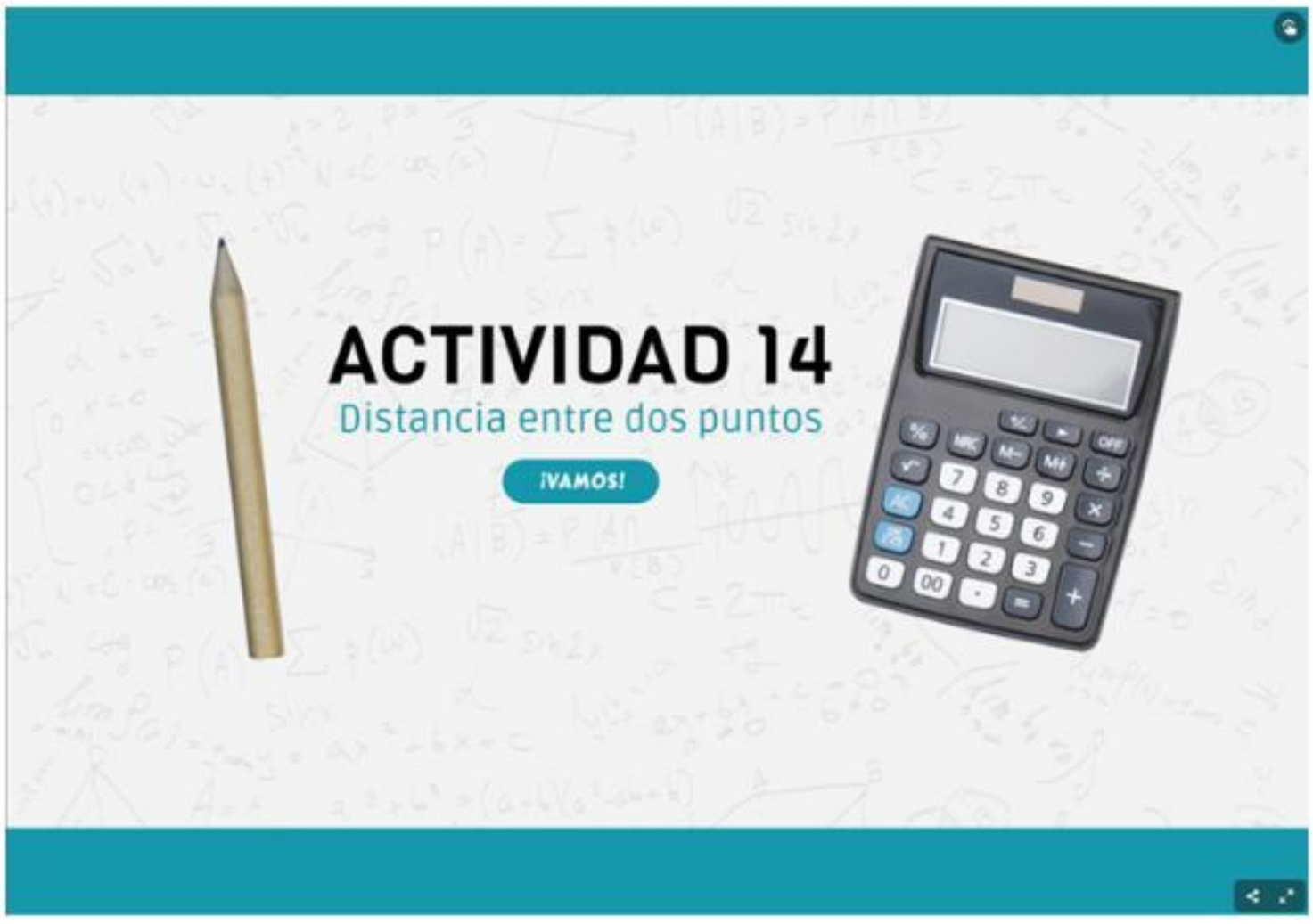
$$=6.71u.$$

Ahora calcularemos la distancia BC.

$B=(-7,-1)\&$ $\quad C=(2,1)$
(x_0,y_0) $\quad (x_1,y_1)$

$$d(B,C)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

$$=\sqrt{(2-(-7))^2+(1-(-1))^2}$$





Actividad 14.

Distancia entre dos puntos

Instrucciones: para ver la actividad da clic en el enlace.

3.5 Problemas de aplicación

Ahora resolveremos dos ejemplos de aplicación de alguno de los temas vistos en este módulo.

1. Una tienda departamental hizo una oferta en zapatos para dama. Si unas botas cuestan 3000 pesos y por promoción dieron 12 meses sin intereses, ¿de cuánto es cada mensualidad? Si además dan 7% de rembolso en monedero electrónico. Calcular el monto del rembolso.

Para obtener las mensualidades debemos dividir el costo de las botas entre 12.

$$3000 \div 12 = 250$$

Así cada mes se pagará 250 pesos.

Ahora obtendremos el 7% con una regla de tres.

3000	100%
x	7%

Despejar x

$$x = \frac{(3000)(7)}{100} = \frac{21000}{100} = 210$$

El rembolso es de 210 pesos.

Como hay cuatro "x" y tres "y", podrías escribirla como $4x + 3y$. Así es mucho más fácil de leer: $4x + 3y$

Puedes solamente sumar o restar variables que son la misma letra (términos semejantes), como $3x + 2x = 5x$.

1.1.2 Clasificación de expresiones algebraicas

La clasificación de expresiones algebraicas se realiza de acuerdo con el número de términos no semejantes que contiene.

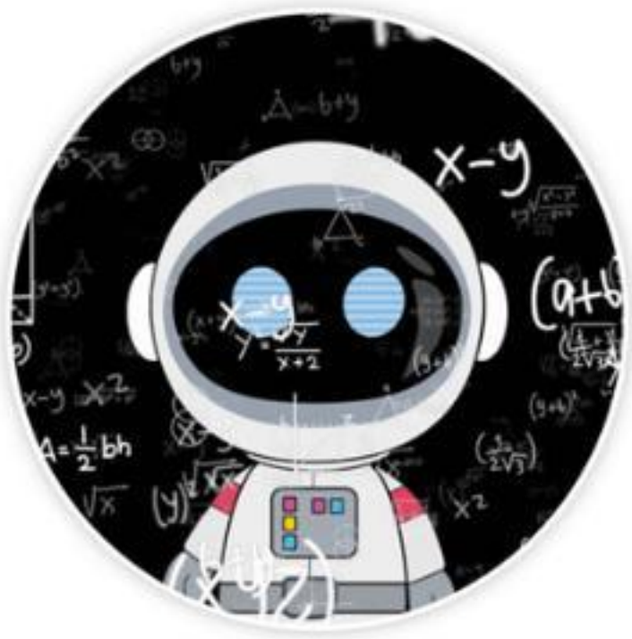
- **Monomios:** un solo término algebraico, ejemplos: $3x, 5a^2, 8ab^2c, \frac{3mn^5}{5}$
- **Binomios:** dos términos algebraicos, ejemplos: $8s^2tv + 9mno^3, \frac{7x^2}{9} - \frac{5y^3}{4}, x + \frac{y^3}{2}$
- **Trinomios:** tres términos algebraicos, ejemplos: $a + b + c, xy^2 + m^3n - 2abc^7$
- **Polinomios:** cuatro o más términos algebraicos, ejemplos: $2x - 5a^3 + 8ab^2c - 4e$

Por ejemplo, observa la siguiente tabla y descubrirás diversas expresiones algebraicas:

Tabla 1. Clasificación de expresiones algebraicas

Expresión algebraica	Clasificación
$-5a^2b^3c^4$	Monomio
$\sqrt{x^2}$	Monomio
$\frac{5m^3}{3}n^2 - o^4$	Binomio
$9x^5 + 6y^2z^{-3} - \frac{3w^4}{2}$	Trinomio
$7p^2 + \frac{6q^2}{r^2} + 2s^5 - 6t^3 - 7u^8$	Polinomio de 5 términos

Nota. Fuente: González, N.G. (2024). Elaboración propia. [Elementos de un término algebraico]



Actividad 2.



Expresiones algebraicas

Instrucciones: es momento de poner en práctica lo antes revisado, da clic en el enlace para comenzar, resuelve y comenta con tu docente y compañeros tus resultados.

$$= \sqrt{(9)^2+(2)^2}$$

$$= \sqrt{81+4}$$

$$= \sqrt{85}$$

$$= 9.22u.$$

Finalmente calcularemos la distancia AC.

$A = (-4,5)$ $C = (2,1)$
(x_0, y_0) (x_1, y_1)

$$d(A,C) = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

$$= \sqrt{(2+4)^2+(1-5)^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2+(-4)^2}$$

$$= \sqrt{36+16}$$

$$= \sqrt{52}$$

$$= 7.21u.$$

Por lo tanto, el perímetro es: $P = d(A,B) + d(B,C) + d(A,C)$

$$P = 6.71+9.22+7.21$$

$$P = 23.14$$

1. Una tienda departamental hizo una oferta en bolsos para dama. Si la bolsa tiene un costo de 7 690 pesos y por promoción dieron 12 meses sin intereses, ¿de cuánto es cada mensualidad? Si además dan 5% de rembolso en monedero electrónico. Calcular el monto del rembolso.

2. Si una cisterna se llena con 5 llaves en 3 horas, ¿cuánto tiempo se tarda en llenar si solo se usan 2 llaves?

3. Se quiere pintar un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 5. Calcular el área del cuadrado.

4. A cierta hora del día un edificio proyecta una sombra de 10 metros y una persona que mide 1.70 centímetros proyecta una sombra de 2.30 metros. Calcular la altura del edificio.

5. Calcular el perímetro de un triángulo con vértices en los puntos $A = (3,6)$, $B = (5,-4)$ y $C = (-4,3)$.

Actividad 15.



Congruencia de triángulos

Instrucciones: copia en tu cuaderno cada uno de los problemas que se plantean y resuélvelos.

Resumen del Módulo

En este módulo vimos diversos conceptos que enunciaremos de forma breve. Empezamos con las razones y proporciones: una razón es una comparación entre dos cantidades, mientras que una proporción es la igualdad entre dos razones geométricas. En este módulo se utilizan para ver semejanza de triángulos.

Los porcentajes expresan una proporción sobre 100 y tienen diversas aplicaciones en la vida real, por ejemplo, cuando hay ofertas y el descuento es un porcentaje. Además, se vio el interés simple y compuesto, con el objeto de promover la toma de decisiones más razonadas.

También se estudiaron los diversos tipos de variaciones: compuestas directas, indirectas y compuestas.

Se incluyeron figuras geométricas, vimos su definición y fórmulas para calcular el área y perímetro de las principales figuras. Y se estudió el Teorema de Pitágoras que establece que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Este teorema es fundamental para calcular distancias.

Analizamos los tres criterios de semejanza y congruencia de triángulos, así como su aplicación en el Teorema de Tales. Finalmente estudiamos la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos y concluimos con unos problemas de aplicación.



Actividad 16.

Ejercicio autoevaluable

Para reforzar los temas vistos en este Módulo III, realiza el siguiente ejercicio, para comenzar, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada M3 Cuestionario Final.

Glosario

Triángulo: figura geométrica de tres lados.

Plano Cartesiano: intersección de dos rectas, una horizontal llamada eje x y otra vertical llamada eje y.

Abscisa: primera coordenada de una pareja ordenada.

Ordenada: segunda coordenada de una pareja ordenada.

Tales de Mileto: filósofo, matemático griego, que vivió en Mileto. Célebre por su teorema de semejanza de triángulos.

Referencias

- *Arcos D.J. (s.f.) Dibujo arquitectónico I.* https://www.ugr.es/~agomezb/etsie_eg1/etsie_eg1_material_docente/t5_11_escalas.pdf
- Méndez, H. A. (2010). *Matemáticas* 2. Santillana.
- CONAMAT. (2009). *Geometría y trigonometría.* Pearson Prentice Hall.
- Bornell, C. (2000). *La divina proporción, las formas geométricas.* Alfa-Omega.
- Ángel, R. A. (2007). *Álgebra elemental.* Pearson Educación.
- Rodríguez Franco, J., Rodríguez Jiménez, E. C. & Pierdant Rodríguez, A. I.
- (2014). *Matemáticas financieras.* Grupo Editorial Patria.
- Swokowsky, E. W. & Cole, J. A. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica. CENGAGE Learning.*

Módulo IV

Función, ecuación y desigualdad lineal

Propósito de Módulo

Resuelve algebraica y gráficamente situaciones reales que involucren modelos lineales.

Presentación

En este curso estudiaremos funciones con dos variables; la variable independiente x y la variable dependiente y. Las funciones son una herramienta fundamental que permiten establecer una relación entre las variables, donde a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente.

Las funciones lineales de la forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el término constante o la intersección con el eje y. Graficamente las ecuaciones lineales representan una línea recta, lo que las convierte en un modelo útil para describir fenómenos de variación constante.

Por otro lado, los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables consisten en dos ecuaciones que deben resolverse simultáneamente para encontrar un par de valores que satisfaga ambas ecuaciones. La solución de un sistema de dos ecuaciones lineales es el punto de intersección de las dos rectas. Cuando las líneas rectas son paralelas no se intersectan, lo que significa que no hay solución. La importancia de este tema se observa en los problemas de aplicación.

Finalmente, las desigualdades que gráficamente representan intervalos, los cuales pueden ser abiertos, cerrados o mixtos.

Actividad



Ejercicio de diagnóstico

Instrucciones: antes de iniciar con la revisión de los contenidos del módulo IV, te invitamos a responder a la evaluación diagnóstica.

Esto de ayudará a descubrir los conocimientos previos que tienes sobre los temas a abordar y, al mismo tiempo, le permitirá a tu docente conocer tus fortalezas y debilidades.

Para comenzar con este ejercicio, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada: M4 Evaluación Diagnóstica.

4.1 Definición de función

Antes de definir una función comenzaremos con la definición de producto cruz de dos conjuntos. Dados dos conjuntos A y B definimos el producto $A \times B$ de la siguiente manera:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Es decir, es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas de tal forma que el primer elemento está en el primer conjunto y el segundo elemento está en el segundo conjunto. Como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Para los conjuntos A y B obtener su producto cruz $A \times B$.

$$A = \{3,5,7,2\} \text{ y } B = \{1,4,5,6,8\}$$

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (3,1),(3,4),(3,8),(3,5),(3,6), \\ (5,1),(5,4),(5,8),(5,5),(5,6), \\ (7,1),(7,4),(7,8),(7,5),(7,6), \\ (2,1),(2,4),(2,8),(2,5),(2,6) \end{Bmatrix}$$

Una función del conjunto A al conjunto B es un conjunto F de pares ordenados en $A \times B$ tal que para cada $a \in A$ existe una única $b \in B$ con $(a,b) \in F$. El conjunto A se llama dominio de F y el conjunto B se llama codominio de F. Notemos que F es un subconjunto de $A \times B$, $F \subseteq A \times B$.

Ejemplo

Para los conjuntos $A = \{3,5,7,2\}$ y $B = \{1,4,5,6,8\}$ en el ejemplo anterior se obtuvo su producto cruz $A \times B$.

Ahora obtendremos cuatro subconjuntos de $A \times B$. Los cuales escribiremos con un S de subconjunto.

$$S_1 = \{(3,1),(3,4),(3,8)\}$$
$$S_2 = \{(3,8),(5,8)\}$$
$$S_3 = \{(3,1),(5,8),(5,6)\}$$
$$S_4 = \{(3,1),(5,8),(5,6)\}$$

Nos fijaremos en el primer elemento de cada pareja ordenada y veremos en qué subconjuntos se repite.

$$S_1 = \{(3,1),(3,4),(3,8)\}$$
$$S_2 = \{(3,8),(5,8)\}$$
$$S_3 = \{(3,1),(5,8),(5,6)\}$$
$$S_4 = \{(3,1),(5,8),(5,6)\}$$

Esos subconjuntos no pueden ser funciones porque la definición dice que para cada $a \in A$ existe una **única** $b \in B$ con (a, b) está en el subconjunto.

En S_1 para $a = 3$, b toma tres valores distintos $\{1,4,8\}$.

En S_3 para $a = 5$, b toma dos valores distintos $\{8,6\}$.

Así S_2 y S_4 sí son funciones de los conjuntos A y B.

$$F_1 = \{(3,8),(5,8)\}$$

$$F_2 = \{(3,1),(5,8),(5,6)\}$$

1. A={-3,7,-2} y B={-1,-4,3,8}
2. A={0,8,6,15} y B={6,8,10}.
3. A={-7,-3,0,4,6} y B={-5,0,7,12}
4. A={-8,-5,0,3} y B={-1,-4,5,6}
5. A={-3,-5,-7,-2} y B={1,4,5,6}

Actividad 1.

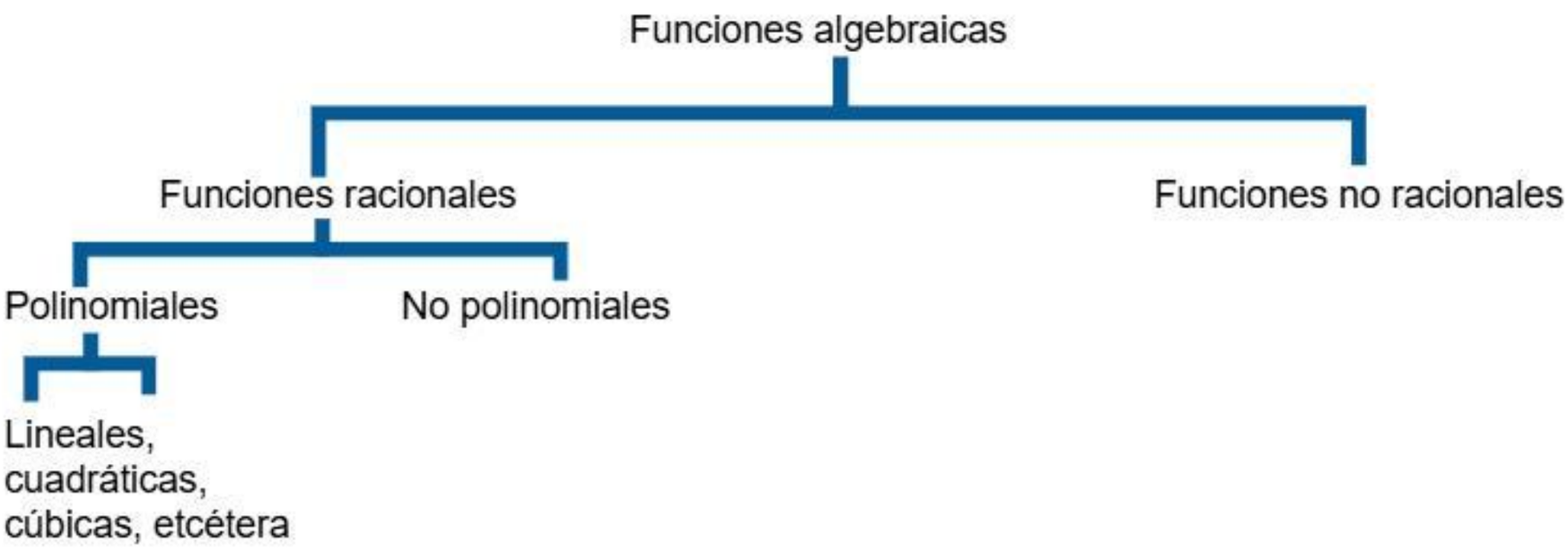


Congruencia de triángulos

Instrucciones: para los siguientes conjuntos obtén el producto $A \times B$ y dos funciones, resuelve en tu cuaderno.

4.1.1 Clasificación de funciones

Decimos que tenemos una función real de variable real cuando el dominio y el codominio de una función son los números reales $\mathbb{R}$. Las funciones reales de variable real se clasifican en dos grandes grupos. Funciones algebraicas y trascendentales. En este curso sólo veremos funciones algebraicas, por eso son las únicas que clasificaremos.



Nota. Fuente: León, G. A. (2024). Creación propia [Clasificación de funciones algebraicas].

Una función racional es una función de la forma $f(x)=\frac{q(x)}{h(x)}$, donde $q(x)$ y $h(x)$ son polinomios con $h(x) \neq 0$. En el caso particular que $h(x)=1$ son funciones polinomios y reciben el nombre de acuerdo al grado del exponente más grande; lineales, cuadradas, cúbicas, etcétera.

Ejemplo

Clasificar las siguientes funciones.

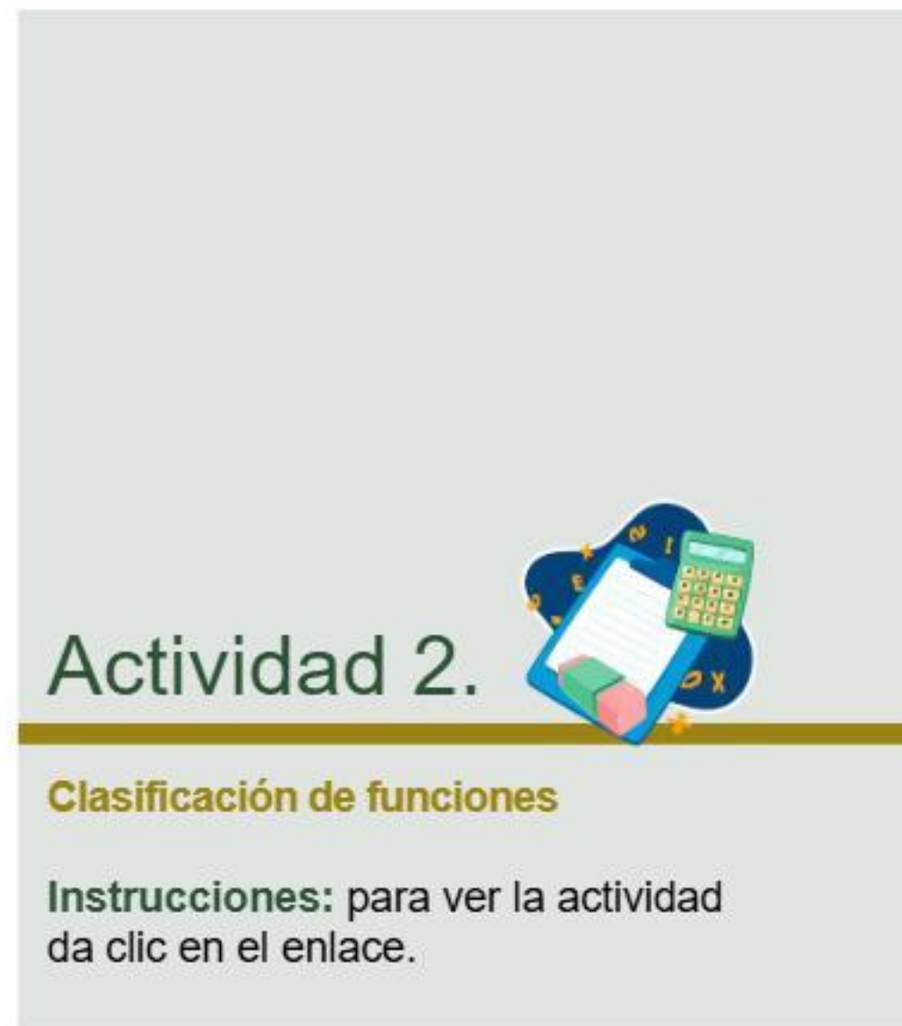
1. $F=\{(x,y)|y=4x^3-2x^2-5x+3\}$

Función algebraica, racional, polinomial y cúbica.

2. $F=\{(x,y)|y=\sqrt{x-9}\}$

Función algebraica, no polinomial.





4.1.2 Regla de correspondencia, dominio y rango

Una función real de variable real se escribe en la forma:

$$F=\{(x,y)|y=f(x), con\ x \in Dom\ f\}$$

La regla de correspondencia $y=f(x)$ nos indica cómo se comporta la función.

El dominio de la función $Dom\ f$ son los posibles valores que debe tomar la variable x.

El rango de una función son los valores que adquiere la variable y. Para obtener el rango de una función es útil tener primero su gráfica, por eso en el siguiente tema obtendremos el rango de una función.

Esta función se llama explícita porque es de la forma $y = f(x)$. Aquí la variable y está despejada. En este curso sólo estudiaremos funciones explícitas.

Ejemplo

En los siguientes ejemplos, obtener el dominio de una función.

1. $F=\{(x,y)|y=4x^3-2x^2-5x+3\}$

   Las funciones polinomiales tienen dominio en todos los números reales R, a no ser que se especifique un intervalo dado.

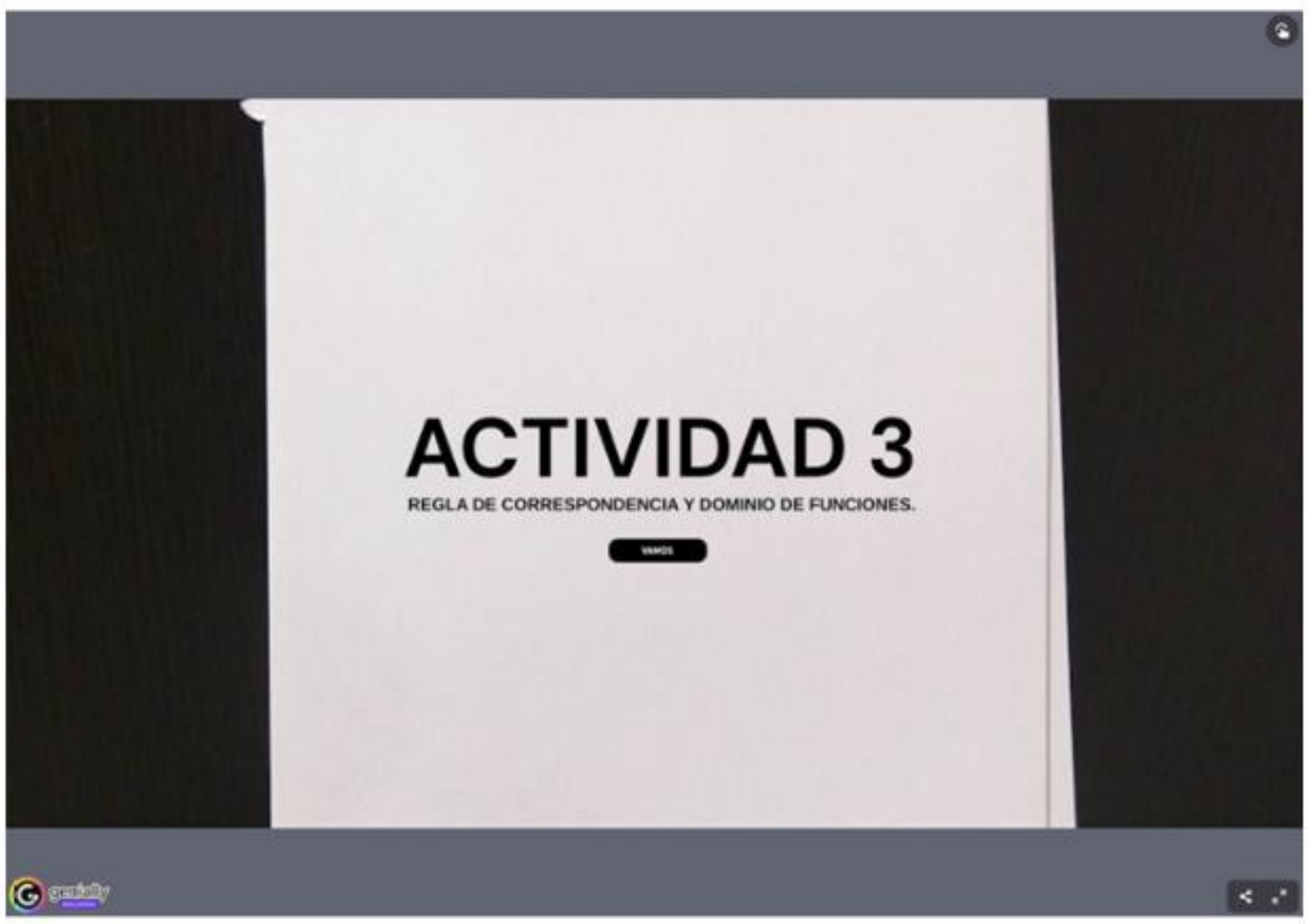
2. $F=\{(x,y)|y=\frac{4x+5}{x-1}\}$

   Como no podemos dividir entre cero, debemos fijarnos en el denominador, igualarlo a cero y resolver la ecuación.

   $$x-1=0$$

   Entonces $x=1$.

   Así el dominio son todos los reales quitando el uno $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.



Actividad 3.



Regla de correspondencia y dominio de funciones.

Instrucciones: para ver la actividad da clic en el enlace.

1.1.3 Lenguaje común y lenguaje algebraico

El **lenguaje común** es el lenguaje con el que hablamos todos los días, es la forma de expresarnos cotidianamente.

El **lenguaje algebraico**, por su parte, es como si habláramos otro idioma, como si nos expresáramos con otra lengua diferente al cotidiano, existen reglas para poder hablarlo de forma correcta y sobre todo para entenderlo. Este lenguaje es la combinación de números, letras y signos de operaciones, es decir a las expresiones algebraicas; en el caso de las letras pueden ser llamadas de igual manera como incógnitas o variables, ya que solo pueden tomar ciertos valores, podemos tener desde una pequeña expresión hasta una muy grande.

Para el lenguaje algebraico se pueden utilizar todas las letras del alfabeto, las cuales dejarán de ser la letra para convertirse en un número cualquiera.

Para poder transformar de lenguaje común a lenguaje algebraico, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Leer muy bien el enunciado
2. Utilizando las tablas de sinónimos, transformar lo solicitado
3. Representar los valores solicitados con incógnitas
4. Verificar que lo hemos hecho de forma correcta



Sinónimos de palabras que nos ayudarán con el lenguaje algebraico.
Adición: suma, adición, agregar, aumentar, incrementar.
Resta: disminuir, quitar, reducir, rebajar, descontar.
Multiplicación: Producto, doble, triple, cuádruple, quíntuple.
División: partir, fraccionar, cortar, repartir.

Ejemplos:

Coloca en la columna de lenguaje algebraico lo que **corresponda:**

Tabla 1. Lenguaje común, lenguaje algebraico

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Un número	x (cualquier literal)
El doble de un número	$2x$
El triple de un número	$3x$
El cuadrado de un número o un número al cuadrado	x^2
La mitad de un número o un semientero	4½, 7/2, –13/2 y 8.5
Recíproco de un número	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
El doble de un número aumentado en tres unidades	$2b + 3$

Nota. Fuente: González, N.G. (2024). Elaboración propia. [Lenguaje común, lenguaje algebraico].

4.1.3 Representación gráfica de una función

Para graficar funciones en este texto usaremos tabulación. Es decir, haremos una tabla donde daremos valores a la abscisa x dentro del dominio de la función y obtendremos los valores de la ordenada y. Posteriormente, localizaremos los puntos en el plano cartesiano y los uniremos como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Graficar las siguientes funciones y obtener el rango.

1. $F=\{(x, y)|y = 4x^3-2x^2-5x+3, con\ x \in \mathbb{R}\}$

Lo primero que hacemos es identificar el dominio de la función. Todos los números reales $\mathbb{R}$. Sólo tomaremos algunos números reales y los anotamos en la tabla.

Tabla 1. Algunos valores del dominio de la función $y = 4x^3-2x^2-5x+3$

x
-3
-2
-1
0
1
2
3

Nota. Fuente: León, G. A. (2024). Creación propia [Algunos valores del dominio de la función $y = 4x^3-2x^2-5x+3$].

Ahora creamos otra columna donde colocaremos la regla de correspondencia $y = 4x^3-2x^2-5x+3.$ Para llenar esta columna sustituimos el valor de x en la regla de correspondencia y realizamos las operaciones necesarias.

Tabla 2. Algunos valores del dominio de la función $y=4x^3-2x^2-5x+3$ y su regla de correspondencia.

x	$y = 4x^3-2x^2-5x+3.$
-2	$y = 4(-2)^3-2(-2)^2-5(-2)+3$ $y = 4(-8)-2(4)+10+3$ $y = -32-8+13=-27$
-1	$y = 4(-1)^3-2(-1)^2-5(-1)+3$ $y = 4(-1)-2(1)+5+3$ $y = -4-2+8=2$

0	$y=4(0)^3-2(0)^2-5(0)+3=3$
1	$y=4(1)^3-2(1)^2-5(1)+3$ $y=4(1)-2(1)-5+3$ $y=4-2-2=0$
2	$y=4(2)^3-2(2)^2-5(2)+3$ $y=4(8)-2(4)-10+3$ $y=32-8-7=17$

Nota. Fuente: León, G. A. (2024). Creación propia [Algunos valores del dominio de la función $y=4x^3-2x^2-5x+3$ y su regla de correspondencia].

Nuevamente creamos otra columna donde anotamos las parejas ordenadas que obtenemos con la abscisa x y la ordenada y.

Tabla 3. Algunos valores del dominio de la función $y=4x^3-2x^2-5x+3$, su regla de correspondencia y su interpretación como parejas ordenadas.

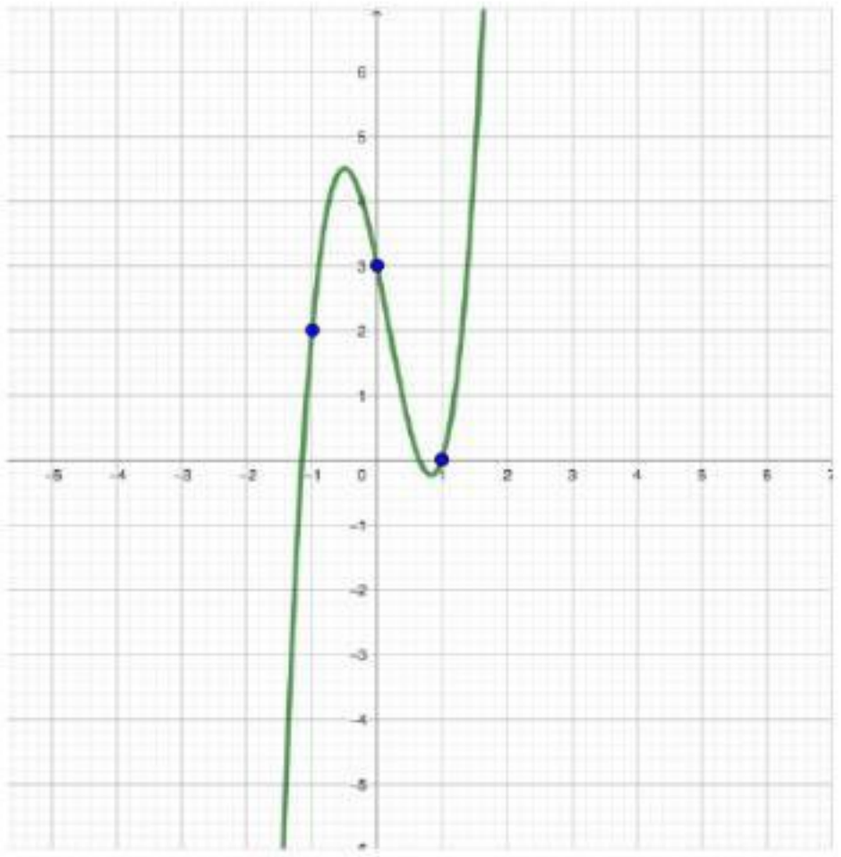
x	$y=4x^3-2x^2-5x+3.$	(x,y)
-2	$y=4(-2)^3-2(-2)^2-5(-2)+3$ $y=4(-8)-2(4)+10+3$ $y=-32-8+13=-27$	$(-2,-27)$
-1	$y=4(-1)^3-2(-1)^2-5(-1)+3$ $y=4(-1)-2(1)+5+3$ $y=-4-2+8=2$	$(-1,2)$
0	$y=4(0)^3-2(0)^2-5(0)+3=3$	$(0,3)$
1	$y=4(1)^3-2(1)^2-5(1)+3$ $y=4(1)-2(1)-5+3$ $y=4-2-2=0$	$(1,0)$
2	$y=4(2)^3-2(2)^2-5(2)+3$ $y=4(8)-2(4)-10+3$ $y=32-8-7=17$	$(2,17)$

Nota. Fuente: León, G. A. (2024). Creación propia [Algunos valores del dominio de la función $y=4x^3-2x^2-5x+3$, su regla de correspondencia y su interpretación como parejas ordenadas.

El rango de una función son los valores que puede obtener la variable y. Los que podemos observar en la segunda columna. Notemos que toma valores negativos, el cero y los positivos. Así el rango son todos los números reales $\mathbb{R}$.

Finalmente localizamos las coordenadas en el plano cartesiano y las unimos.

Figura 2. Gráfica de la función $y = 4x^3-2x^2-5x+3$



Nota. Fuente: León, G. A. (2024) Creación propia. [Gráfica de la función $y = 4x^3-2x^2-5x+3$].

2. $F = \{(x,y) \mid y = \frac{4x+5}{x-1}, con\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}\}$

Lo primero que hacemos es identificar el dominio de la función; todos los reales menos el uno $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ Sólo tomaremos algunos números reales y los anotamos en la tabla.

Tabla 4. Algunos valores del dominio de la función $y = \frac{4x+5}{x-1}$

x
-2
-1
-0.5
0
0.5
0.75
2
3
4

Nota. Fuente: León, G. A. (2024). Creación propia [Algunos valores del dominio de la función $y = \frac{4x+5}{x-1}$].

Ahora creamos otra columna donde colocaremos la regla de correspondencia $y = \frac{4x+5}{x-1}$,Para llenar esta columna sustituimos el valor de x en la regla de correspondencia y realizamos las operaciones necesarias.

Tabla 5. Algunos valores del dominio de la función $y = \frac{4x+5}{x-1}$ y su regla de correspondencia.

x	$y = \frac{4x+5}{x-1}$,
-2	$y = \frac{4(-2)+5}{-2-1} = \frac{-8+5}{-2-1} = \frac{-3}{-3} = 1$
-1	$y = \frac{4(-1)+5}{-1-1} = \frac{-4+5}{-2} = \frac{1}{-2}$
-0.5	$y = \frac{4(-0.5)+5}{-0.5-1} = \frac{-2+5}{-1.5} = \frac{3}{-1.5} = -2$
0	$y = \frac{4(0)+5}{(0)-1} = \frac{5}{-1} = -5$
0.5	$y = \frac{4(0.5)+5}{0.5-1} = \frac{-2+5}{-0.5} = \frac{7}{-0.5} = -14$
0.75	$y = \frac{4(0.75)+5}{0.75-1} = \frac{3+5}{-0.25} = \frac{8}{-0.25} = -32$
2	$y = \frac{4(2)+5}{2-1} = \frac{13}{1} = 13$
3	$y = \frac{4(3)+5}{3-1} = \frac{17}{2} = 8.5$
4	$y = \frac{4(4)+5}{4-1} = \frac{21}{3} = 7$

Nota. Fuente: León, G. A. (2024). Creación propia [Algunos valores del dominio de la función y su regla de correspondencia].

Nuevamente creamos otra columna donde anotamos las parejas ordenadas que obtenemos con la abscisa x y la ordenada y.

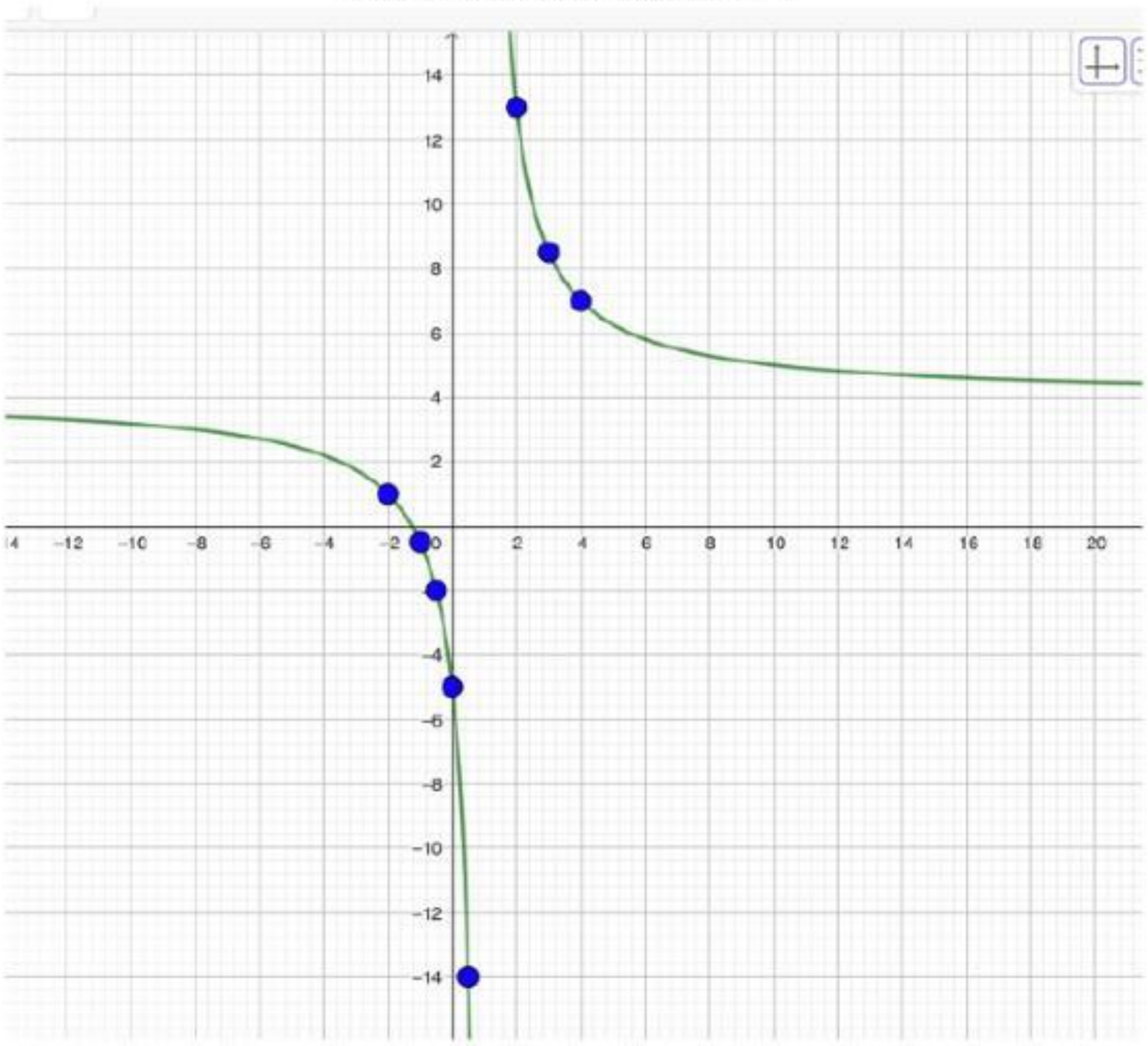
Tabla 6. Algunos valores del dominio de la función, $y = \frac{4x+5}{x-1}$ su regla de correspondencia y su interpretación como parejas ordenadas.

x	$y = \frac{4x+5}{x-1}$,	(x,y)
-2	$y = \frac{4(-2)+5}{-2-1} = \frac{-8+5}{-2-1} = \frac{-3}{-3} = 1$	$(-2,1)$
-1	$y = \frac{4(-1)+5}{-1-1} = \frac{-4+5}{-2} = \frac{1}{-2}$	$(-1,-0.5)$
-0.5	$y = \frac{4(-0.5)+5}{-0.5-1} = \frac{-2+5}{-1.5} = \frac{3}{-1.5} = -2$	$(-0.5,-2)$
0	$y = \frac{4(0)+5}{(0)-1} = \frac{5}{-1} = -5$	$(0,-5)$

0.5	$y=\frac{4(0.5)+5}{0.5-1}=\frac{-2+5}{-0.5}=\frac{7}{-0.5}=-14$	(0.5,14)
0.75	$y=\frac{4(0.75)+5}{0.75-1}=\frac{3+5}{-0.25}=\frac{8}{-0.25}=-32$	(0.75,–32)
2	$y=\frac{4(2)+5}{2-1}=\frac{13}{1}=13$	(2,13)
3	$y=\frac{4(3)+5}{3-1}=\frac{17}{2}=8.5$	(3,8.5)
4	$y=\frac{4(4)+5}{4-1}=\frac{21}{3}=7$	(4,7)

Nota. Fuente: León, G. A. (2024). Creación propia [Algunos valores del dominio de la función, su regla de correspondencia y su interpretación como parejas ordenadas.

Figura 3. Gráfica de la función $y=\frac{4x+5}{x-1}$



Nota. Fuente: León, G. A. (2024) Creación propia. [Gráfica de la función $y=\frac{4x+5}{x-1}$].

Finalmente localizamos las coordenadas en el plano cartesiano y las unimos.

El rango de una función son los valores que toma la variable y. Los que podemos observar en la segunda columna o en la gráfica y son todos los reales menos el cuatro. $\mathbb{R}\backslash\{4\}$.
xxx

$F=\{(x,y)\|y=6x^2+5x-8\}$
$F=\{(x,y)\|y=\frac{5x^2+8x-3}{x-2}\}$
$F=\{(x,y)\|y=\frac{4x^2-5x+3}{x+2}\}$
$F=\{(x,y)\|y=5x^3+7x^2+3\}$
$F=\{(x,y)\|y=\frac{4x^2+5x-3}{x-7}\}$

Nota. Fuente: León, G. A. (2024) Creación propia. [Ejercicios de gráficas de funciones y rango de una función.



Actividad 4.

Gráfica de funciones y rango de una función

Instrucciones: en tu cuaderno grafica las siguientes funciones obtén su rango. Tu maestro en clase te revisará los ejercicios.

4.2 Operaciones con funciones de variable real

Con las funciones reales de variable real se pueden realizar funciones, tales como la suma, resta, multiplicación y división.

4.2.1 Suma

La operación **suma** entre dos funciones de variable real consiste en sumar los valores de las funciones (sumando los coeficientes numéricos) en cada punto de su dominio común. Si tienes dos funciones reales $f(x)$ y $g(x)$, su suma se define como una nueva función $h(x)$, tal que:

$$h(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

O visto de otro modo:

$$F=\{(x,y)|y=f(x)\} \text{ y } G=\{(x,y)|y=g(x)\}$$

$$F+G=\{(x,y)|y=f(x)+g(x)\}$$

Aquí encontrarás un desglose de algunos puntos importantes que hay que tomar en cuenta y características importantes de esta operación:

Dominio de la suma: El dominio de $h(x)$ es la intersección de los dominios de $f(x)$ y $g(x)$, es decir, el conjunto de valores de x donde ambas funciones están definidas.

Ejemplo de cálculo: Si $f(x)=2x$ y $g(x)=x+3$, entonces la suma de $f(x)$ y $g(x)$ es:

$$h(x)=f(x)+g(x)=(2x)+(x+3)=2x+x+3=3x+3$$

Ejemplo

1. Obtenga $F+G$ para las siguientes funciones:

$$F=\{(x,y)\mid y=2x^3+1;\ con\ x\in\mathbb{R}\}\ \text{y}\ G=\{(x,y)\mid y=x-1;\ con\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$D_F=\mathbb{R}\quad \text{y}\quad D_G=\mathbb{R}$$

$$D_{F+G}=D_F\cap D_G=\mathbb{R}$$

$$F+G=\{(x,y)\mid y=(2x^3+1)+(x-1);\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$F+G=\{(x,y)\mid y=2x^3+1+x-1;\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$F+G=\{(x,y)\mid y=2x^3+x;\ x\in\mathbb{R}\}$$

2. Obtenga $F+G$ para las siguientes funciones:

$$F=\{(x,y)\mid y=x-5;\ con\ x\in\mathbb{R}\}\ \text{y}\ G=\{(x,y)\mid y=x+4;\ con\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$D_F=\mathbb{R}\quad \text{y}\quad D_G=\mathbb{R}$$

$$D_{F+G}=D_F\cap D_G=\mathbb{R}$$

$$F+G=\{(x,y)\mid y=(x-5)+(x+4);\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$F+G=\{(x,y)\mid y=x-5+x+4;\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$F+G=\{(x,y)\mid y=2x-1;\ x\in\mathbb{R}\}$$



Actividad 5.



Suma de funciones

Instrucciones: para ver la actividad da clic en el enlace.

4.2.2 Resta

La operación **resta,** entre dos funciones de variable real, consiste en restar los valores de las funciones (restando los coeficientes numéricos) en cada punto de su dominio común. Si tienes dos funciones reales $f(x)$ y $g(x)$, su resta se define como una nueva función $h(x)$, tal que:

$$h(x)=(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

O visto de otro modo:

$$F=\{(x,y)|y=f(x)\}\ y\ G=\{(x,y)|y=g(x)\}$$

$$F-G=\{(x,y)|y=f(x)-g(x)\}$$

Aquí encontraras un desglose de algunos puntos importantes que hay que tomar en cuenta y características importantes de esta operación:

Dominio de la resta: El dominio de $h(x)$ es la intersección de los dominios de $f(x)$ y $g(x)$, es decir, el conjunto de valores de x donde ambas funciones están definidas.

Ejemplo de cálculo: Si $f(x)=2x$ y $g(x)=x+3$, entonces la suma de $f(x)$ y $g(x)$ es:

$$h(x)=f(x)-g(x)=(2x)-(x+3)=2x-x-3=x-3$$

Ejemplo

1. Obtenga $F-G$ para las siguientes funciones:

$$F=\{(x,y)\mid y=2x^3+1;\ con\ x\in\mathbb{R}\}\ y\ G=\{(x,y)\mid y=x-1;\ con\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$D_F=\mathbb{R}\quad y\quad D_G=\mathbb{R}$$

$$D_{F-G}=D_F\cap D_G=\mathbb{R}$$

$$F-G=\{(x,y)|y=(2x^3+1)-(x-1);\ con\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$F-G=\{(x,y)|y=2x^3+1-x+1;\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$F-G=\{(x,y)|y=2x^3-x+2;\ x\in\mathbb{R}\}$$

2. Obtenga $F-G$ para las siguientes funciones:

$$F=\{(x,y)\mid y=x-5;\ con\ x\in\mathbb{R}\}\ y\ G=\{(x,y)\mid y=x+4;\ con\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$D_F=\mathbb{R}\quad y\quad D_G=\mathbb{R}$$

$$D_{F-G}=D_F\cap D_G=\mathbb{R}$$

$$F-G=\{(x,y)|y=(x-5)-(x+4);\ con\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$F-G=\{(x,y)|y=x-5-x-4;\ con\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$F-G=\{(x,y)|y=-9;\ con\ x\in\mathbb{R}\}$$



Actividad 6.



Resta de funciones

Instrucciones: para ver la actividad da clic en el enlace.

4.2.3 Producto

La operación **producto** entre dos funciones de variable real consiste en multiplicar los valores de las funciones (multiplicando los coeficientes numéricos, aplicando leyes de los exponentes y términos semejantes) en cada punto de su dominio común. Si tienes dos funciones reales $f(x)$ y $g(x)$, su producto se define como una nueva función $h(x)$, tal que:

$$h(x)=(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

O visto de otro modo:

$$F=\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}\ y\ G=\{(x,y)\,|\,y=g(x)\}$$

$$FG=\{(x,y)\,|\,y=f(x)g(x)\}$$

Aquí encontrarás un desglose de algunos puntos importantes que hay que tomar en cuenta y características importantes de esta operación:

Dominio del producto: El dominio de $h(x)$ es la intersección de los dominios de $f(x)$ y $g(x)$, es decir, el conjunto de valores de x donde ambas funciones están definidas.

Ejemplo de cálculo: Si $f(x)=2x$ y $g(x)=x+3$, entonces el producto de $f(x)$ y $g(x)$ es:

$$h(x)=f(x)\cdot g(x)=(2x)\cdot(x+3)=2x^2+6x$$

Esta operación es muy útil en diversos contextos, como en física y economía, donde se multiplican funciones para modelar cantidades combinadas o dependientes.

Ejemplo

Obtenga FG para las siguientes funciones:

$$F=\{(x,y) \mid y = 2x^2 + 1; \textit{donde } x \in R\} \text{ y } G = \{(x,y) \mid y = x - 1; \textit{donde } x \in R\}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$FG = \{(x,y) \mid y = (2x^2+1)(x-1); x \in R\}$$

$$FG = \{(x,y) \mid y = (2x^3-2x^2+x-1); x \in R\}$$

2. Obtenga $(5F)(2G)$ para las siguientes funciones:

$$F=\{(x,y) \mid y = x - 5; \textit{donde } x \in R\} \text{ y } F = \{(x,y) \mid y = x + 4; \textit{donde } x \in R\}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$FG=\{(x,y) \mid y = (5)(x-5)(2)\ (x+4); x \in R\}$$

$$FG=\{(x,y) \mid y = (5x-25)\ (2x+8); x \in R\}$$

$$FG=\{(x,y) \mid y = (10x^2-10x-200); x \in R\}$$

$F=\{(x,y)=\mid y=x^2-2x+1; \textit{donde } x \in R\}$ y $G=\{(x,y)=\mid y = x + 2; \textit{donde } x \in R\}$

a. FG

b. $(2)(FG)$

c. $(2F)(G)$

d. $(3F)(5G)$

e. $(5)(FG)$

Soluciones:

a. $FG = x^3-3x+2$

b. $(2)(FG)=2x^3-6x+4$

c. $(2F)(G)= 2x^3-6x+4$

d. $(3F)(5G)= 15x^3-45x+30$

e. $(5)(FG)= 5x^3-45x+30$

Actividad 7.

Producto

Instrucciones: para ver la actividad da clic en el enlace.



Actividad 3.

Lenguaje común y lenguaje algebraico

Instrucciones: para reforzar lo antes visto se te pide dar clic en el enlace, descarga el formato y resuelve el ejercicio según las instrucciones de tu docente.

1.2 Operaciones con expresiones polinomiales

Los operadores son los símbolos que nos indican la operación que debemos realizar. (+) Suma, (-) resta, (÷) división, (x) multiplicación.

Cuando ves el símbolo de suma, sabes que debes de sumar dos o más términos; cuando vez el de resta, sabes que debes restarlos. En pensamiento matemático, los símbolos + y - no tienen cambios, pero los símbolos de multiplicación y división se escriben de otra forma.

1.2.1 Suma

Para sumar términos, se debe observar que sean términos semejantes, se suman solo los coeficientes numéricos y se coloca la misma parte literal.

Ejemplo:
Realiza la siguiente suma:

$5x^2 + 3x^2 + 6x^2 = x^2\,(5+3+6)$ Se realiza la suma de los coeficientes numéricos

$=14x^2$ se obtiene el resultado

$6m^3+8n^2+5m^3+3m^3+9n^2 = m^2\,(6+5+3) + n^2(8+9)$ Se realizan las sumas de los coeficientes numéricos, considerando los términos semejantes

$=14m^3+17n^2$ se obtiene el resultado final

4.2.4 Cociente

Además del **producto,** otra operación importante entre funciones de variable real es el cociente. Al igual que el producto, el cociente de dos funciones produce una nueva función que representa la división de sus valores en cada punto de su dominio común.

Si tenemos dos funciones reales $f(x)$ y $g(x)$, su cociente se define como una nueva función $\mathrm{h(x)}$, tal que:

$$h(x)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

Dominio del cociente: El dominio de $h(x)$ es la intersección del dominio de $f(x)$ con el dominio de $g(x)$, excluyendo los puntos donde $g(x)=0$, ya que la división por cero no está definida.

Ejemplo de cálculo: Si $f(x)=6x$ y $g(x)=x+2$, entonces el cociente de $f(x)$ y $g(x)$ es:

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{6x}{x+2}, x\neq -2$$

Las operaciones de producto y cociente entre funciones son fundamentales en cálculo y análisis, ya que permiten construir y analizar relaciones complejas entre variables en diversas disciplinas, como física, ingeniería y economía.

Ejemplo:

Obtenga para las siguientes funciones:

$F=\{(x,y)\mid y=x^2-1;\ donde\ \ x\in R\}$ y $F=\{(x,y)\mid y=x+1;\ donde\ \ x\in R\}$

Nota: Aplicaremos lo aprendido en el módulo 1, el punto 1.4.3 Diferencia de cuadrados, y ello nos ayudara a poder reducir la división.

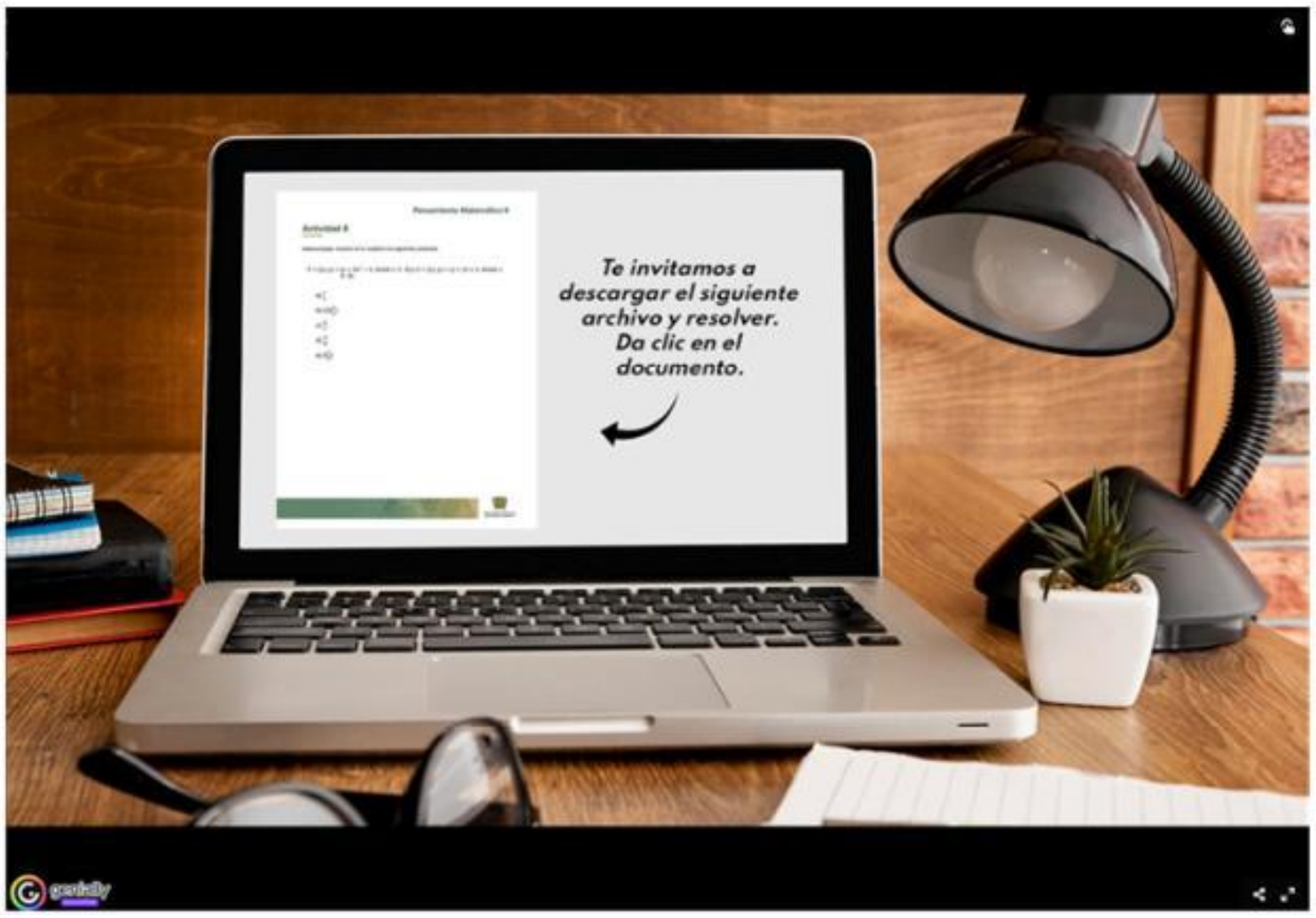
$=\{(x,y)\mid y=(x-1)(x+1)/((x+1));\ x\in R\}$

$=\{(x,y)\mid y=x-1;\ x\in R\}$

2. Obtenga para las siguientes funciones:

$F=\{(x,y)\mid y=x-5;\ donde\ x\in R\}$ y $F=\{(x,y)\mid y=x+4;\ donde\ x\in R\}$

$=\{(x,y)\mid y=((x-5))/((x+4));\ x\in R\}$





Actividad 8.

Cociente

Instrucciones: para ver la actividad da clic en el enlace.

4.3 Ecuación lineal

4.3.1 Definición

Una ecuación lineal es una expresión matemática que describe una relación de proporcionalidad constante entre dos variables. En su forma más común, se presenta como:

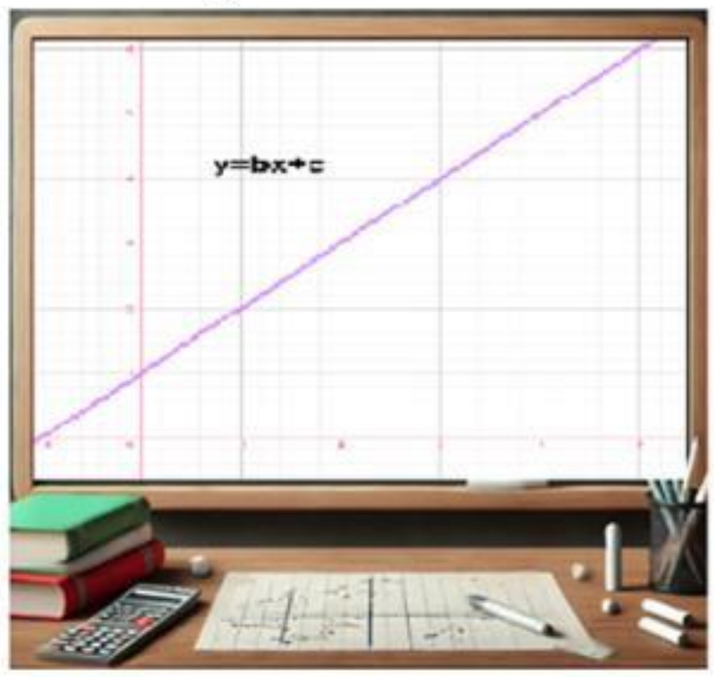
$$y = bx + c$$

donde:

- y es la variable dependiente (el valor que queremos encontrar),
- x es la variable independiente (el valor que elegimos),
- b representa un valor numérico (la tasa de cambio de y con respecto a x),
- c es un valor numérico, es el termino independiente e intercepto en y, que indica el punto donde la línea cruza el eje y cuando $x = 0$.

Las ecuaciones lineales representan relaciones directas y constantes, es decir, cuando una variable cambia, la otra lo hace en proporción constante. En un gráfico, siempre formarán una línea recta, de ahí el término "lineal".

Figura 4. Ecuación lineal



Nota. Fuente: González, G. P. (2024). Elaboración propia [Ecuación Lineal]

4.3.2 Propiedades de igualdades

Las igualdades en matemáticas tienen propiedades clave que nos permiten manipular y resolver ecuaciones de forma consistente. Aquí tienes las principales propiedades de las igualdades:

Propiedad reflexiva

Cualquier cantidad es igual a sí misma.

$$a = a$$

Propiedad simétrica

Si una cantidad es igual a otra, se puede invertir la igualdad.

$$a + b = b + a$$

Propiedad transitiva

Si una cantidad es igual a una segunda y la segunda es igual a una tercera, entonces la primera es igual a la tercera.

$$si\ x = y,\ y = z,\ entonces\ x = z$$

Propiedad de adición

Se puede sumar el mismo valor en ambos lados de una igualdad sin alterar su validez.

$$x + y = z,\ entonces\ n + (x + y) = n + z$$

Propiedad de sustracción

Se puede restar el mismo valor en ambos lados de una igualdad sin alterar su validez.

$$x + y = z,\ entonces\ n - (x + y) = n - z$$

Propiedad de multiplicación

Se puede multiplicar ambos lados de una igualdad por el mismo valor sin alterar su validez, siempre que el valor no sea cero.

$$(x)(y) = z,\ entonces\ (n)(x + y) = (n)(z)$$

Propiedad de división

Se puede dividir ambos lados de una igualdad por el mismo valor sin alterar su validez, siempre que el valor no sea cero.

$$(x/y) = z,\ entonces\ (n)/(x+y) = (n)/(z)$$

Estas propiedades son la base para resolver ecuaciones en matemáticas, permitiendo transformar y simplificar igualdades de forma lógica y ordenada.

4.3.3 Solución

Dar solución a la ecuación lineal significa encontrar el valor de la incógnita.

Con a y b números reales y $b \neq 0$. Su solución es $x = \frac{c}{b}$

Para resolver una ecuación debemos despejar la variable x como en los siguientes ejemplos.

Ejemplo

1. Resolver la ecuación $2x - 8 = 4 - x$.

$2x - 8 = 4 - x$	Seleccionar los términos con variable x y los términos independientes.
$2x + x = 8 + 4$	Dejar del lado izquierdo los términos con x y del lado derecho los términos independientes. Teniendo cuidado que x, que está restando, pasa al otro lado sumando, y 8 que resta, pasa al otro lado sumando.
$3x = 12$	Se realizan las operaciones de cada lado.
$x = \frac{12}{3}$	Se despeja la variable x. Cuidando que 3 que multiplica pasa al otro lado dividiendo.
$x = 4$	Se simplifica y se obtiene el **Resultado**

Comprobación: para comprobar la solución es suficiente con sustituir el resultado en la ecuación original y obtener una igualdad.

$2x - 8 = 4 - x$	Seleccionar x de ambos lados.
$2(4) - 8 = 4 - (4)$	Sustituir la variable x por el resultado.
$8 - 8 = 4 - 4$	Realizar las operaciones.
$0 = 0$	Se tiene una igualdad. Es correcto.

2. Resolver la ecuación $8x+20=2-4x$.

$8x + 20 = 2 - 4x$	Seleccionar los términos con variable x y los términos independientes.
$8x + 4x = 2 - 20$	Dejar del lado izquierdo los términos con x y del lado derecho los términos independientes. Teniendo cuidado que 4x que está restando pasa al otro lado sumando y 20 que suma pasa al otro lado restando.
$12x = -18$	Se realizan las operaciones de cada lado.
$x = -\frac{18}{12}$	Se despeja la variable x. Cuidando que 6, que multiplica, pasa al otro lado dividiendo.
$x = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$	Se simplifica.
$x = -\frac{3}{2}$	Resultado

Comprobación: para comprobar la solución es suficiente con sustituir el en la ecuación original y obtener una igualdad.

$8x + 20 = 2 - 4x$	Seleccionar x de ambos lados.

$8\left(-\frac{3}{2}\right)+20=2-4\left(-\frac{3}{2}\right)$ Sustituir la variable x por el resultado.

$-12+20=2+6$ Realizar las operaciones.

$8=8$ Se tiene una igualdad. Es correcto.



Actividad 9.

Ecuaciones lineales con una variable

Instrucciones: para ver la actividad da clic en el enlace.

4.3.4 Representación gráfica de una ecuación lineal

La forma general de escribir una ecuación lineal con una variable es: $ax+b=0$, al representar dicha ecuación de forma gráfica en el plano cartesiano, se observará que genera una línea recta, para lo cual se debe expresar como: $y=ax+b$ que, en términos de geometría analítica, se conoce como la **ecuación de la recta pendiente ordenada al origen** y en términos algebraicos es una **función lineal.** Para poder graficar cualquier ecuación se pueden realizar dos procedimientos que son el de tabulación y el de intercepción con los ejes coordenados; este último se describirá de forma detallada.

Método: intercepciones con los ejes coordenados

Este método consiste en ubicar dos puntos en el plano cartesiano que al unirlos generan la línea recta como lugar geométrico de una ecuación lineal.

El procedimiento por seguir es el siguiente :

a. Expresar la ecuación dada en la forma $y=ax+b$

b. Suponer que x=0, entonces la ecuación anterior queda $y=b$

c. Ubicar en el plano cartesiano el punto $(0,b)$

d. Suponer que $y = 0$

e. Resolver la ecuación lineal anterior, quedando, $x = -\frac{b}{a}$ que es la solución de la ecuación.

f. Ubicar en el plano cartesiano el punto $(-\frac{b}{a}, 0)$

g. Unir los puntos para generar la recta que representa gráficamente a la ecuación lineal dada.

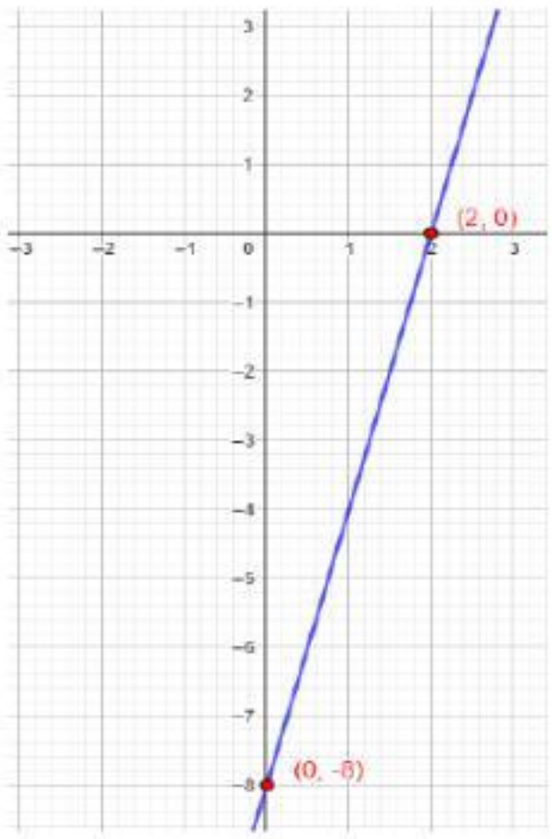
Nota: para la ejecución gráfica de este método, se pueden auxiliar de la aplicación GeoGebra.

Ejemplos

Realizar la gráfica de las ecuaciones dadas mediante el procedimiento de intercepciones con los ejes coordenados.

1. $7x + 2 = 3x + 10$

$7x + 2 = 3x + 10$ $7x - 3x + 2 - 10 = 0$ $4x - 8 = 0$ $y = 4x - 8$	Expresar la ecuación dada en la forma: $y = ax + b$
$y = 4\,(0) - 8$ $y = -8$	Suponer que x=0
$(0, -8)$	Ubicar en el plano cartesiano el punto
$4x - 8 = 0$	Suponer que y=0
$x = -\frac{-8}{4}$ $x = 2$	Resolver la ecuación lineal anterior
$(2, 0)$	Ubicar en el plano cartesiano el punto



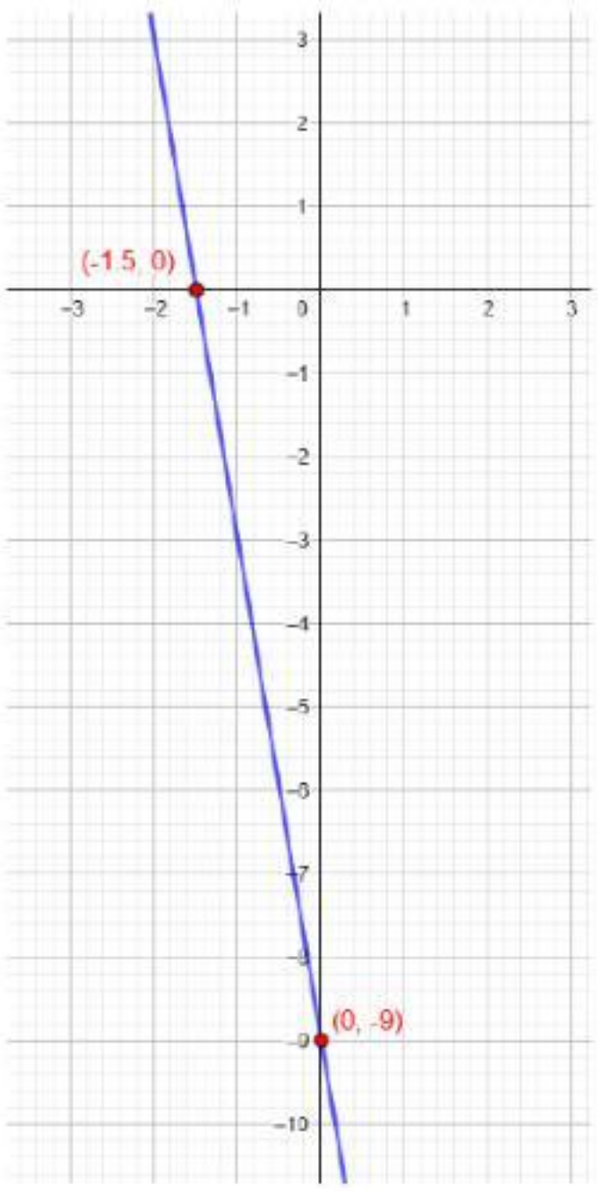
Nota. Fuente: Ortega, N. A. (2024) Creación propia. [Gráfica de la función $y = 4x - 8$]

Unir los puntos para generar la recta que representa gráficamente la ecuación:

$$y = 4x - 8$$

2. $7x - 4 = 13x + 5$

$7x - 4 = 13x + 5$ $7x - 13x - 4 - 5 = 0$ $-6x - 9 = 0$ $y = -6x - 9$	Expresar la ecuación dada en la forma: $y = ax + b$
$y = -6\,(0) - 9$ $y = -9$	Suponer que $x = 0$
$(0, -9)$	Ubicar en el plano cartesiano el punto
$-6x - 9 = 0$	Suponer que $y = 0$
$x = -\frac{9}{6}$ $x = -1.5$	Resolver la ecuación lineal anterior
$(-1.5, 0)$	Ubicar en el plano cartesiano el punto



Nota. Fuente: Ortega, N. A. (2024) Creación propia. [Gráfica de la función $y = -6x - 9$]

Unir los puntos para generar la recta que representa gráficamente la ecuación:

$y = -6x - 9$



Actividad 10.



Representación gráfica de una ecuación lineal

Instrucciones: aplicando el procedimiento descrito en los ejemplos, contesta lo que se pide, realiza la actividad solo da clic en el enlace para comenzar.

4.4 Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

4.4.1 Definición

Un sistema de ecuaciones lineales (SEL) de dos ecuaciones con dos variables denotado por 2x2, se define como:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

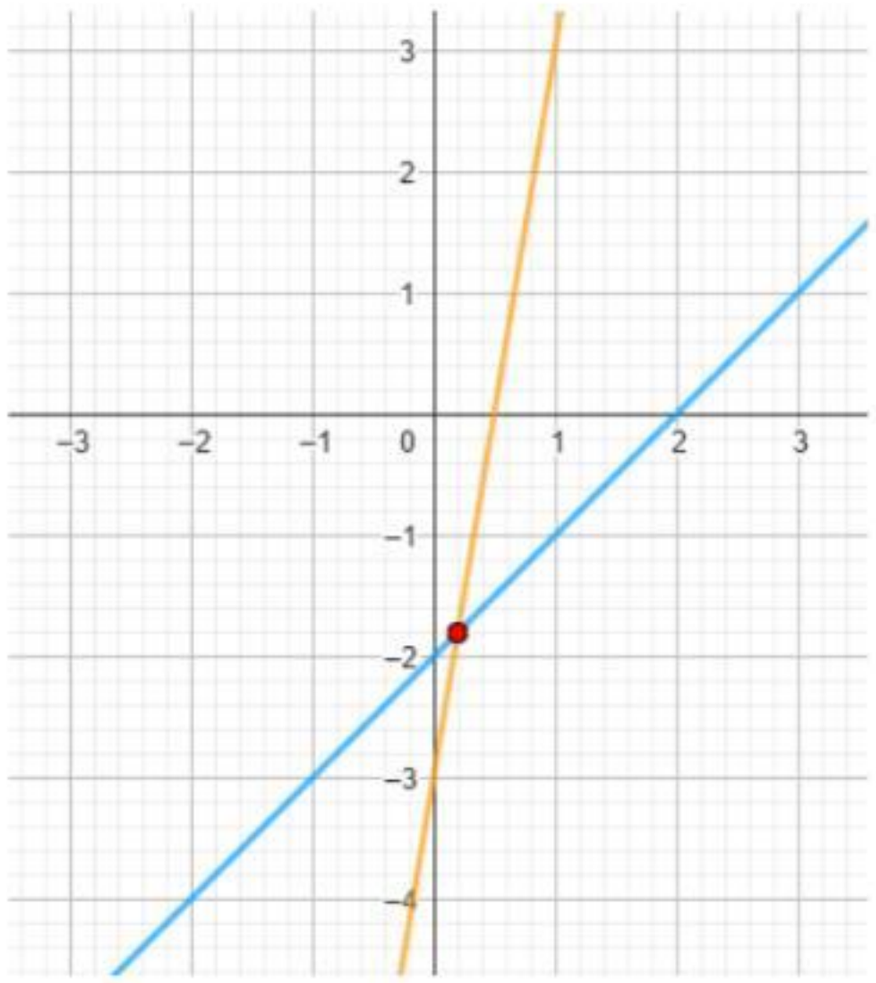
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y $c_2 \in R; x \wedge y$ *son las variables*

Del tema anterior, se sabe que una ecuación lineal con una variable representa gráficamente una recta en el plano cartesiano, así que, un SEL de manera gráfica representa dos rectas.

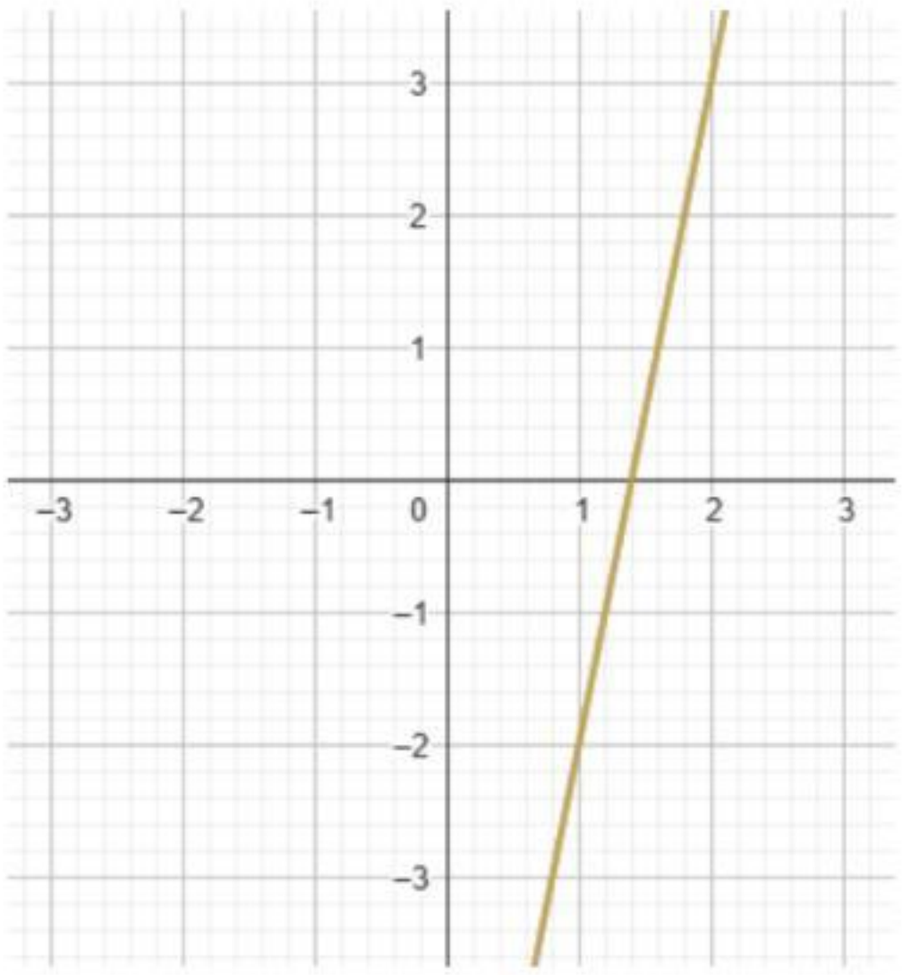
Un SEL puede tener los siguientes casos para su solución:

1. **Solución única:** al resolver el sistema mediante un método válido se encuentra un valor para x y un valor para y, es decir, gráficamente las rectas coinciden en un punto.



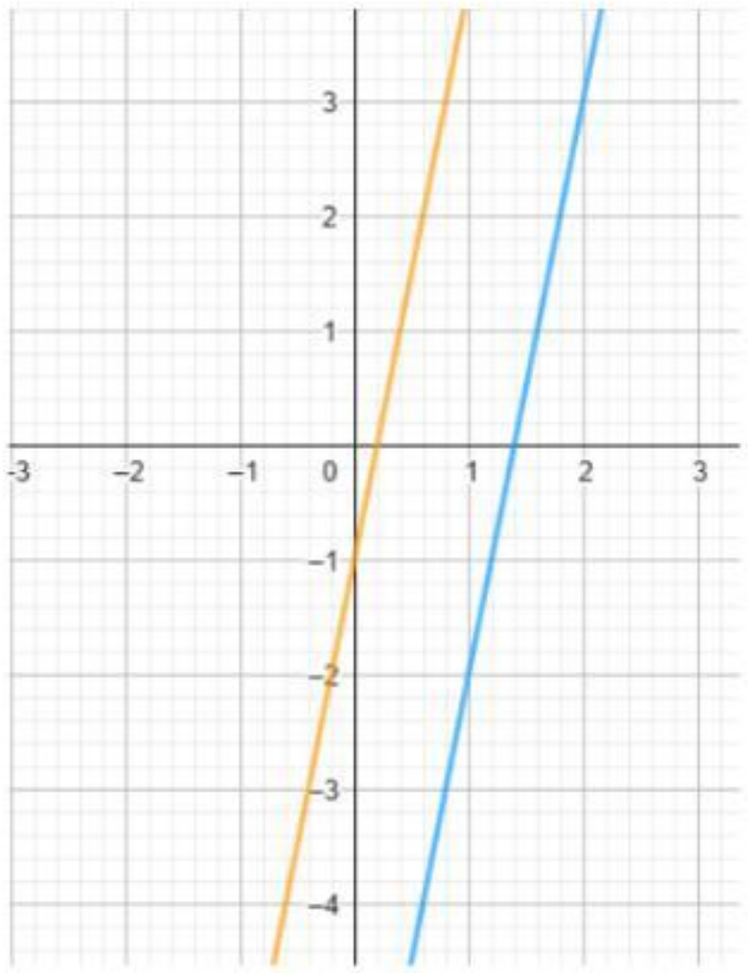
Nota. Fuente: Ortega, N. A. (2024) Creación propia. [Solución única de un SEL].

2. **Solución infinita:** Las rectas son coincidentes en todos sus puntos, es decir, gráficamente son rectas iguales.



Nota. Fuente: Ortega, N. A. (2024) Creación propia. [SEL solución infinita].

3. **Sin solución:** Las rectas no son coincidentes en ningún punto, es decir, gráficamente las rectas son paralelas.



Nota. Fuente: Ortega, N. A. (2024) Creación propia. [SEL sin solución].

Para poder obtener la solución del SEL se debe ejecutar un procedimiento correcto establecido por los llamados métodos de solución que son los que a continuación se describen:

4.4.2 Métodos de solución

Son procedimientos o técnicas o reglas que se deben seguir para determinar el valor numérico de las variables x y y involucradas en el SEL, siendo estos:

4.4.2.1 Suma y resta

Este método también es conocido como de reducción, ya que tiene por objetivo mediante operaciones básicas reducir el sistema a una ecuación de primer grado con una variable eliminando una de estas, el procedimiento a seguir es:

a. Seleccionar la variable que se va a eliminar.
b. Multiplicar ambas ecuaciones por valores, de tal manera que los coeficientes de la variable seleccionada sean igual en valor, pero diferentes en signo.
c. Sumar o restar ambas variables por términos semejantes.
d. Resolver la ecuación lineal con una variable resultante para determinar el valor numérico de la variable.
e. Sustituir el valor de la variable del paso anterior en alguna de las ecuaciones del SEL.
f. Resolver la ecuación lineal con una variable resultante para determinar el valor numérico de la variable.
g. Con los valores numéricos obtenidos para cada variable, realizar la comprobación, sustituyendo en cada ecuación del SEL.

Ejemplos

Mediante el procedimiento del método de suma y resta para solucionar un SEL, resolver:



Actividad 4.



Suma de expresiones algebraicas

Instrucciones: a continuación, se anexa una ruleta, la cual deberás girar y de acuerdo con el resultado deberás resolver en tu cuaderno de forma correcta.

1.2.2 Resta

Para restar términos, se debe observar que sean semejantes. Luego se restan solo los coeficientes numéricos y se coloca la misma parte literal.

Ejemplo: realiza las siguientes restas:

1.

$5x^4 - 8x^4$

$= x^4\,(5-8)$ Se realiza la resta de los coeficientes numéricos.

$= -3x^4$ Al realizar la diferencia se multiplica por la variable.

$= -3x^4$ **Resultado**

2.

$(5m^3+7n^5) - (8m^3+9n^5)$

$= (5m^3 - 8m^3) + (7n^5 - 9n^5)$ Se agrupan términos semejantes.

$= m^3\,(5-8) + n^5\,(7-9)$ Se realiza la resta de los coeficientes numéricos.

$= -3m^3 + (-2)n^5$ Al realizar la diferencia se multiplica por la parte literal.

$= -3m^3 - 2n^5$ **Resultado**

Es momento de practicar lo aprendido.

1.

$$4x - 7y = 1$$
$$-5x - 9y = -19$$

$4x - 7y = 1$ $-5x - 9y = -19$	Se eliminará la variable x del SEL
(5) $4x - 7y = 1$ (4) $-5x - 9y = -19$	Multiplicar: La ecuación: $4x - 7y = 1$ por 5 La ecuación: $-5x - 9y = -19$ por 4
$20x - 35y = 5$ $-20x - 36y = -76$ $0x - 71y = -71$	Sumar ambas ecuaciones mediante términos semejantes
$-71y = -71$ $y = -\frac{71}{-71}$ $y = 1$	Resolver la ecuación resultante
$4x - 7(1) = 1$ $4x - 7 = 1$ $4x = 1 + 7$ $4x = 8$ $x = \frac{8}{4}$ $x = 2$	Sustituir el valor de $y = 1$ en la ecuación $4x - 7y = 1$
$4(2) - 7(1) = 1$ $8 - 7 = 1$ $1 = 1$ $-5(2) - 9(1) = -19$ $-10 - 9 = -19$ $-19 = -19$	Comprobar sustituyendo en ambas ecuaciones $x = 2, y = 1$

2.

$$7x - y = 25$$
$$2x + 3y = -6$$

$7x - y = 25$ $2x + 3y = -6$	Se eliminará la variable y del SEL
(3) $7x - y = 25$ (1) $2x + 3y = -6$	Multiplicar: La ecuación: $7x - y = 25$ por 3 La ecuación: $2x + 3y = -6$ por 1
$21x - 3y = 75$ $2x + 3y = -6$ $23x - 0y = 69$	Sumar ambas ecuaciones mediante términos semejantes

$23x = 69$ $x = \frac{69}{23}$ $x = 3$	Resolver la ecuación resultante
$2(3) + 3y = -6$ $6 + 3y = -6$ $3y = -6 - 6$ $3y = -12$ $y = -\frac{-12}{3}$ $y = -4$	Sustituir el valor de $x = 3$ en la ecuación $2x + 3y = -6$
$7(3) - (-4) = 25$ $21 + 4 = 25$ $25 = 25$ $2(3) + 3(-4) = -6$ $6 - 12 = -6$ $-6 = -6$	Comprobar sustituyendo en ambas ecuaciones $x = 3, y = -4$

3.

$$-6x + 5y = 2$$
$$x + 2y = -6$$

$-6x + 5y = 2$ $x + 2y = -6$	Se eliminará la variable y del SEL
$(-2) \quad -6x + 5y = 2$ $(5) \quad x + 2y = -6$	Multiplicar: La ecuación: $-6x + 5y = 2$ por -2 La ecuación: $x + 2y = -6$ por 5
$12x - 10y = -4$ $5x + 10y = -30$ $17x - 0y = -34$	Sumar ambas ecuaciones mediante términos semejantes
$17x = -34$ $x = -\frac{-34}{17}$ $x = -2$	Resolver la ecuación resultante
$-6(-2) + 5y = 2$ $12 + 5y = 2$ $5y = 2 - 12$ $5y = -10$ $y = \frac{-10}{5}$ $y = -2$	Sustituir el valor de $x = -2$ en la ecuación $-6x + 5y = 2$

$-6(-2)+5(-2)=2$

$12-10=2$

$2=2$

$(-2)+2(-2)=-6$

$-2-4=-6$

$-6=-6$

Comprobar sustituyendo en ambas ecuaciones $x=-2, y=-2$



Actividad 11.



Método de suma y resta para SEL

Instrucciones: aplicando el procedimiento descrito para el método de suma y resta en los ejemplos, resuelve los SEL planteados y contesta lo que se pide, realiza la actividad, solo da clic en el enlace para comenzar.

4.4.2.2 Sustitución

Este método consiste en despejar una variable y sustituirla en la otra ecuación, el procedimiento a seguir es:

a. Despejar una variable de alguna de las ecuaciones del SEL .
b. Sustituir la variable despejada en la otra ecuación del SEL.
c. Resolver la ecuación lineal con una variable para determinar el valor numérico de la variable.
d. Sustituir el valor encontrado en el paso anterior en la ecuación del paso a) para determinar el valor numérico de la otra variable.
e. Con los valores numéricos obtenidos para cada variable, realizar la comprobación, sustituyendo en cada ecuación del SEL.

Ejemplos

Mediante el procedimiento del método de sustitución para solucionar un SEL, resolver:

1.

$$7x - y = 25$$
$$2x + 3y = -6$$

$y = 7x - 25$	Despejar la variable y de: $7x - y = 25$
$2x + 3(7x - 25) = -6$	Sustituir: $y = 7x - 25$ en $2x + 3y = -6$
$2x + 21x - 75 = -6$ $23x = -6 + 75$ $23x = 69$ $x = \frac{69}{23}$ $x = 3$	Resolver la ecuación del paso anterior
$y = 7(3) - 25$ $y = 21 - 25$ $y = -4$	Sustituir $x = 3$ en $y = 7x - 25$
$7(3) - (-4) = 25$ $21 + 4 = 25$ $25 = 25$ $2(3) + 3(-4) = -6$ $6 - 12 = -6$ $-6 = -6$	Comprobar sustituyendo en ambas ecuaciones $x = 3, y = -4$

2.

$$-6x + 5y = 2$$
$$x + 2y = -6$$

$x = -6 - 2y$	Despejar la variable x de: $x + 2y = -6$
$-6(-6 - 2y) + 5y = 2$	Sustituir: $x = -6 - 2y$ en $-6x + 5y = 2$
$36 + 12y + 5y = 2$ $17y = 2 - 36$ $17y = -34$ $x = -\frac{-34}{17}$ $y = -2$	Resolver la ecuación del paso anterior
$x = -6 - 2(-2)$ $x = -6 + 4$ $x = -2$	Sustituir $y = -2$ en $x = -6 - 2y$
$-6(-2) + 5(-2) = 2$ $12 - 10 = 2$ $2 = 2$ $(-2) + 2(-2) = -6$ $-2 - 4 = -6$ $-6 = -6$	Comprobar sustituyendo en ambas ecuaciones $x = -2, y = -2$

3.

$$4x - 7y = 1$$
$$-5x - 9y = -19$$

$x = \frac{1+7y}{4}$	Despejar la variable x de: $4x - 7y = 1$
$-5\left(\frac{1+7y}{4}\right) - 9y = -19$	Sustituir: $x = \frac{1+7y}{4}$ en $-5x - 9y = -19$
$\frac{-5-35y}{4} - 9y = -19$ $-5 - 35y - 36y = -76$ $-71y = -76 + 5$ $-71y = -71$ $y = -\frac{71}{-71}$ $y = 1$	Resolver la ecuación del paso anterior se debe recordar aplicar las propiedades de la igualdad para poder realizar el despeje y por ende las operaciones aritméticas.
$x = \frac{1+7(1)}{4}$ $x = \frac{8}{4}$ $x = 2$	Sustituir $y = 1$ en $x = \frac{1+7y}{4}$
$4(2) - 7(1) = 1$ $8 - 7 = 1$ $1 = 1$ $-5(2) - 9(1) = -19$ $-10 - 9 = -19$ $-19 = -19$	Comprobar sustituyendo en ambas ecuaciones $x = 2, y = 1$



Actividad 12.



Método de sustitución para SEL

Instrucciones: aplicando el procedimiento descrito para el método de sustitución en los ejemplos, resuelve los SEL planteados y contesta lo que se pide, realiza la actividad, solo da clic en el enlace para comenzar.

4.4.2.3 Igualación

Este método consiste en despejar la misma variable de ambas ecuaciones. Para poder igualar, el procedimiento a seguir es:

a. Despejar la misma variable de ambas ecuaciones del SEL .
b. Igualar ambas ecuaciones obtenidas en el paso anterior.
c. Resolver la ecuación lineal con una variable para determinar el valor numérico de la variable.
d. Sustituir el valor obtenido en el paso anterior en alguna de las expresiones del paso a) para determinar el valor numérico de la otra variable.
e. Con los valores numéricos obtenidos para cada variable, realizar la comprobación, sustituyendo en cada ecuación del SEL.

Ejemplos

Mediante el procedimiento del método de sustitución para solucionar un SEL, resolver:

1.

$$-6x + 5y = 2$$
$$x + 2y = -6$$

$x = \frac{2-5y}{-6}$ $x = -6 - 2y$	Despejar la variable x de ambas ecuaciones
$\frac{2-5y}{-6} = -6 - 2y$	Igualar las ecuaciones del paso anterior.
$2 - 5y = -6\,(-6 - 2y)$ $2 - 5y = 36 + 12y$ $-5y - 12y = 36 - 2$ $-17y = 34$ $x = -\frac{34}{-17}$ $y = -2$	Resolver la ecuación del paso anterior
$x = \frac{2-5(-2)}{-6}$ $x = \frac{2+10}{-6}$ $x = \frac{12}{-6}$ $x = -2$	Sustituir $y = -2$ en $x = \frac{2-5y}{-6}$ o en $x = -6 - 2y$ y resolver
$-6(-2) + 5(-2) = 2$ $12 - 10 = 2$ $2 = 2$ $(-2) + 2(-2) = -6$ $-2 - 4 = -6$ $-6 = -6$	Comprobar sustituyendo en ambas ecuaciones $x = -2, y = -2$

2.

$$4x - 7y = 1$$
$$-5x - 9y = -19$$

$y = \frac{4x-1}{7}$ $y = \frac{-5x+19}{9}$	Despejar la variable y de ambas ecuaciones, aplicando las propiedades de la igualdad.
$\frac{4x-1}{7} = \frac{-5x+19}{9}$	Igualar las ecuaciones del paso anterior
$9(4x-1) = 7(-5x+19)$ $36x - 9 = -35x + 133$ $36x + 35x = 133 + 9$ $71x = 142$ $x = \frac{142}{71}$ $x = 2$	Resolver la ecuación del paso anterior
$y = \frac{-5(2)+19}{9}$ $y = \frac{-10+19}{9}$ $y = \frac{9}{9}$ $y = 1$	Sustituir $x = 2$ en $y = \frac{4x-1}{7}$ o en $y = \frac{-5x+19}{9}$ y resolver
$4(2) - 7(1) = 1$ $8 - 7 = 1$ $1 = 1$ $-5(2) - 9(1) = -19$ $-10 - 9 = -19$ $-19 = -19$	Comprobar sustituyendo en ambas ecuaciones $x = 2, y = 1$

3.

$$7x - y = 25$$
$$2x + 3y = -6$$

$y = 7x - 25$ $y = \frac{-6-2x}{3}$	Despejar la variable y de ambas ecuaciones
$7x - 25 = \frac{-6-2x}{3}$	Igualar las ecuaciones del paso anterior
$3(7x-25) = -6 - 2x$ $21x - 75 = -6 - 2x$ $21x + 2x = -6 + 75$ $23x = 69$ $x = \frac{69}{23}$ $x = 3$	Resolver la ecuación del paso anterior

$$y = \frac{-6-2(3)}{3}$$
$$y = \frac{-6-6}{3}$$
$$y = -\frac{-12}{3}$$
$$y = -4$$

Sustituir $x = 3$ en $y = \frac{-6-2x}{3}$ o en $y = 7x - 25$

y resolver

$$7(3) - (-4) = 25$$
$$21 + 4 = 25$$
$$25 = 25$$
$$2(3) + 3(-4) = -6$$
$$6 - 12 = -6$$
$$-6 = -6$$

Comprobar sustituyendo en ambas ecuaciones $x = 3, y = -4$

1.	$8x - 2y = 10$ $-5x - y = -13$	$x = 2$ $y = 3$
2.	$x + 9y = -2$ $2x + 5y = 9$	$x = 7$ $y = -1$
3.	$3x - 4y = -11$ $-4x + y = 19$	$x = -5$ $y = -1$
4.	$2x - 5y = 16$ $x - 2y = 7$	$x = 3$ $y = -2$
5.	$8x - 5y = 22$ $x + y = 6$	$x = 4$ $y = 2$

Actividad 13.

Método de igualación

Instrucciones: aplicando el procedimiento del método de igualación descrito en los ejemplos para determinar la solución de los SEL, copia en **tu cuaderno** los ejercicios y ejecuta el procedimiento correcto para su evaluación.

4.4.2.4 Regla de Cramer

Para definir y usar la regla de Cramer como método de solución de un sistema de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones y 2 variables, definiremos algunos conceptos previos.

Una matriz de tamaño 2x2 es un arreglo de números reales, generalmente denotada por letras mayúsculas y representada como sigue

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

Columna, Renglón 1, Renglón 2, Columna

Donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son números reales.

Ejemplos de matrices de tamaño 2x2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz de un arreglo de 4 componente se denota por |A| y define por

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

En los siguientes ejemplos se calculará el determinante de las matrices de tamaño 2x2

Ejemplo 1

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 4(-2)$ Calcular el determinante por la definición

$= 6 + 8$ Realizar las multiplicaciones

$= 14$ Resultado

Ejemplo 2

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 1(-3) - 8(5)$ Calcular el determinante por la definición

$= -3 - 40$ Realizar las multiplicaciones

$= -43$ Resultado

Ejemplo 3

$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -1(-2) - 2(1)$ Calcular el determinante por la definición

$= 2 - 2$ Realizar las multiplicaciones

$= 0$ Resultado

Una matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 es la que se obtiene al colocar los coeficientes de las variables en una matriz. Esto es

$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ la matriz de coeficientes es $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ (x, y)

Escribiremos la matriz de coeficientes de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 1

$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$ la matriz de coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2

$\begin{cases} -3x+5y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$ la matriz de coeficientes es $A=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 3

$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases}$ la matriz de coeficientes es $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

La regla de Cramer es una técnica que se remonta a mediados del siglo XVIII y lleva el nombre de su innovador, el matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752), que la introdujo en 1750 en *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques (Introducción al análisis de curvas algebraicas).* (Abramson, J., 2022).

Definición de la regla de Cramer

Dado un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 de la forma $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ tal que el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero, es decir $|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Los valores de las incógnitas x y y están dadas por:

$$x=\frac{|A_x|}{|A|} \text{ y } x=\frac{|A_y|}{|A|}$$

Donde

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

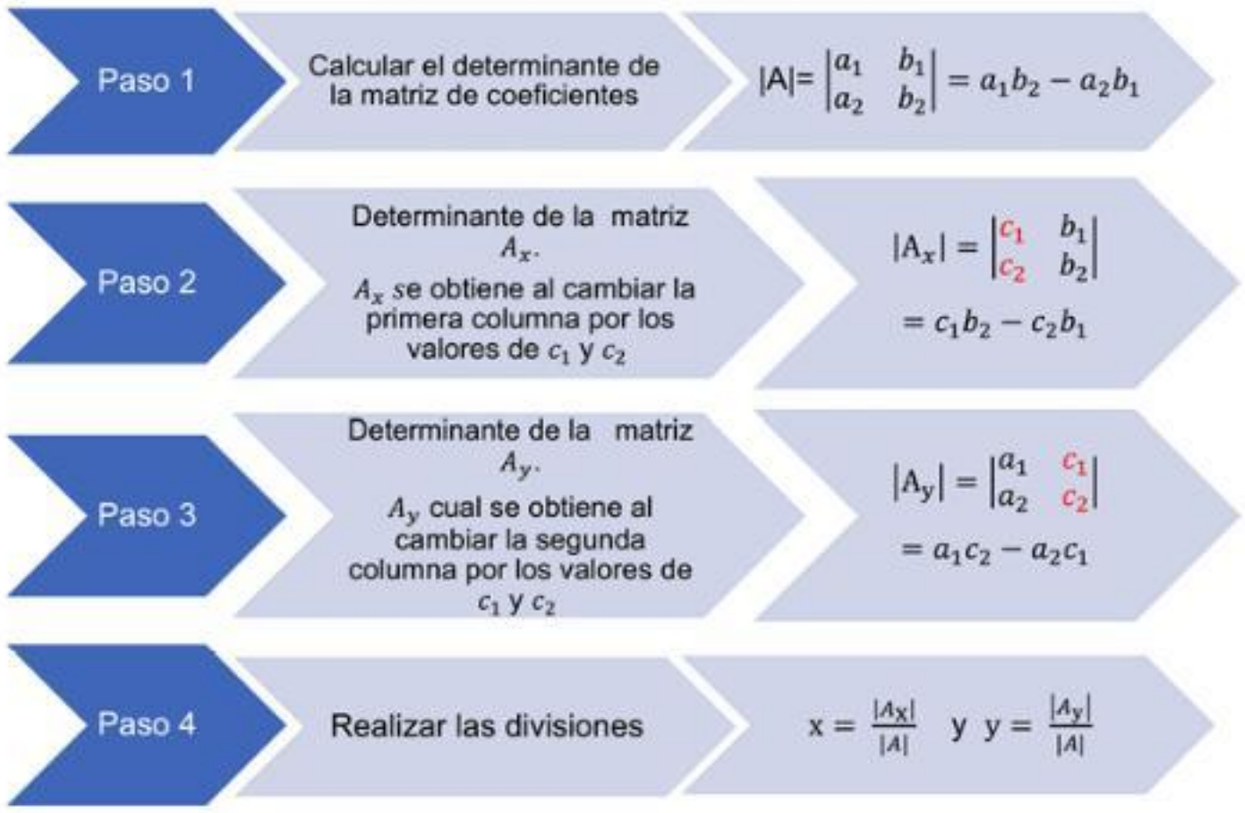
$$|A_x|=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Es importante mencionar que la regla de Cramer nos dará la solución única de un sistema de ecuaciones, si existe. Sin embargo, si el sistema no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, se indicará con un determinante de cero ($|A|=0$).

El proceso para desarrollar la regla de Cramer es:

Figura 12. Método de la regla de Cramer



Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Método de la regla de Cramer].



Actividad 5.

Resta de expresiones algebraicas

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da clic en el enlace y sigue las indicaciones.

1.2.3 Producto

Para multiplicar términos, se multiplican los coeficientes numéricos, posteriormente se multiplican las variables teniendo cuidado de respetar las leyes de los signos, de los exponentes y las propiedades de los números reales los cuales se muestran a continuación.

Tabla de leyes de los signos

Tabla 2

Leyes de los signos

$(+)(+) = +$	(1)
$(+)(-) = -$	(2)
	Multiplicación.
$(-)(+) = -$	(3)
$(-)(-) = +$	(4)
$(+) + (+) =$ *Se suman los números y el resultado es positivo*	(5)
	Suma.
$(+)+(-) =$ *Se restan los números y predomina el signo del mayor.*	(6)
$(-)+(+) =$ *Se restan los números y predomina el signo del mayor.*	(7)
$(-)+(-) =$ *Se suman los números y el resultado es negativo.*	(8)

Nota. Fuente: León, G.A. (2024). Elaboración propia.[Leyes de los signos].

Como los números reales $\mathbb{R}$ son un campo, cumplen las siguientes propiedades.

En los siguientes ejemplos verificaremos si el sistema tiene solución única, y obtenerla con el método de la regla de Cramer.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-3y=2 \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2(-3)-(1)1$$
$$=-6-1$$
$$=-7$$ Calcular el determinante de la matriz de coeficientes

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=3(-3)-2(1)$$
$$=-9-2$$
$$=-11$$ Calcular el determinante de la matriz de la matriz A_x

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2(2)-1(3)$$
$$=4-3$$
$$=1$$ Calcular el determinante de la matriz de la matriz A_y

$x=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}$ Valor de x

$y=\frac{1}{-7}=-\frac{1}{7}$ Valor de y

$\left(-\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)$ Solución

Ejemplo 2

$$\begin{cases} x-y=8 \\ x+y=6 \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1(1)-1(-1)$$
$$=1+1$$
$$=2$$ Calcular el determinante de la matriz de coeficientes

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=8(1)-6(-1)$$
$$=8+6$$
$$=14$$ Calcular el determinante de la matriz de la matriz A_x

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=1(6)-1(8)$$
$$=6-8$$
$$=-2$$ Calcular el determinante de la matriz de la matriz A_y

$x = \frac{14}{2} = 7$ Valor de x

$y = \frac{-2}{2} = -1$ Valor de y

$(7,-1)$ Solución

Ejemplo 3

$$\begin{cases} 3x+2y=12 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1)-1(2)$

$= -3-2$

$= -5$ Calcular el determinante de la matriz de coeficientes

$|A_x| = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 12(-1)-1(2)$

$= -12-2$

$= -14$ Calcular el determinante de la matriz de la matriz A_x

$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1)-1(12)$

$= 3-12$

$= -9$ Calcular el determinante de la matriz de la matriz A_y

$x = \frac{-14}{-5} = \frac{14}{5}$ Valor de x

$y = \frac{-9}{-5} = \frac{9}{5}$ Valor de y

$\left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5}\right)$ Solución

Ejemplo 4

$$\begin{cases} 2x+2y=9 \\ x+y=6 \end{cases}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1)-1(2)$

$= 2-2$

$= 0$ Calcular el determinante de la matriz de coeficientes

Como el $|A|=0$, podemos concluir que el sistema no tiene solución única.



Actividad 14.

Método de la regla de Cramer

Instrucciones: para ver la actividad da clic en el enlace.

4.4.2.5 Gráfico

Este método implica mostrar gráficamente las ecuaciones en un sistema de coordenadas cartesianas, con la solución situada en el punto de cruce entre las representaciones.

Este procedimiento resulta útil para los sistemas lineales con dos incógnitas, en los que la representación gráfica de cada ecuación es una línea recta, en caso de haber solución, esta es el punto donde las rectas se intersectan y es un solo punto. En otro caso, si las rectas graficadas son paralelas, el sistema no tiene solución, finalmente, si las rectas son idénticas, se dice que el sistema tiene infinitas soluciones.

Figura 13. Método gráfico

Paso 1	Como el sistema de ecuaciones está conformado con las variable (x) y (y) se procede a despejar la variable (y).
Paso 2	Para cada ecuación se construye la tabla de valores considerando mínimo dos puntos.
Paso 3	Se grafica cada ecuación según los valores de las tablas.
Paso 4	Se verifica gráficamente el punto de intersección, siendo dicha coordenada (x, y) la solución al sistema de ecuaciones.

Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Método gráfico].

Se sabe que para graficar una recta son suficientes dos puntos en el plano cartesiano, en este caso usaremos los puntos de intersección de cada recta con el eje x y con el eje y.

En los siguientes sistemas de ecuaciones lineales encontraremos las soluciones con el método gráfico.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 3x+2y=7 & E1 \\ 4x-3y=-2 & E2 \end{cases}$$

$$y=\frac{7-3x}{2}$$

Despejar de y de la ecuación $E1$, para tener la función de la recta $E1$

$$y=\frac{-2-4x}{-3}$$

Despejar de y de la ecuación $E2$ para tener la función de la recta $E2$

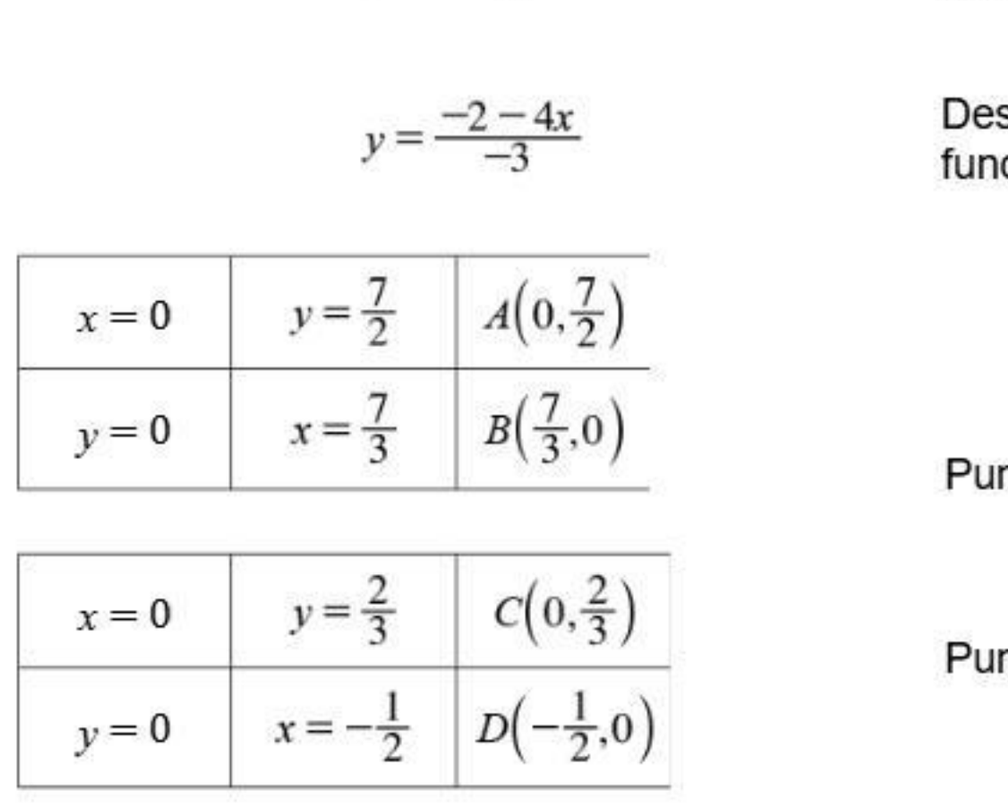
$x=0$	$y=\frac{7}{2}$	$A\left(0,\frac{7}{2}\right)$
$y=0$	$x=\frac{7}{3}$	$B\left(\frac{7}{3},0\right)$

Puntos de intersección de la recta $E1$

$x=0$	$y=\frac{2}{3}$	$C\left(0,\frac{2}{3}\right)$
$y=0$	$x=-\frac{1}{2}$	$D\left(-\frac{1}{2},0\right)$

Puntos de intersección de la recta $E2$

Figura 14. Método gráfico, ejemplo 1



Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Método gráfico, ejemplo 1]

Representación gráfica. Una vez ubicado el punto de intersección de las rectas, el cual es la solución del sistema de ecuaciones lineales, se hace la proyección sobre los ejes para verificar la pareja ordenada $(1,2)$

$(1,2)$

Solución

Ejemplo 2

$$\begin{cases} 2x+y=6 & E1 \\ 4x+3y=14 & E2 \end{cases}$$

$$y = 6-2x$$

Despejar de y de la ecuación $E1$

$$y = \frac{14-4x}{3}$$

Despejar de y de la ecuación $E2$

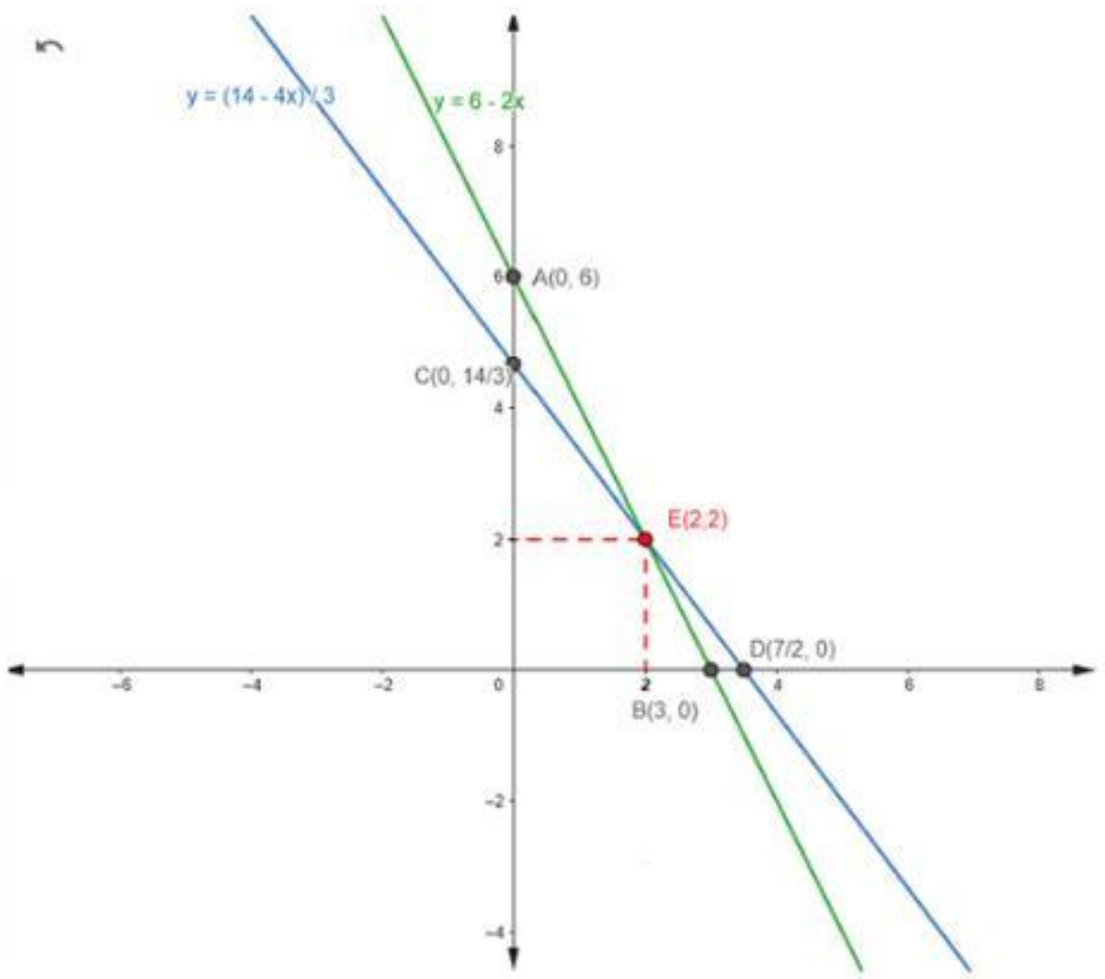
$x=0$	$y=6$	$A(0,6)$
$y=0$	$x=3$	$B(3,0)$

Puntos de intersección de la recta $E1$

$x=0$	$y=\frac{14}{3}$	$C\left(0,\frac{14}{3}\right)$
$y=0$	$x=\frac{7}{2}$	$D\left(\frac{7}{2},0\right)$

Puntos de intersección de la recta $E2$

Figura 15. Método gráfico, ejemplo 2



Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Método gráfico, ejemplo 2].

Representación gráfica. Una vez ubicado el punto de intersección de las rectas, se hace la proyección sobre los ejes para verificar la pareja ordenada $(2,2)$

$(2,2)$ Solución

En el siguiente ejemplo se observará que este método no siempre es la mejor opción, cuando hay

soluciones no enteras, pues resulta ser complicado encontrar las coordenadas de manera sencilla al ser fracciones o números con decimales.

Ejemplo 3

$$\begin{cases} 2x-3y=7 & E1 \\ 3x-2y=-4 & E2 \end{cases}$$

$y=\frac{7-2x}{-3}$ Despejar de y de la ecuación $E1$

$y=\frac{-4-3x}{-2}$ Despejar de y de la ecuación $E2$

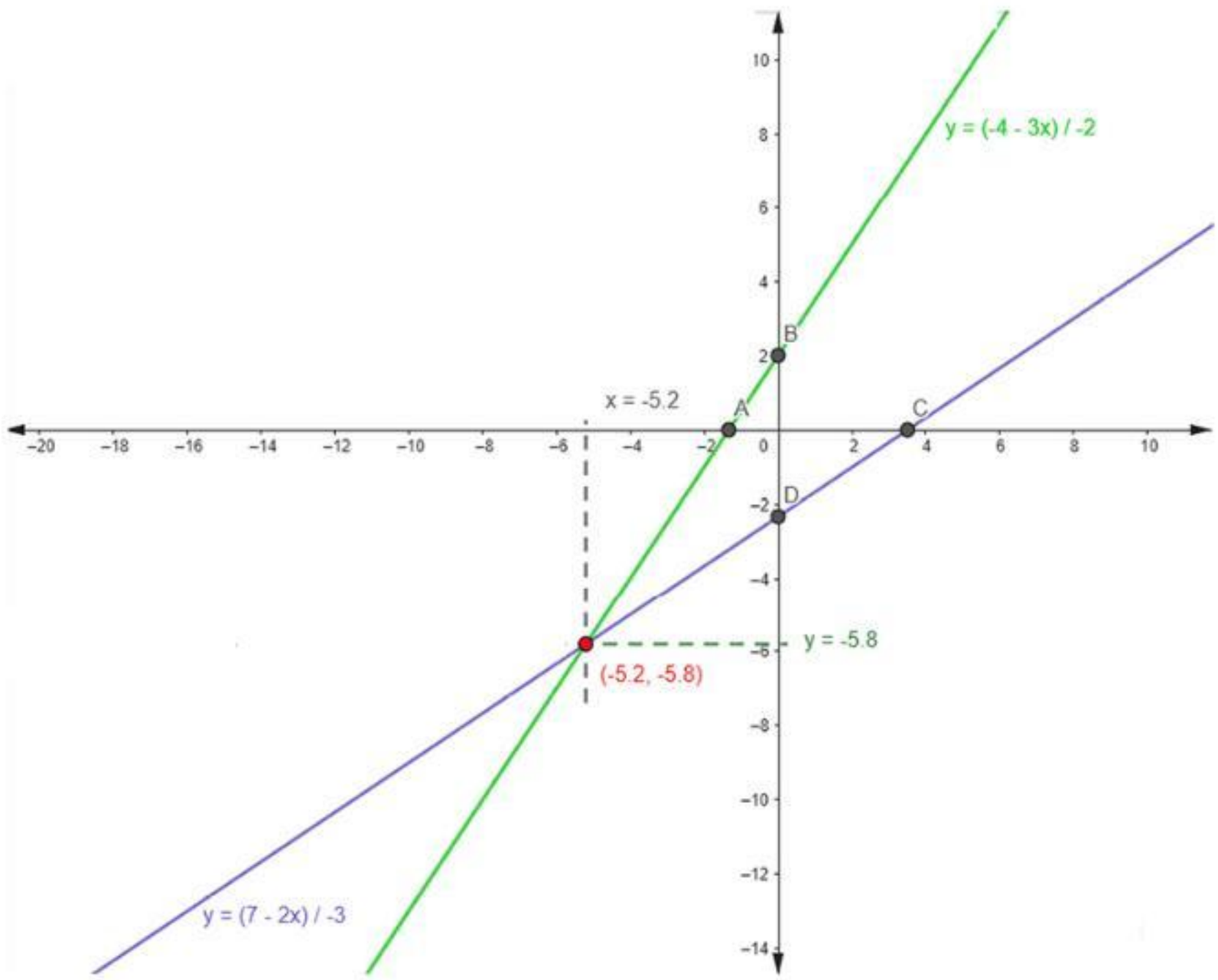
$x=0$	$y=\frac{7}{-3}$	$A\left(0,-\frac{7}{3}\right)$
$y=0$	$x=\frac{7}{2}$	$B\left(\frac{7}{2},0\right)$

Puntos de intersección de la recta $E1$

$x=0$	$y=2$	$C(0,2)$
$y=0$	$y=-\frac{14}{3}$	$D\left(-\frac{4}{3},0\right)$

Puntos de intersección de la recta $E2$

Figura 16. Método gráfico, ejemplo 3



Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Método gráfico, ejemplo 3].

Representación gráfica. Una vez ubicado el punto de intersección de las rectas, se hace la proyección sobre los ejes para verificar las coordenadas (x, y)

$\left(-\frac{26}{5}, -\frac{29}{5}\right)$ Solución

Como el valor de las proyecciones con el eje x y el eje y, no son siempre sin sencillas de calcular se sugiere comprobar con algún método algebraico de los anteriores.

Por lo que este ejercicio se verificará la solución con el método de Cramer.

$$\begin{cases} 2x-3y=7 & E1 \\ 3x+2y=-4 & E2 \end{cases}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2)-3(-3)$

$= -4+9$ Calcular el determinante de la matriz de coeficientes

$= 5$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 7(-2)-(-4)(-3)$

$= -14-12$

$= -26$ Calcular el determinante de la matriz de la matriz A_x

$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-4)-3(7)$

$= -8-21$

$= -29$ Calcular el determinante de la matriz de la matriz A_y

$x = \frac{-26}{5} = \frac{26}{5}$ Valor de x

$y = \frac{-29}{5} = \frac{29}{5}$ Valor de y

$\left(-\frac{26}{5}, -\frac{29}{5}\right)$ Solución

Ejemplo 4

$$\begin{cases} x-y=7 & E1 \\ 2x-2y=10 & E2 \end{cases}$$

$y = x-7$ Despejar de y de la ecuación $E1$

$y = x-5$ Despejar de y de la ecuación $E2$

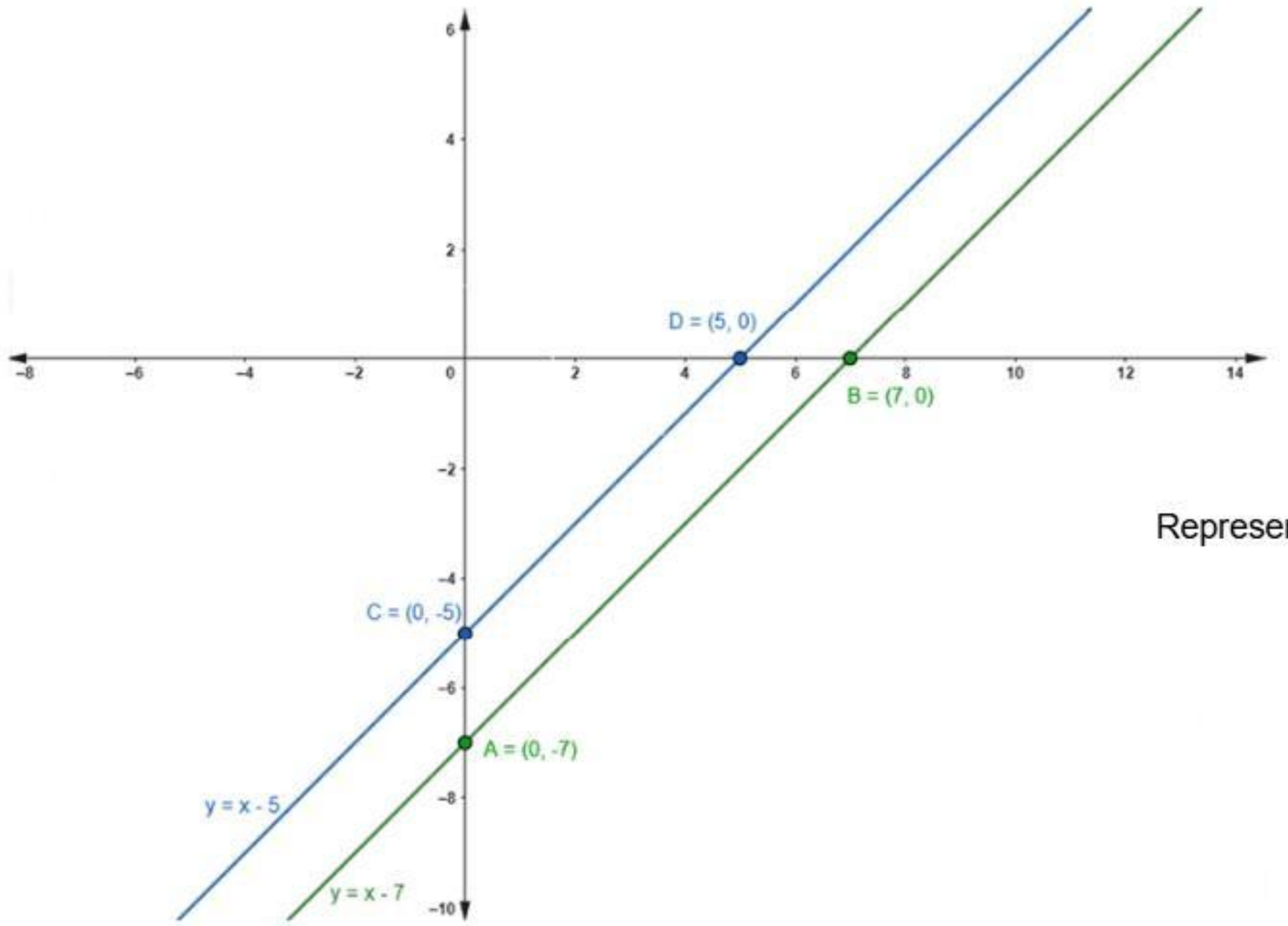
$x=0$	$y=-7$	$A(0,-7)$
$y=0$	$x=7$	$B(7,0)$

Puntos de intersección de la recta $E1$

$x=0$	$y=-5$	$C(0,-5)$
$y=0$	$x=5$	$D(5,0)$

Puntos de intersección de la recta $E2$

Figura 17. Método gráfico, ejemplo 4



Representación gráfica.

Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Método gráfico, ejemplo 4].

No hay solución, las rectas son paralelas, nunca se intersectan.

Ejemplo 5

$$\begin{cases} 2x - y = 6 & E1 \\ 4x - 2y = 12 & E2 \end{cases}$$

$y = 2x - 6$ Despejar de y de la ecuación $E1$

$y = \frac{4x - 12}{2} = 2x - 6$ Despejar de y de la ecuación $E2$

Se puede observar que al despejar y de ambas ecuaciones, se tiene la misma expresión, es decir, las rectas son idénticas

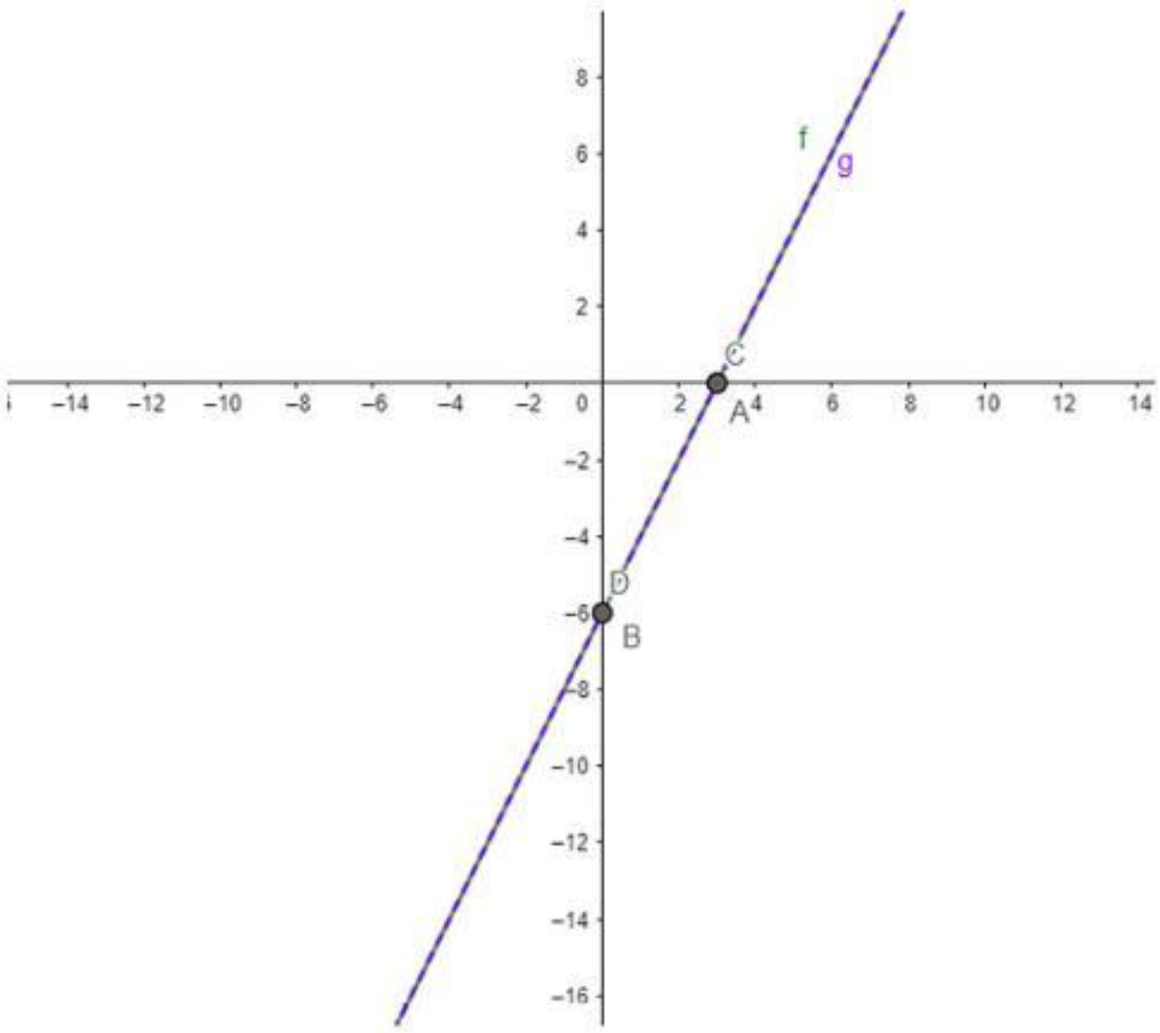
$x = 0$	$y = -6$	$A(0, -6)$
$y = 0$	$x = 3$	$B(3, 0)$

Puntos de intersección de la recta $E1$

$x = 0$	$y = -6$	$C(0, -6)$
$y = 0$	$x = 3$	$D(3, 0)$

Puntos de intersección de la recta $E2$

Figura 17. Método gráfico, ejemplo 4



Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Método gráfico, ejemplo 5].

Representación gráfica.

Hay infinitas soluciones, las rectas son idénticas.



Actividad 15.

Método gráfico

Instrucciones: resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método gráfico y relaciónalo con la gráfica correcta.

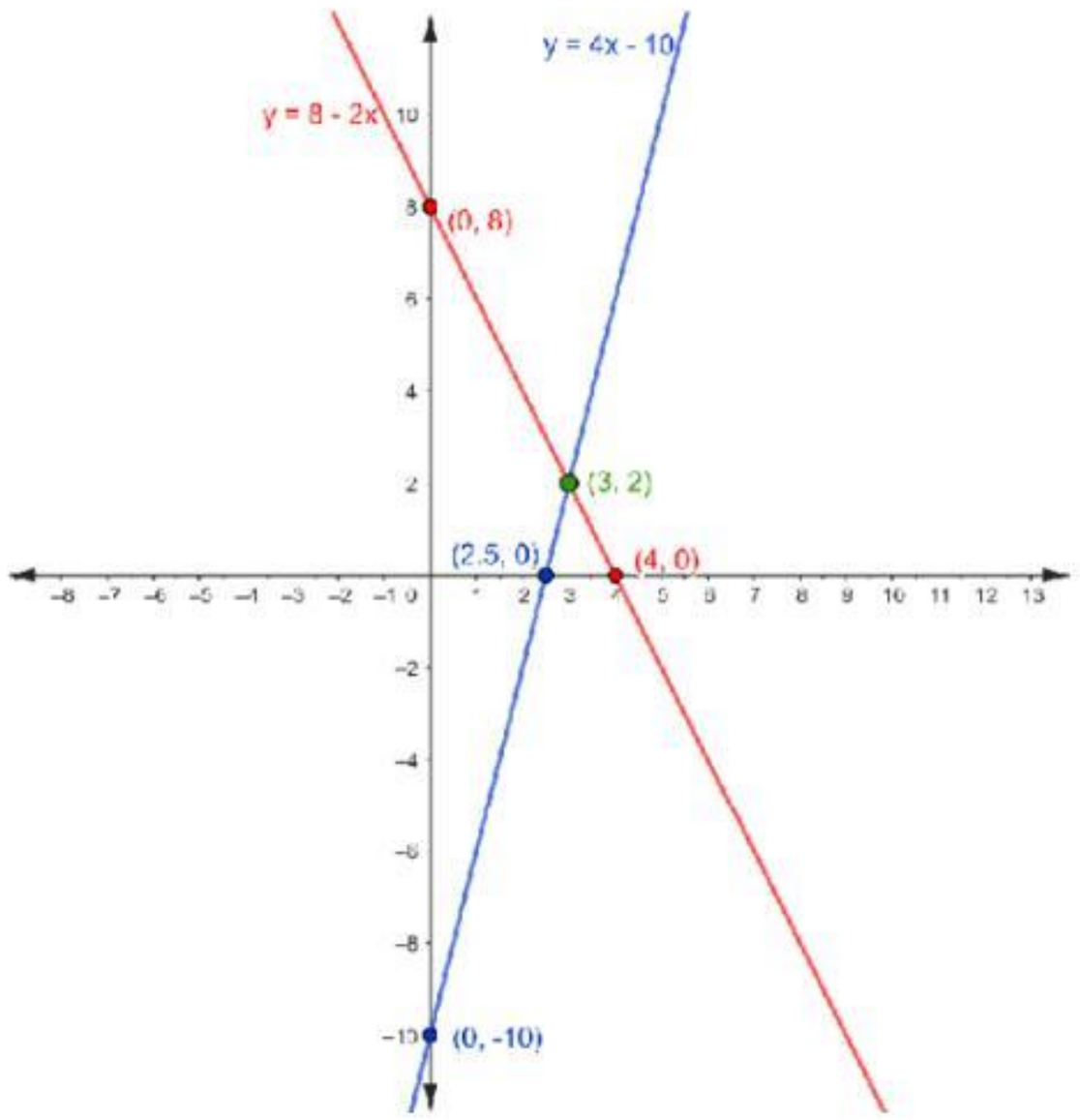
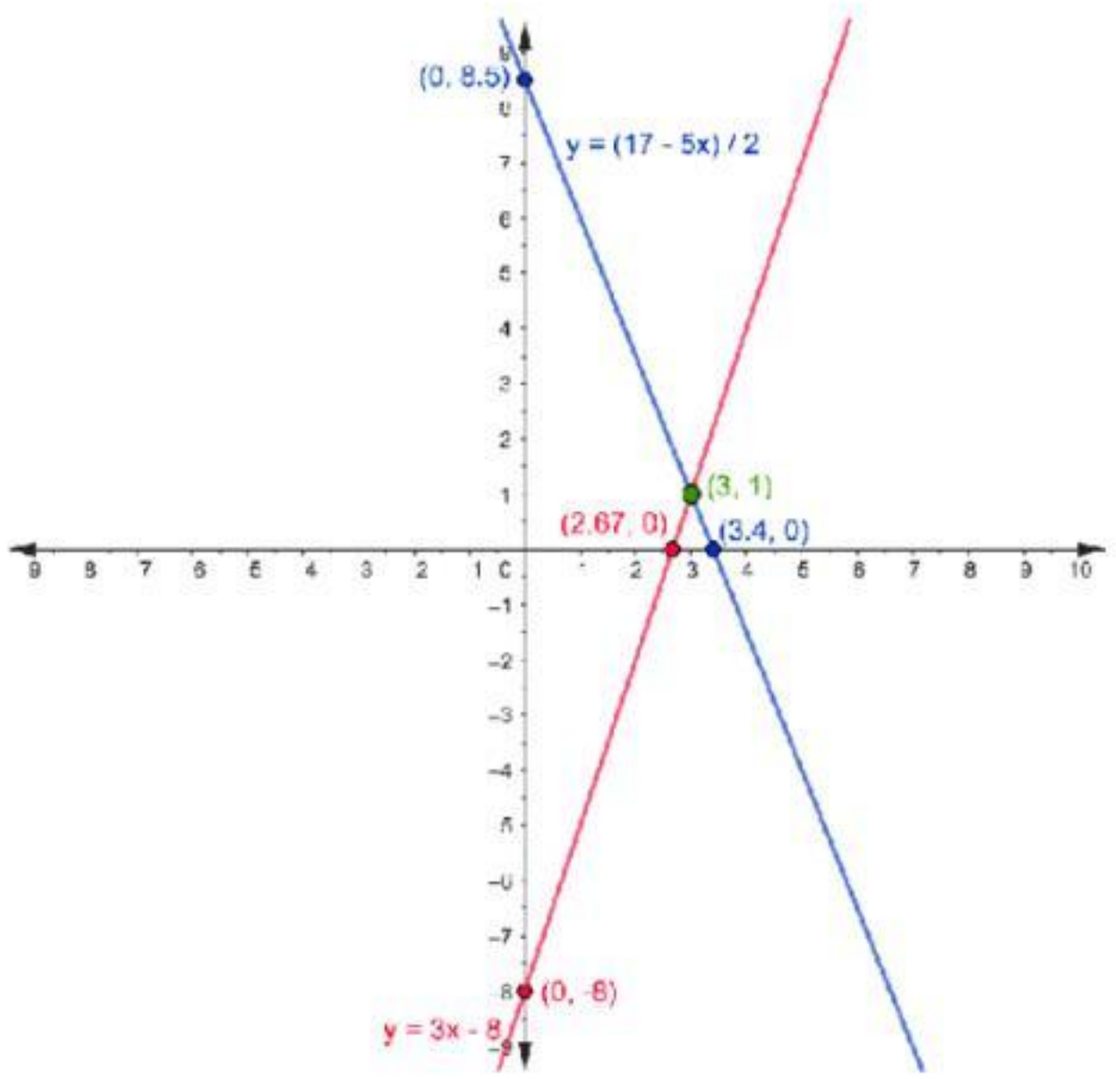
Sistema de ecuaciones lineales	Resultado correcto
$\begin{cases} 4x - y = 10 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$	 La solución es el punto (3,2)
$\begin{cases} 5x - 2y = 17 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$	 La solución es el punto (3,1)

Tabla 3. Propiedades de los números reales.

Propiedades de los números reales.

Para todo $a,b,c \in \mathbb{R}$ se cumple que: $(a+b)+c=a+(b+c)$	Asociativa de la suma.
Existe un único $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple que: $a+0=0+a=a$	Neutro aditivo.
Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que $(a)+(-a)=(-a)+(a)=0$	Inverso aditivo.
Para todo $a,b \in \mathbb{R}$ se cumple que: $a+b=b+a$	Conmutativa de la suma.
Para todo $a,b,c \in \mathbb{R}$ se cumple que: $(ab)(c)=(a)(bc)$	Asociativa de la multiplicación
Existe un único $1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple que: $(a)(1)=(1)(a)=a$	Neutro multiplicativo.
Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $(a)(a^{-1})=(a^{-1})(a)=$	Inverso multiplicativo.
Para todo $a,b \in \mathbb{R}$ se cumple que: $(a)(b)=(b)(a)$	Conmutativa de la multiplicación.
Para todo $a,b,c \in \mathbb{R}$ se cumple que: $(a)(b+c)=ab+ac$	Distributivas
Para todo $a,b,c \in \mathbb{R}$ se cumple que: $(a+b)(c)=ac+bc$	

Nota. Fuente: León, G.A. (2024). Elaboración propia. [Propiedades de los números reales].

Tabla de leyes de los exponentes

Tabla 4. Leyes de los exponentes

$$(x^n)(x^m)=x^{n+m} \quad (1)$$

$$\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m} \quad (2)$$

$$(x^n)^m=x^{nm} \quad (3)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n} \quad (4)$$

$$(xy)^n=x^n y^n \quad (5)$$

$$(x^n)^m=x^{nm} \quad (6)$$

Nota. Fuente: León, G.A. (2024). Elaboración propia. [Leyes de exponentes].

Para comenzar realizaremos unos ejemplos con las leyes de los exponentes.

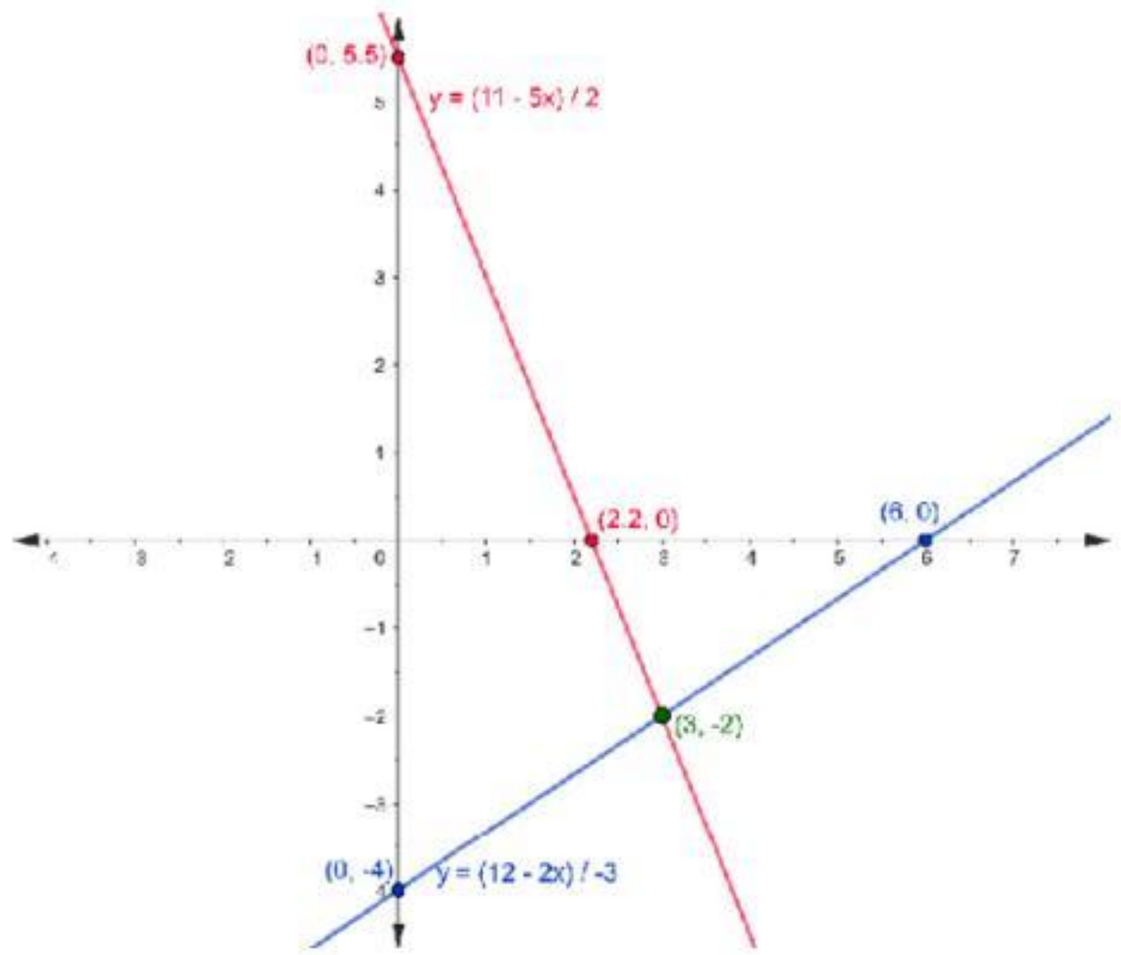
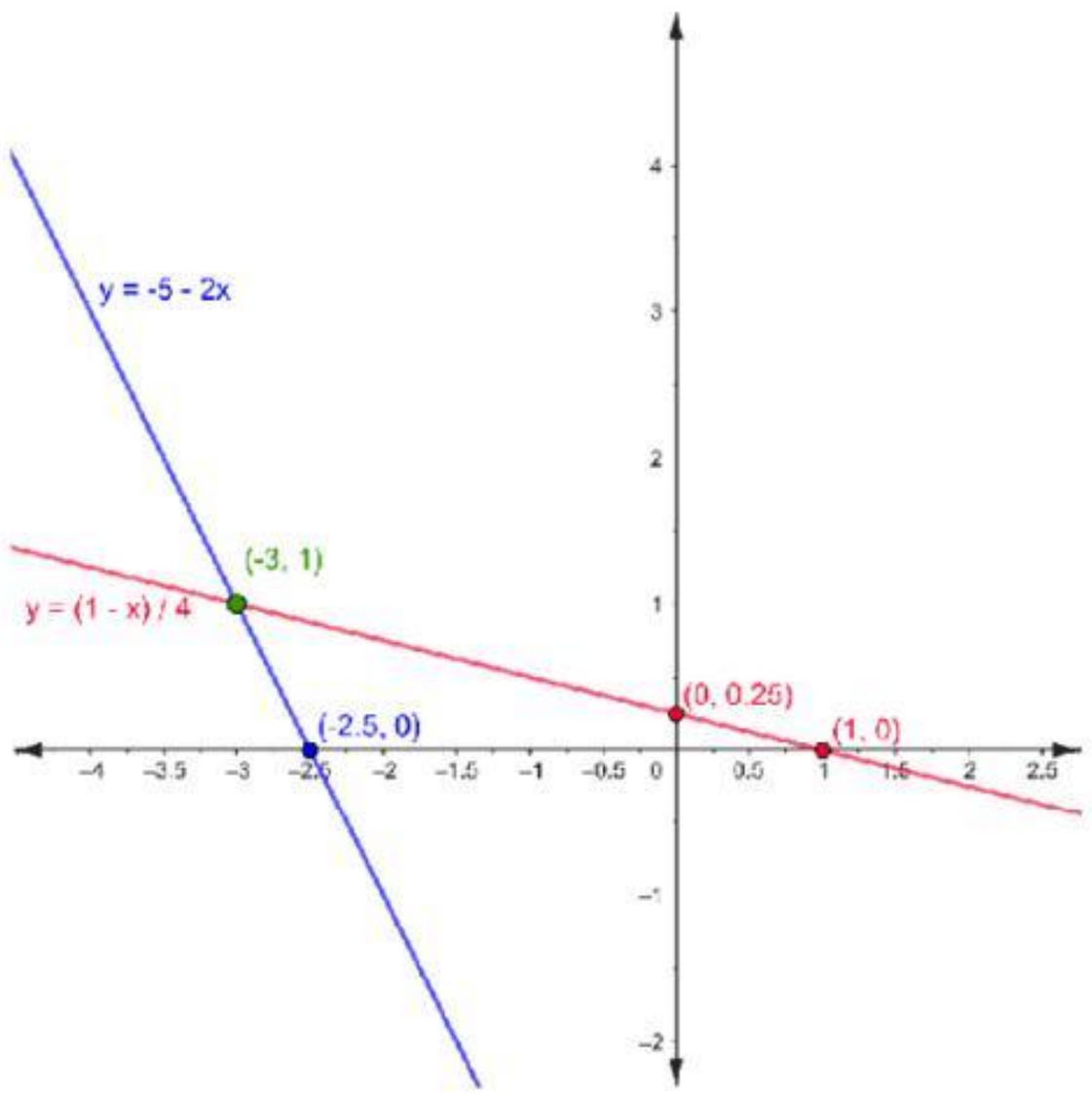
Ejemplo: Utilizando leyes de los exponentes simplificar las siguientes expresiones.

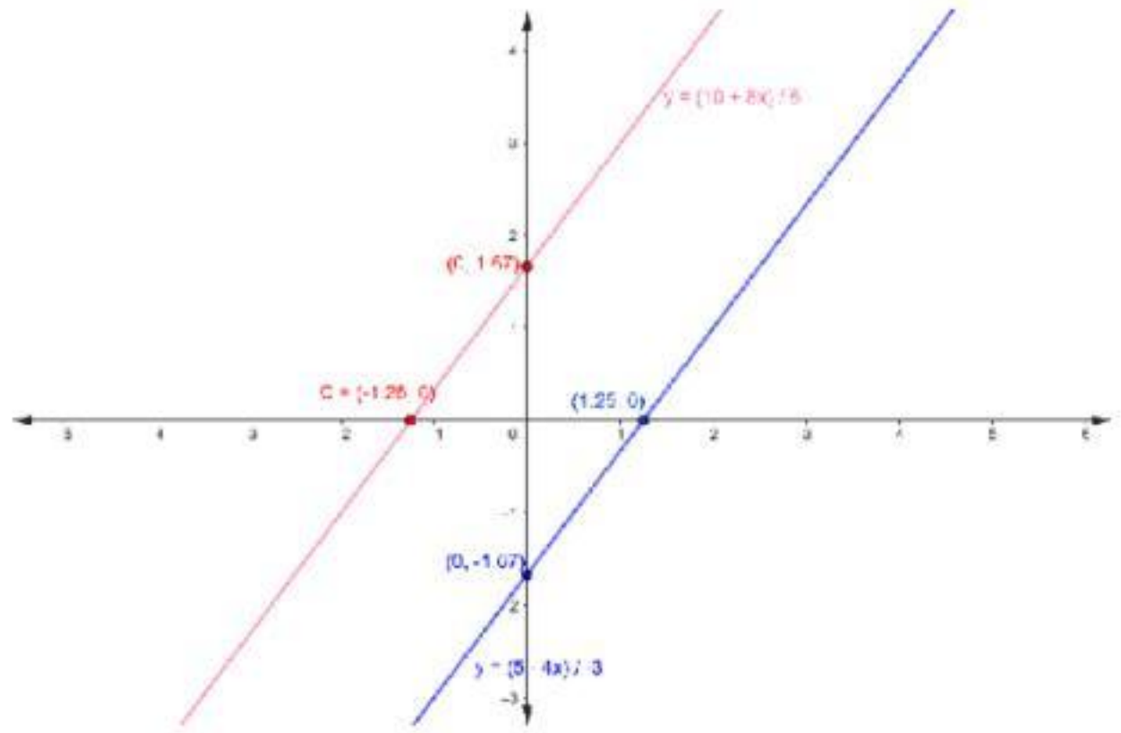
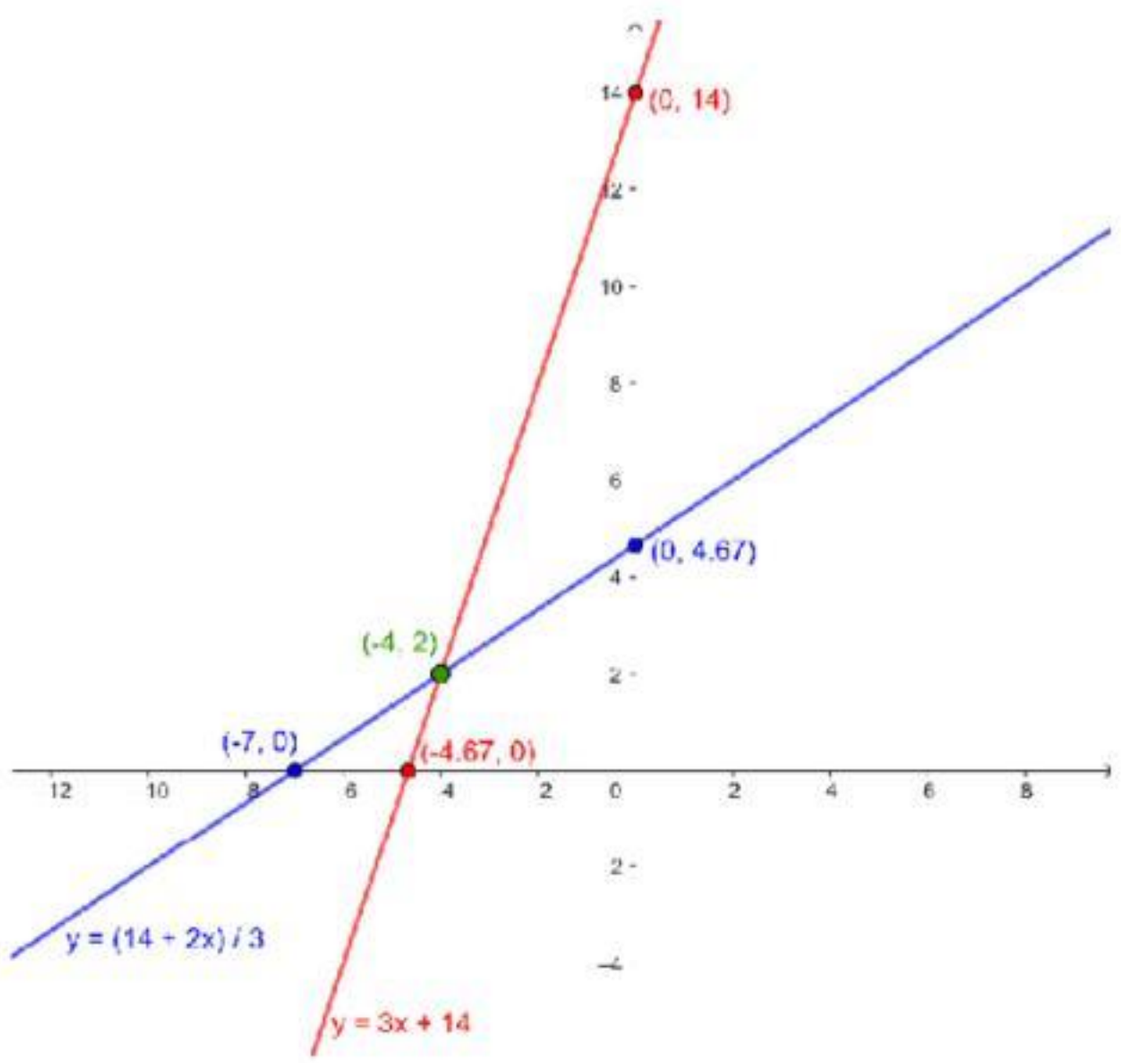
1.

$$\frac{x^{-3}y^{-4}}{x^{-5}y^{2}}$$

$=x^{-3-(-5)}\,y^{-4-(2)}$ Se aplica (3) de las leyes de los exponentes.

$=x^{-3+5}\,y^{-6}$ Se aplican (4) y (8) de las leyes de los signos.

$\begin{cases} 2x-3y=12 \\ 5x+2y=11 \end{cases}$	 La solución es el punto (3,−2)
$\begin{cases} x+4y=1 \\ 2x+y=-5 \end{cases}$	 La solución es el punto (−3,1)

$\begin{cases} 4x-3y=5 \\ -8x+6y=10 \end{cases}$	 *son rectas paralelas,no tiene solución*
$\begin{cases} -2x+3y=14 \\ 3x-y=-14 \end{cases}$	 La solución es el punto $(-2,2)$

4.5 Desigualdad lineal de una variable y sin valor absoluto

4.5.1 Definición

Las proposiciones de la forma $a < b$ o $b > a$ se llaman **desigualdades estrictas,** mientras que las proposiciones de la forma $a \leq b$ o $b \geq a$ se llaman **desigualdades no estrictas.** Una desigualdad es una proposición en la que dos expresiones se relacionan por un símbolo de desigualdad. Las expresiones se conocen como los lados de la desigualdad. (Sullivan, M., 1997).

4.5.2 Propiedades de desigualdades

Propiedad de la suma para desigualdades

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

Si $a < b$, entonces $a - c < b - c$

Propiedad de la multiplicación para desigualdades

Las propiedades de la multiplicación establecen que el sentido, o dirección; es decir, de una desigualdad *permanece igual* si cada lado se multiplica por un número real *positivo,* mientras que la dirección se *invierte* si cada lado se multiplica por un número real *negativo*.

Si $a \leq b$ y $c > 0$, entonces $ac \leq bc$

Si $a \geq b$ y $c < 0$, entonces $ac \geq bc$

Si $a \geq b$ y $c > 0$ entonces $ac \geq bc$

Si $a \leq b$ y $c < 0$ entonces $ac \leq bc$

Si $c = 0$ se da la igualdad $ac = bc$

Propiedad del recíproco para desigualdades

Las propiedades del recíproco establecen que el recíproco de un número real positivo es positivo y que el recíproco de un número real negativo es negativo.

Si $a > 0$, entonces >0

Si $a < 0$, entonces <0

Las propiedades de la multiplicación establecen que el sentido, o dirección, de una desigualdad *permanece igual* si cada lado se multiplica por un número real *positivo,* mientras que la dirección se *invierte* si cada lado se multiplica por un número real *negativo.*

4.5.3 Solución y representación gráfica

Las desigualdades se resuelven usando muchos de los pasos que se usarían para resolver ecuaciones. Sin embargo, la solución es un conjunto de número reales y se pueden escribir utilizando la notación de conjuntos o la de intervalos, la que sea más conveniente.

En general, una inecuación o desigualdad lineal se resuelve:

1. Dejando de un solo lado de la desigualdad los términos con variable y del otro lado los términos numéricos; usando las propiedades de las desigualdades.
2. Despejar la variable, si es un coeficiente positivo se preserva la desigualdad. Si es un coeficiente negativo cambia el sentido de la desigualdad.
3. La solución es un conjunto de números reales representado en intervalos, también se puede representar de manera gráfica.

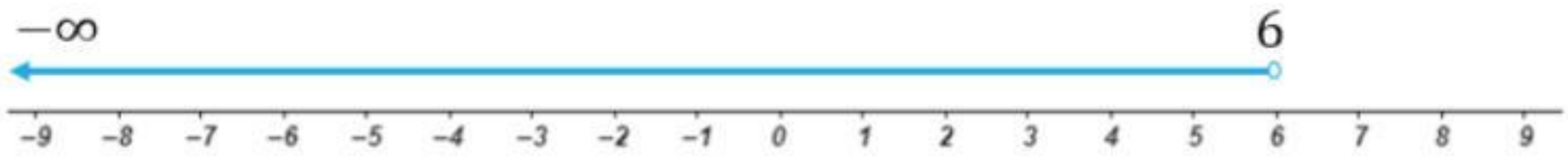
En los siguientes ejemplos encontraremos los conjuntos solución de las desigualdades lineales.

Ejemplo 1

$2x - 14 < 4 - x$	
$2x - 14 + x < 4 - x + x$	Sumar x en ambos lados de la desigualdad
$3x - 14 < 4$	Resolver la suma de términos semejantes
$3x - 14 + 14 < 4 + 14$	Sumar 14 en ambos lados de la desigualdad
$3x < 18$	Resolver la suma de constantes
$\frac{3x}{3} < \frac{18}{3}$	Dividir entre 3 ambos lados de la desigualdad
$x < 6$	Resolver las divisiones
$(-\infty, 6)$	Conjunto solución (intervalo)

Solución gráfica

Figura 19. Aplicaciones, ejemplo 1



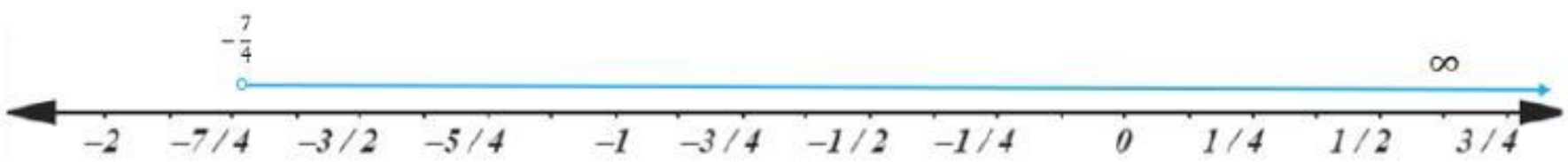
Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Aplicaciones, ejemplo 1].

Ejemplo 2

$x-3<4+5x$	
$x-3-5x<4+5x-5x$	Sumar en ambos lados de la desigualdad -5
$-4x-3<4$	Resolver la suma de términos semejantes
$-4x-3+3<4+3$	Sumar 3 en ambos lados de la desigualdad
$-4x<7$	Resolver la suma de constantes
$-\frac{-4x}{-4}>\frac{7}{-4}$	Dividir por -5 en ambos lados de la desigualdad. Como -4 es negativo, cambia el sentido de ésta.
$x>\frac{7}{-4}$	Resolver la división
$\left(-\frac{7}{4},\infty\right)$	Conjunto solución (intervalo)

Solución gráfica

Figura 20. Aplicaciones, ejemplo 2



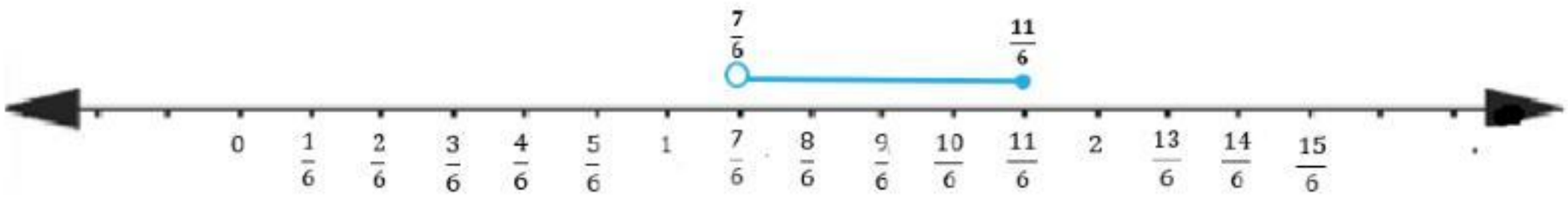
Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Aplicaciones, ejemplo 2].

Ejemplo 3

$4<5(x-1)+2+x\leq 8$	
$4<5x-5+2+x\leq 8$	Resolver la multiplicación
$4<6x-3\leq 8$	Simplificar términos semejantes
$4+3<6x-3+3\leq 8+3$	Sumar 3 en las secciones de la desigualdad
$7<6x\leq 11$	Resolver las sumas
$\frac{7}{6}<\frac{6x}{6}\leq\frac{11}{6}$	Despejar el término de la variable, dividiendo por 6 en ambos lados de la desigualdad,
$\frac{7}{6}<x\leq\frac{11}{6}$	Resolver las divisiones
$\left(\frac{7}{6},\frac{11}{6}\right]$	Conjunto solución (intervalo)

Solución gráfica

Figura 21. Aplicaciones, ejemplo 3



Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Aplicaciones, ejemplo 3].

Ejemplo 4

$3x + 2-(4x-1-9x) > -(2x-1)$	
$3x + 2-4x+1+9x > -2x+1$	Resolver los paréntesis
$8x+3 > -2x+1$	Simplificar los términos semejantes
$8x+3+2x > -2x+1+2x$	Sumar $2x$ en ambos lados de la desigualdad
$10x+3 > +1$	Simplificar los términos semejantes
$10x+3-3 > 1-3$	Sumar -3 en ambos lados de la desigualdad
$10x > -2$	Simplificar los términos semejantes
$\frac{10x}{10} > -\frac{2}{10}$	Dividir 10 en ambos lados de la desigualdad
$x > -\frac{2}{10}$	Se resuelve la división
$x > -\frac{1}{5}$	
$\left(-\frac{1}{5}, \infty\right)$	Conjunto solución (intervalo)

Solución gráfica

Figura 22. Aplicaciones, ejemplo 4



Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Aplicaciones, ejemplo 4].

Ejemplo 5

$$2 \leq 2x + 10 < 20$$

$2 - 10 \leq 2x + 10 - 10 < 20 - 10$ Restar 10 en las tres partes de la desigualdad

$-8 \leq 2x < 10$ Resolver la resta términos semejantes

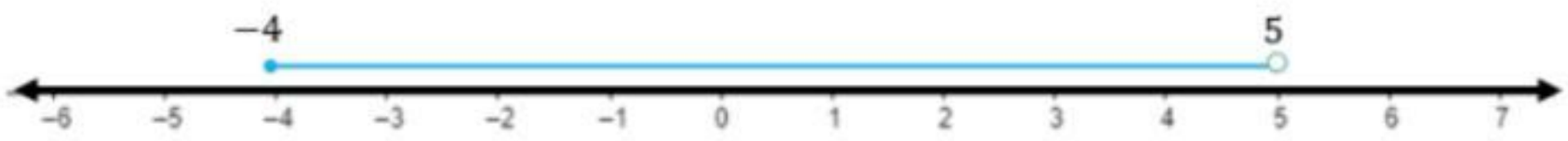
$\frac{-8}{2} \leq \frac{2x}{2} < \frac{10}{2}$ Dividir por 2 en las tres partes de la desigualdad

$-4 \leq x < 5$ Resolver la división

$[-4, 5)$ Conjunto solución (intervalo)

Solución gráfica

Figura 23. Aplicaciones, ejemplo 5



Nota. Fuente: Galicia, A. V. (2024). Creación propia. [Aplicaciones, ejemplo 5].



Actividad 16.

Desigualdades

Instrucciones: para ver la actividad da clic en el enlace.

4.6 Problemas de aplicación

En esta sección se resolverán algunos problemas aplicados en situaciones o contextos reales.

Problema 1

Determina el dominio, rango y gráfica de la función definida por $y=\sqrt{3x-7}$

Planteamiento

Dominio de la función

Se quiere encontrar para que valores de x es válida la expresión $\sqrt{3x-7}$. Se sabe que la raíz cuadrada se calcula solo valores mayores o iguales que cero. Entonces se tiene que resolver la desigualdad

$$3x-7\geq 0$$

Procedimiento

$$3x-7\geq 0$$

$$3x\geq 7$$

$$x\geq \frac{7}{3}$$

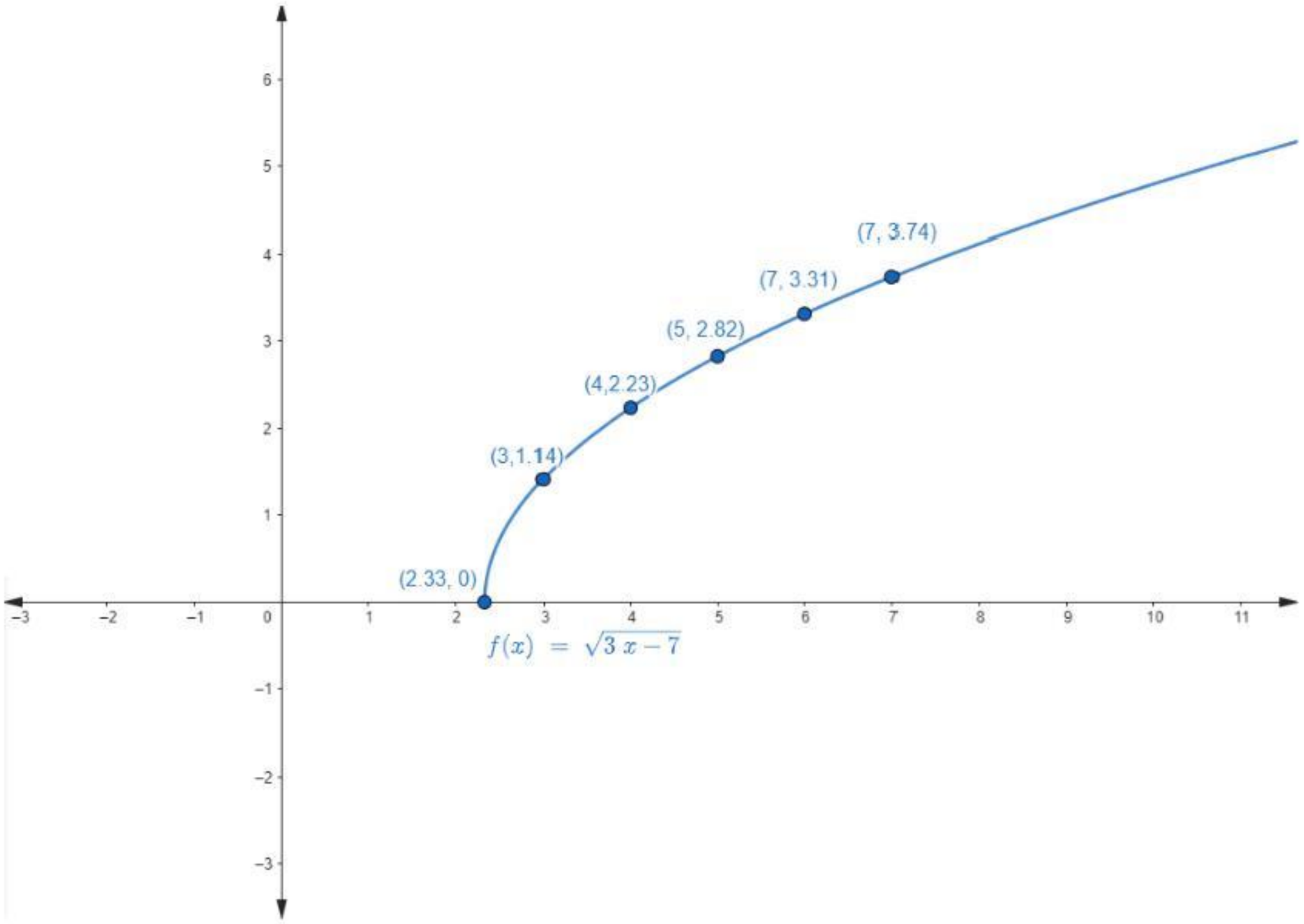
$$\left[\frac{7}{3},\infty\right)$$

Gráfica

Para trazar la gráfica iniciaremos en el ya que es el primer valor del dominio y seguiremos con números enteros para facilitar las operaciones.

x	$y=\sqrt{3x-7}$	(x,y)
$\frac{7}{3}$	$\sqrt{3(7/3)-7}=0$	$\left(\frac{7}{3},0\right)=(2.33,0)$
3	$\sqrt{3(3)-7}=\sqrt{2}$	$(3,\sqrt{2})=(3,1.14)$
4	$\sqrt{3(4)-7}=\sqrt{5}$	$(4,\sqrt{5})=(4,2.23)$
5	$\sqrt{3(5)-7}=\sqrt{8}$	$(5,\sqrt{8})=(5,2.82)$
6	$\sqrt{3(6)-7}=\sqrt{11}$	$(6,\sqrt{11})=(6,3.31)$
7	$\sqrt{3(7)-7}=\sqrt{14}$	$(7,\sqrt{14})=(7,3.74)$

Rango de la función



De la gráfica se puede observar que el rango de f es intervalo [0,∞),

Conclusión

Dominio de la función $y = \sqrt{3x - 7}$ son todos los números reales $x \in [7/3, \infty)$

Rango de la función $y = \sqrt{3x - 7}$ son todos los números reales $x \in [0, \infty)$

Problema 2

Danna tiene el triple de dinero que Ana y la mitad que Israel. Israel les da a Ana y a Danna 25 mil pesos a cada una. Ahora Danna tiene la misma cantidad que Israel. ¿Cuánto dinero tenía cada uno al principio? ¿Y después?

Planteamiento

Sea x la cantidad de dinero que tiene inicialmente Ana. Como Danna tiene inicialmente el triple de lo que tiene Ana, entonces Danna tiene $3x$. Luego, se sabe que Israel tiene el doble de lo que tiene Danna, esto es $2(3x)=6x$

De aquí que después de repartir Israel tiene $6x - 50$, Ana tiene $x + 25$ y Danna tiene $3x + 25$. La ecuación que se debe resolver es $3x + 25 = 6x - 50$

Procedimiento

$$3x + 25 = 6x - 50$$

$$25 + 50 = 6x - 3x$$

$$75 = 3x$$

$$\frac{75}{3} = x$$

$$25 = x$$

Conclusión

Al inicio tenían

Israel tiene $6x = 6(25) = 150$ mil pesos

Ana tiene $x = 25$ mil pesos y

Danna tiene $3x = 3(25) = 75$ mil pesos.

Después del reparto

Israel tiene $6x - 50 = 6(25) - 50 = 100$ mil pesos

Ana tiene $x + 25 = 25 + 25 = 50$ mil pesos y

Danna tiene $3x + 25 = 3(25) + 25 = 100$ mil pesos.

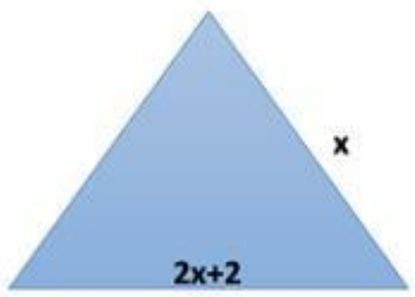
Problema 3

El perímetro de un triángulo isósceles es de 19 cm. La longitud de cada uno de sus lados iguales excede en 2 cm al doble de la longitud del lado desigual. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

Planteamiento

Los lados del triángulo son x (lados iguales) y y (lado desigual). Entonces el perímetro esta dado por la expresión $2x + y = 19$ y la longitud de uno de los lados iguales es $x = 2y + 2$.

Se debe resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y = 19 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$



Procedimiento

Se implementará el método de sustitución, para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 19 & E1 \\ x = 2y + 2 & E2 \end{cases}$$

$2(2y + 2) + y = 19$	Sustituir x de la ecuación $E2$ en la ecuación $E1$
$4y + 4 + y = 19$	Resolver la multiplicación
$5y = 19 - 4$	Despejar la variable y

$= x^2 y^{-6}$ Se realizan las operaciones.

$= \frac{x^2}{y^6}$ Se aplica (2) de las leyes de los exponentes.

$= \frac{x^2}{y^6}$ **Resultado.**

2.

$$\frac{(8xy^4)^4}{(4x^3y^5)^3}$$

$= \frac{8^4x^4(y^4)^4}{4^3(x^3)^3(y^5)^3}$ Se aplica (6) de las leyes de los exponentes.

$\frac{((4)(2))^4x^4y^{(4)(4)}}{4^3x^{(3)(3)}y^{(5)(3)}}$ Se aplica (4) de las leyes de los exponentes y recordando que 8 = (4)(2).

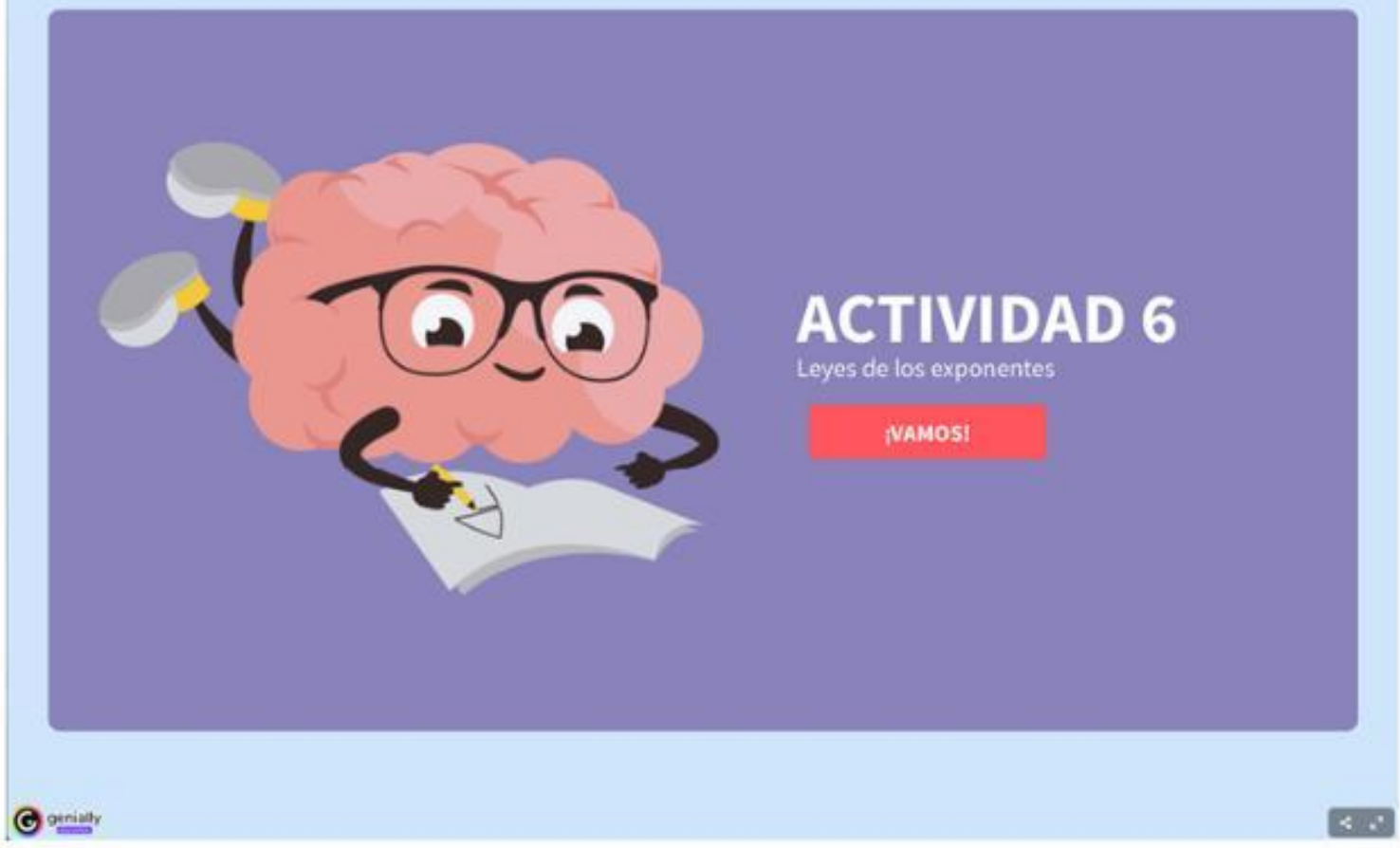
$= \frac{4^4 2^4 x^4 y^{16}}{4^3 x^9 y^{15}}$ Se aplica (4) de las leyes de los exponentes y se realizan las operaciones.

$= 4^{4-3}(2^2)^2 x^{4-9} y^{16-15}$ Se aplican (3) y (4) de las leyes de los exponentes.

$= 4^1 4^2 x^{-5} y^1$ Se realizan las operaciones.

$= \frac{4^{1+2}y}{x^5}$ Se aplican (1) y (2) de las leyes de los exponentes.

= $\frac{4^3y}{x^5}$ **Resultado**



Actividad 6.



Leyes de los exponentes

Instrucciones: para reforzar los antes visto se te pide dar clic en el enlace. Y asociar la operación con el resultado correcto.

$y = \frac{15}{5} = 3$ Valor de y

$x = 2(3) + 2 = 8$ Sustituir el valor de y en la ecuación $E2$

Solución

Los lados iguales del triángulo miden $x = 8$ y el lado desigual $y = 3$

Problema 4

Una empresa cobra $150 como renta fija de servicio de internet al mes y cada mega de internet adicional tiene un costo de $12.5 ¿Cuál es la función que modela el costo del servicio al mes incluyendo un servicio adicional de x megas de internet? ¿Cuál es el costo del servicio y en el mes se adquirieron 30 megas de internet adicionales?

Solución:

x: megas de internet adicional al mes

$C(\mathrm{x})$: costo total del servicio al mes

Obsérvese que si se adquiere:

Un mega de internet adicional al mes el costo total es: $150+12.5(1)$

Dos megas de internet adicional al mes el costo total es: $150+12.5\ (2)$

Tres megas de internet adicional al mes el costo total es: $150+12.5\ (3)$

Cuatro megas de internet adicional al mes el costo total es: $150+12.5\ (4)$

Por lo que si se adquiere x megas adicionales al mes el costo total es: $150+12.5\ (x)$

Por lo tanto, la función que modela el costo del servicio al mes es

$$C(x)=10\mathrm{x}+50.$$

El costo de servicio de 30 megas de internet adicionales al mes se obtiene al sustituir 30 en la función encontrada, esto es

$$\mathrm{C}(30)=150+12.5(30)$$

$$\mathrm{C}(30)=525$$

El costo de servicio de 30 megas de internet adicionales al mes es de $525.

Problema 5

Un número excede a otro en 56. Si el mayor se divide por el menor, el cociente es 3 y el residuo es 8. Hallar los números.

Planteamiento

Consideremos que x y y son los números, tales que $y = x + 56$.

Observación 1 si un número x divide a otro y, y el cociente es k y el residuo es r, entonces el dividendo = divisor*cociente + residuo; es decir,

$\frac{x}{y} = \mathrm{k} + \frac{r}{y}$ entonces $x = ky + r$ (al final del ejercicio están tres ejemplos de esta observación)

Como $\frac{x}{y} = 3 + \frac{8}{y}$, entonces por la observación se tiene que $y = 3x + 8$.

Se debe resolver el sistema $\begin{cases} y = x + 56 \\ y = 3x + 8 \end{cases}$

Procedimiento

Usaremos el método de la Regla de Cramer para resolver el sistema, por lo cual se reescribe de la siguiente manera.

$\begin{cases} -x + y = 56 \\ -3x + y = 8 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1(1) - (-3)(1)$$

Calcular el determinante de la matriz de coeficientes

$$= -1 + 3$$

$$= 2$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 56 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 56(1) - 8(1)$$

Calcular el determinante de la matriz de la matriz A_x

$$= 56 + 8$$

$$= 48$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 56 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = -1(8) - (-3)(56)$$

Calcular el determinante de la matriz de la matriz A_y

$$= -8 + 168$$

$$= 160$$

$x = \frac{48}{2} = 24$ Valor de x

$y = \frac{160}{2} = 80$ Valor de y

Solución

Los números encontrados son 24 y 80.

Ejemplo de nota: si un número x divide a otro y, y el cociente es k y el residuo es r, entonces el dividendo = divisor*cociente +residuo; es decir,

$\frac{x}{y} = \mathrm{k} + \frac{r}{y}$ entonces $\mathrm{x} = \mathrm{ky} + \mathrm{r}$

Ejemplo 1

$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ entonces $3 = 2(1+ \frac{1}{2})$

$3 = 2(1)+2\left(\frac{1}{2}\right)$

$3 = 2(1) + 1$

Ejemplo 2

$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$ entonces $12 = 5(2+\frac{2}{5})$

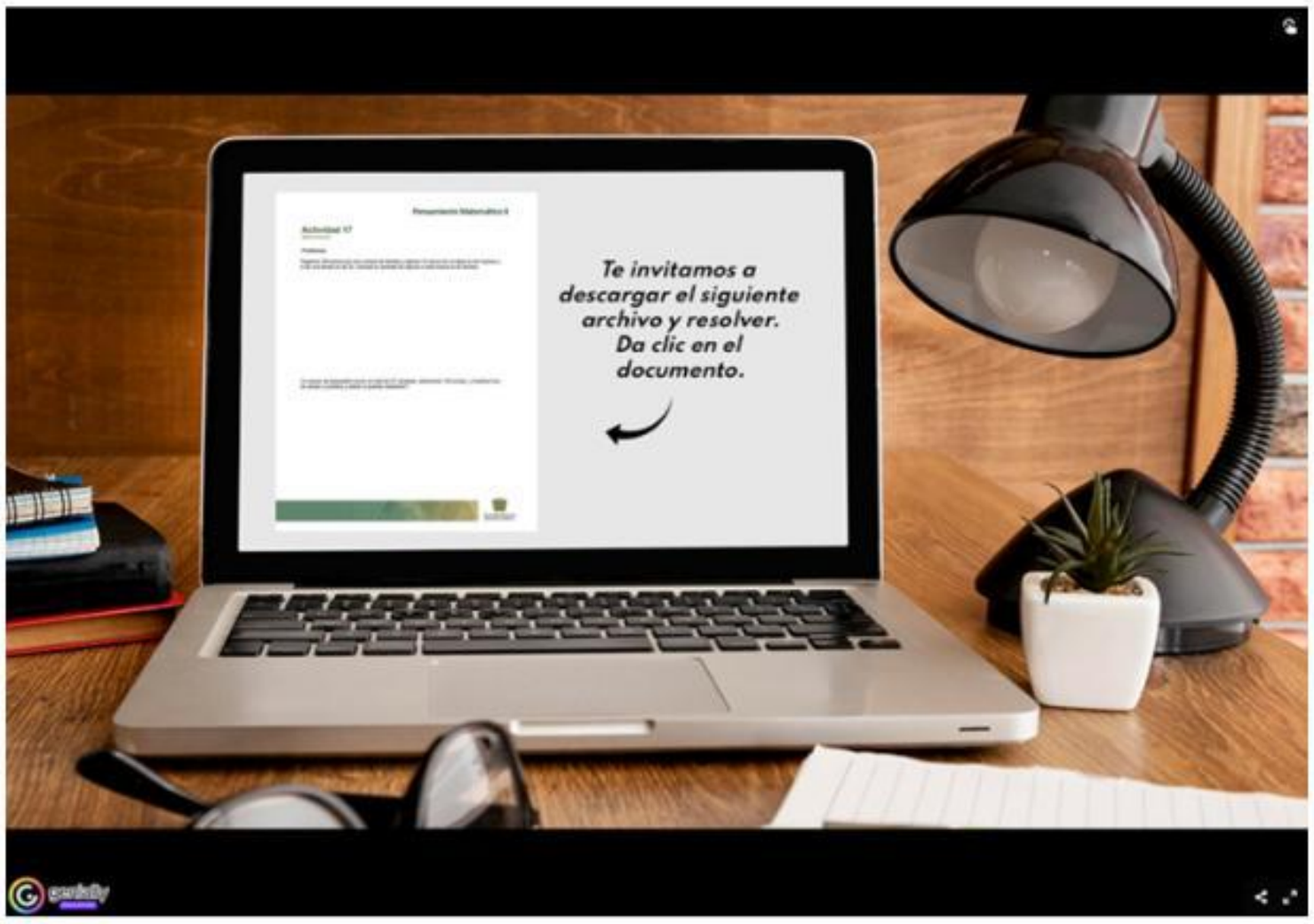
$12 = 5(2) + 5\left(\frac{2}{5}\right)$

$12 = 5(2) + 2$

$\frac{23}{4} = 5 + \frac{3}{4}$ entonces $23 = 4(5 + \frac{3}{4})$

$23 = 4(5) + 4\left(\frac{3}{4}\right)$

$23 = 4(5) + 3$





Actividad 17.

Aplicaciones

Instrucciones: resuelve los siguientes problemas, para ver la actividad da clic en el enlace.

Resumen del Módulo

En este módulo definimos y analizamos las formas y métodos que se usan para resolver modelos matemáticos como las funciones, ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales y desigualdades lineales.

Una función es una móldelo matemático que define la relación entre dos conjuntos, esta relación esta dada por una regla de correspondencia (expresión algebraica) de donde se puede obtener el dominio y el rango, además una función se puede representar en una gráfica en el plano cartesiano.

Las ecuaciones lineales son igualdades entre dos expresiones, en particular la forma general de la ecuación lineal es $y = ax + b$ donde se puede notar que los términos que tienen las variables x y y tiene exponente 1, de aquí el nombre de lineal. Las propiedades descritas en el texto, permiten encontrar los valores de las variables que satisfacen la ecuación mediante el procedimiento algebraico que comúnmente se llama despeje de la variable.

Los sistemas de ecuaciones lineales, permiten modelar problemas o situaciones reales, sin embargo, la modelación no tiene mucho sentido sino se obtienen las soluciones, para ello se describieron los siguientes métodos de solución: Suma y resta, igualación, sustitución, regla de Cramer y gráfico.

Finalmente, se definieron las desigualdades lineales, también son un modelo matemático que involucran los símbolos $<, >, \leq$ y $\geq$, resolver una desigualdad es encontrar un conjunto de soluciones de los números reales, definidos mediante intervalos y estos a su vez se pueden representar en la recta real.

Actividad 18.



Ejercicio autoevaluable

Para reforzar los temas vistos en este Módulo IV, realiza el siguiente ejercicio, para comenzar, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada M4 Cuestionario Final.

Glosario

Plano cartesiano: representación gráfica de dos rectas perpendiculares que se cruzan en un punto común denominado origen, las rectas son denominadas ejes coordenados, siendo el eje x llamado el eje de las abscisas de forma horizontal y el eje y llamado eje de las ordenadas de forma vertical. Dichas rectas forman cuatro cuadrantes en los que se ubican los puntos a manera de pares ordenados (x, y).

Ecuación de la recta pendiente ordenada al origen: es una de las formas de expresar la ecuación de una recta y que facilita su análisis algebraico para representar dicha recta de forma gráfica en el plano cartesiano. En general se expresa como: $y = mx + b$

Referencias

- Abramson, J. (2022, 18 de mayo). 9.8 Resolver sistemas con la regla de Cramer - Precálculo (2ª. edición) | OpenStax. https://openstax.org/books/prec%C3%A1lculo-2ed/pages/9-8-resolver-sistemas-con-la-regla-de-cramer
- Haro Palma, A. S., Esparza Puga, D. S., Amaya Hernández, J. A. & Lechuga Marrufo, S. (2024). *Pensamiento matemático 2*. Grupo Editorial Patria.
- Sullivan, M. (1997). *Precálculo*. (4ª. edición). Pearson Educación.
- Swokowsky, E. W., & Cole, J. A. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* Cengage Leraning.

Resumen General

Este libro fue diseñado del segundo semestre de la Escuela Preparatoria de la Universidad Autónoma del Estado de México basado en las progresiones definidas por la Nueva Escuela Mexicana, con la finalidad de que los alumnos desarrollen las habilidades matemáticas necesarias para modelar, analizar y resolver problemas de su contexto, utilizando el lenguaje algebraico, trigonométrico y geométrico, con el fin de fomentar un pensamiento crítico y reflexivo.

Consta de 4 módulos:

Módulo I. Introducción al Álgebra cuyo propósito es que el alumno implemente los diferentes tipos de expresiones algebraicas para la resolución de operaciones y problemas de aplicación.

Módulo II. Teoría de Números cuyo propósito es que el alumno resuelva algebraica y gráficamente situaciones reales que involucren modelos lineales.

Modulo III. Variaciones y figuras geométricas el propósito es que el alumno analice variaciones y figuras geométricas para identificarlas y relacionarlas con su entorno, a través de la resolución de problemas de aplicación.

Módulo IV. Función, ecuación y desigualdad lineal cuyo propósito es que el alumno resuelva algebraica y gráficamente situaciones reales que involucren modelos lineales.

Por tal motivo la estructura del libro comienza con el desarrollo de la teoría de los conceptos matemáticos, procedimientos y representaciones graficas que se esperan alcanzar en las progresiones definidas, seguido de los ejemplos resueltos del tema y finalmente con actividades diseñadas para que los alumnos fortalezcan su aprendizaje mediante actividades de gamificación y autoevaluación.

Doctor en Tecnología e Innovación de la Educación
Arturo Mejía Zamora
Plantel "Lic. Adolfo López Mateos"

Maestro en Ciencias de la Educación
Erick Vieyra Méndez
Plantel "Nezahualcóyotl"

Maestro en Administración Pública y Gobierno
Raúl Juárez Toledo
Plantel "Cuauhtémoc"

Doctora en Ciencias de la Educación
María del Rocío García de León Pastrana
Plantel "Ignacio Ramírez Calzada"

Doctor en Ciencias de la Educación
Alejandro Morales Velázquez
Plantel "Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana"

Maestro en Educación con Orientación en Innovación y Tecnología Educativa
Sergio Luis Roldán Vásquez
Plantel "Texcoco"

Maestro en Docencia
Erick Rodolfo Sánchez Cortés
Plantel "Sor Juana Inés de la Cruz"

Química Farmacéutica Bióloga
Janette Jaimes García
Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel "Dr. Pablo González Casanova"

Doctora en Educación
María del Rosario Sotelo Hurtado
Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel "Isidro Fabela Alfaro"

Licenciada en Comunicación
Ana Vianey Suárez Castro
Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel " Mtro. José Ignacio Pichardo Pagaza"

ADMINISTRACIÓN
UNIVERSITARIA
2021 - 2025

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

Doctor en Ciencias Computacionales
José Raymundo Marcial Romero
Secretario de Docencia

Doctora en Ciencias Sociales
Martha Patricia Zarza Delgado
Secretaria de Investigación y Estudios Avanzados

Doctor en Ciencias de la Educación
Marco Aurelio Cienfuegos Terrón
Secretario de Rectoría

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Luja
Secretaria de Difusión Cultural

Doctor en Ciencias del Agua
Francisco Zepeda Mondragón
Secretario de Extensión y Vinculación

Doctora en Ciencias Económico Administrativas
Eréndira Fierro Moreno
Secretaria de Administración

Doctor en Educación
Octavio Crisóforo Bernal Ramos
Secretario de Finanzas

Doctora en Ciencias Administrativas
María Esther Aurora Contreras Lara Vega
Secretaria de Planeación y Desarrollo Institucional

Doctora en Derecho
Luz María Consuelo Jaimes Legorreta
Oficina de la Abogacía General

Licenciada en Comunicación
Ginarely Valencia Alcántara
Directora General de Comunicación Universitaria

Maestra en Salud Animal
Trinidad Beltrán León
Secretaria Técnica de la Rectoría

Doctor en Ciencias Sociales
Luis Raúl Ortiz Ramírez
Director de Centros Universitarios
y Unidades Académicas Profesionales
Región A y Encargado del Despacho Región B

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Estudios de Nivel Medio Superior

Para **multiplicar** lo haremos por pasos. Empezaremos multiplicando dos monomios, luego un monomio por un polinomio donde utilizaremos la propiedad distributiva de los números reales y finalizaremos multiplicando dos polinomios.

Ejemplo: realizar las siguientes multiplicaciones:

1. Multiplicación de dos monomios.

$$(12x^2y^5z)(-3z^2)(2x^{-3}y^2)$$

$=(12)(-3)(2)(x^2)(x^{-3})(y^5)(y^2)(z)(z^2)$	Se multiplican los coeficientes numéricos y se agrupan las variables idénticas.
$=-72x^{2+(-3)}y^{5+2}z^{1+2}$	Se aplica (1) de las leyes de los exponentes.
$=-72x^{2-3}y^7z^3$	Se realizan las operaciones aritméticas en los exponentes.
$=-72x^{-1}y^7z^3$	Se aplican (2) de las leyes correspondientes.
$=-\frac{72y^7z^3}{x}$	**Resultado**

También se pueden combinar operaciones (suma o resta) con la multiplicación. En este caso recurrimos a la propiedad distributiva como en los siguientes ejemplos:

2. Multiplicación de un monomio por un binomio.

$$(5x^2y)(2xy^3+3y^2z)$$

$=(5x^2y)(2xy^3)+(5x^2y)(3y^2z)$	Aplicamos la propiedad distributiva de los números reales.
$=(5)(2)(x^2)(x)(y)(y^3)+(5)(3)x^2(y)(y^2)(z)$	Se multiplican los coeficientes numéricos y se agrupan las variables idénticas.
$=10x^{2+1}y^{1+3}+15x^2y^{1+2}z$	Se realizan las operaciones y se aplica (1) de las leyes de los exponentes.
$=10x^3y^4+15x^2y^3z$	**Resultado**

3. Multiplicación de un polinomio por un binomio.

$$(5x^2+3y+4z)(2x-y^2)$$

$=(5x^2+3y+4z)(2x)-(5x^2+3y+4z)(y^2)$

Se utiliza la propiedad distributiva.

$=(5x^2)(2x)+(3y)(2x)+(4z)(2x)-[(5x^2)(y^2)+(3y)(y^2)+(4z)(y^2)]$

Se vuelve aplicar la propiedad distributiva.

$=(5)(2)(x^2)(x)+(3)(2)(y)(x)+(4)(2)(z)(x)-(5)(1)(x^2)(y^2)-(3)(1)(y)(y^2)-(4)(1)(z)(y^2)$

Se multiplican los coeficientes numéricos y se agrupan las variables idénticas.

$=10x^{2+1}+6xy+8xz-5x^2y^2-3y^{1+2}-4y^2z$

Se aplica (1) de las leyes de los exponentes.

$=10x3+6xy+8xz-5x^2y^2-3y^3-4y^2z$ **Resultado**

Es momento de practicar lo aprendido.



Actividad 7.

Producto de expresiones algebraicas

Instrucciones: para reforzar lo antes visto se te pide dar clic en el enlace.

1.2.4 Cociente

Para dividir términos, se dividen los coeficientes numéricos, posteriormente se dividen las variables teniendo cuidado de respetar las leyes de los exponentes.

Ejemplo: realizar las siguientes divisiones o cocientes:

1. División de monomios.

$$\frac{12x^3z^5y}{3y^7x^8}$$

$=\left(\frac{12}{3}\right)\left(\frac{x^3}{x^8}\right)(z^5)\left(\frac{y^1}{y^7}\right)$ Se dividen los coeficientes numéricos y las variables.

$= 4(x^{3-8})(z^5)(y^{1-7})$ Se aplica (3) de las leyes de los exponentes.

$=4x^{-5}\,z^5\,y^{-6}$ Se realizan las operaciones en los exponentes y se aplica (2) de las leyes de los exponentes.

$=\frac{4z^5}{x^5y^6}$ **Resultado**

Para dividir un polinomio entre polinomio es útil cambiar la notación de la división y proceder de forma similar a la división euclidiana. Siguiendo los siguientes pasos:

I. Dividir el término con exponente mayor del dividendo entre el término con mayor exponente del divisor.
II. Multiplicar el resultado obtenido por todo el divisor y restarlo al dividendo.
III Realizar la resta y bajar el siguiente término del dividendo.
IV. Seguir este procedimiento hasta que se obtenga un polinomio de grado menor al divisor.

En los siguientes ejemplos se muestra esta división.

2. División de un polinomio entre un monomio.

Dividir $(16x^6y^3 - 8x^4y^2 - 4x^2y^5) \div (4x2y)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^4y^2 - \quad y^4 \\
\hline
4x^2y & 16x^6\,y^3 - 8x^4\,y^2 - 4x^2\,y^5 \\
 & - \\
 & 16x^6y^3 - 8x^4y^2 \\
\hline
 & 0 \quad + 0 \quad -4x^2y^5 \\
 & - \\
\hline
 & -4x^2y^5 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

3. División de un polinomio entre un binomio.

Dividir $(x^2-5x-12) \div (x-4)$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \quad -9 \\
\hline
x-4 & x^2 \quad -5x \quad -12 \\
 & - \\
 & x^2 + 4x \\
\hline
 & 0 \quad -9x \quad -12 \\
 & \quad - \\
 & \quad -9x \quad +36 \\
\hline
 & \quad -48
\end{array}
$$

4. División de un polinomio entre un binomio.

Dividir $(24x^3 - 56y + 26xy^2 - y^3) \div (12x + 2y)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 \quad -5xy \quad +3y^2 \\
\hline
6x + y & 12x^3 \quad -28x^2y \quad +13xy^2 \quad -y^3 \\
 & -\ 12x^3 \quad +2x^2y \\
\hline
 & \quad -30x^2y \quad +13xy^2 \\
 & \quad -\ -30x^2y \quad -5xy^2 \\
\hline
 & \quad\quad 18xy^2 - y^3 \\
 & \quad\quad -\ 18xy^2 \quad +3y^3 \\
\hline
 & \quad\quad\quad -4y^3
\end{array}
$$

Es momento de practicar lo aprendido.



Actividad 8.



Cociente de expresiones algebraicas

Instrucciones: para reforzar lo antes visto se te pide dar clic en el enlace.

1.2.5 Potencia

Para elevar un término a una potencia, se elevan a dicha potencia los coeficientes numéricos, posteriormente se elevan a la misma potencia las variables teniendo cuidado de respetar las leyes de los exponentes.

Ejemplo: realizar las siguientes operaciones:

1.

$(2x^3)^5$	
$=(2^5)\,(x^3)^5$	Se eleva a la quinta potencia el coeficiente numérico la variable.
$=32x^{(3)(5)}$	Se aplica (4) de las leyes de los exponentes.
$=32x^{15}$	**Resultado**

2.

$\left(\frac{3x^4y^{-3}z^2}{8x^3y}\right)^4$	
$=\left(\frac{3}{8}x^{4-3}y^{-3-1}z^2\right)^4$	Se aplica (3) de las leyes de los exponentes.
$=\left(\frac{3x^1y^{-4}z^2}{8}\right)^4$	Se realizan las operaciones.
$\frac{(3)^4(x^1)^4(y^{-4})^4(z^2)^4}{(8)^4}$	Se aplica (6) de las leyes de los exponentes.
$=\left(\frac{3^4x^{(1)(4)}y^{(-4)(4)}z^{(2)(4)}}{8^4}\right)$	Se aplica (4) de las leyes de los exponentes.
$=\frac{81x^4z^8}{4096y^{16}}$	**Resultado**

Es momento de practicar lo aprendido.



Actividad 9.

Potencia de expresiones algebraicas.

Instrucciones: para reforzar lo antes visto se te pide dar clic en el enlace.

1.3 Productos notables

Los productos notables son multiplicaciones que se utilizan comúnmente en matemáticas para facilitarnos las operaciones. En caso de no recordarlos podemos simplemente realizar la operación requerida y luego simplificar.

Los productos notables más comunes se encuentran en la siguiente tabla.

Tabla de productos notables

Tabla 3. Productos notables

Nombre del producto notable	Producto	Lenguaje común
Cuadrado de un binomio (suma)	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el doble del producto de los dos números, más el cuadrado del segundo.
Cuadrado de un binomio (resta)	$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$	El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero, menos el doble del producto de los dos números, más el cuadrado del segundo.
binomio conjugado	$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$	La diferencia del cuadrado de dos números es igual al producto de la suma de ellos por la diferencia del primer número menos el segundo número.

Cubo de un binomio (suma)	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b + 3ab^2 + b^3$	El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, más tres veces el cuadrado del primero por el segundo, más tres veces el primero por el cuadrado del segundo; más el cubo del segundo.
Cubo de un binomio (diferencia)	$(a-b)^3=a^3-3a^2b + 3ab^2 - b^3$	El cubo de la diferencia de dos números es igual al cubo del primero, menos tres veces el cuadrado del primero por el segundo, más tres veces el primero por el cuadrado del segundo; menos el cubo del segundo.

Nota. Fuente: León, G.A. (2024). Elaboración propia. [Productos notables].

1.3.1 Cuadrado de un binomio

Recordemos que un binomio es un polinomio que tiene dos términos no semejantes y estos pueden estar conectados por una suma o una resta. Así que al hablar de un binomio al cuadrado tenemos dos casos, con suma o resta.

Cuadrado de un binomio (suma)

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

La suma de dos números al cuadrado es igual al cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Ejemplo: desarrolla los siguientes productos notables:

1.

$(3x + 2y)^2$

$=(3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2$	Se eleva al cuadrado el primer término, se le aumenta el doble producto del primer término por el segundo y se aumenta el cuadrado del segundo término.
$=(3)^2(x)^2+(2)(3)(2)(x)(y)+(2)^2\,(y)^2$	Se aplica (6) de las leyes de los exponentes.
$=9x^2+12xy+4y^2$	**Resultado**

2.

$(5w^3+8z^{-4})^2$

$=(5w^3)^2+2(5w^3)(8z^{-4} + 8z^{-4})^2$	Se eleva al cuadrado el primer término se le aumenta el doble producto del primer término por el segundo y se aumenta el cuadrado del segundo término.

$=(5)^2(w^3)^2+(2)(5)(8)(w^3)(z^{-4})+(8)^2(z-4)^2$

Se aplica (6) de las leyes de los exponentes.

$=25w^{(3)(2)}+80w^3z^{-4}+64z^{(-4)(2)}$

Se aplica (4) de las leyes de los exponentes.

$=25w^6+80w^3z^{-4}+64z^{-8}$

Se realizan las operaciones en los exponentes y se aplica (2) de las leyes de los exponentes.

$= 25w^6+\frac{80w^3}{z^4}+\frac{64}{z^8}$

Resultado

Cuadrado de un binomio (resta)

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

La diferencia de dos números al cuadrado es igual al cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Ejemplo: desarrolla los siguientes productos notables:

1.

$(x-2y)^2$

$=(x)^2-2(x)(2y)+(2y)^2$

Se eleva al cuadrado el primer término, se le resta el doble producto del primer término por el segundo y se aumenta el cuadrado del segundo término.

$=(x)^2-(2)(2)(x)(y)+(2)^2(y)^2$

Se aplica (6) de las leyes de los exponentes.

$=x^2-4xy+4y^2$

Resultado

2.

$(3w3-4z(-4)2$

$=(3w^3)^2-2(3w^3)(4z^{-4})+(4z^{-4})^2$

Se eleva al cuadrado el primer término, se le resta el doble producto del primer término por el segundo y se aumenta el cuadrado del segundo término.

$=(3)^2(w^3)^2-(2)(3)(4)(w^3)(z^{-4})+(4)^2\,(z^{-4})^2$

Se aplica (6) de las leyes de los exponentes.

$=9w^{(3)(2)}-24w^3\,z^{-4}+16z^{(-4)(2)}$

Se aplica (4) de las leyes de los exponentes.

$=9w^6-24w^3\,z^{-4}+16z^{-8}$

Se realizan las operaciones en los exponentes y se aplica (6) de las leyes de los exponentes.

$=9w^6-\frac{24w^3}{z^4}+\frac{16}{z^8}$

Resultado

Es momento de practicar lo aprendido.



Actividad 10.

Cuadrado de un binomio

Instrucciones: resuelve los productos notables y selecciona la respuesta correcta.

1.3.2 Binomios conjugado

Dos binomios son conjugados si alguno de los términos tiene signo contrario.

En la siguiente tabla se dan algunos ejemplos de algunos binomios conjugados de un binomio

Tabla 4. Binomios conjugados

Binomio	$(a+5)$	$(x-7)$	$(2w-1)$
Binomios conjugados	$(a-5)$ $(-a+5)$	$(x+7)$ $(-x+7)$	$(2w-1)$ $(-2w+1)$

Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Elaboración propia. [Binomios conjugados].

El producto de binomios conjugados es la diferencia de cuadrados de los términos

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

En los siguientes ejemplos usamos la fórmula dada para obtener el producto de binomios conjugados.

1. $(a+2)(a-2)=a^2-4$
2. $(a-3)(a+3)=a^2-9$
3. $(a-\frac{1}{2})(a+\frac{1}{2})=a^2-\frac{1}{4}$
4. $(2x+4)(2x-4)=(2x)^2-(4)^2$

$$=4x^2-16$$

5. $(xy-5)(xy+5)=(xy)^2-(5)^2$

$$=x^2y^2-25$$

6. $(x^3+y^2)(x^3-y^2)=(x^3)^2-(y^2)^2$

$$=x^6-y^4$$



Actividad 11.



Diferencia de cuadrados

Instrucciones: resuelve los siguientes productos de binomios conjugados y relaciónalos con su resultado correspondiente. Para comenzar da clic AQUÍ.

1.3.3 Binomios con término común

El producto notable de lo binomios por termino común es igual a el término común al cuadrado más la suma de los términos no comunes de los binomios más el producto de los términos no comunes. Esto es

$$(x+b)(x+c)=x^2+(b+c)x+bc$$

En los ejemplos de usa la formula anterior para calcular el producto de dos binomios con término común.

1. $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+(2)(3)$

$$=x^2+5x+6$$

PENSAMIENTO MATEMÁTICO II

2. $(x+6)(x-3)=x^2+(6-3)x+6(-3)$

$=x^2+3x-18$

3. $(x-2)(x-3)=x^2+(-2-3)x+(-2)(-3)$

$=x^2-5x+6$

4. $(2x+7)(2x+1)=4x^2+(7+1)(2x)+(7)(1)$

$=4x2+16x+7$



Actividad 12.



Producto con término común

Instrucciones: completa el siguiente ejercicio de trinomio que resulta del producto de binomios con término común, para comenzar da clic AQUÍ.

1.3.4 Cubo de un binomio

Cubo de un binomio (suma)

El producto de un **cubo de un binomio (suma)** es igual al cubo del primer término, más tres veces el cuadrado del primer por el segundo término, más tres veces el primero por el cuadrado del segundo término; más el cubo del segundo término. Esto es

$$(a+b)^3=a^3+3a^2\,b+3ab^2+b^3$$

En los siguientes ejemplos se obtendrá el producto del cubo de un binomio usando la fórmula anterior.

1. $(x+2)^3 = x^3 + 3(x)^2(2) + 3x(2)^2+2^3$	Sustituir en la fórmula $a = x$ y $b = 2$
$=x^3+6x^2+12x+8$	Resultado
2. $(x-3)^3=(x+(-3))^3$	La diferencia se pues escribir como la suma del inverso aditivo
$(x+(-3))^3= x^3+3(x)^2(-3)+3x(-3)^2+(-3)^3$	Sustituir en la fórmula $a = x$ y $b = -3$
$=x^3-9x^2+27x-27$	Resultado
3. $(2x+5)^3=(2x)^3+3(2x)^2\,(5)+3(2x)(5)^2+5^3$	Sustituir en la fórmula $a = 2x$ y $b = 5$
$=8x^3+ 3(4x^2\,)(5)+3(2x)(25)+12$	Resolver por jerarquía de operaciones
$=8x^3+60x^2+150x+125$	Resultado
4. $(xy-5)^3=(xy)^3+3(xy)^2(-5)+3(xy)(-5)^2+(-5)^3$	Sustituir en la fórmula $a = 2x$ y $b = -5$
$= x^3\,y^3+3(x^2\,y^2)(-5)+3(xy)(25)-125$	Resolver por jerarquía de operaciones
$= x^3\,y^3-15x^2\,y^2+75xy-125$	Resultado

Cubo de un binomio (resta)

El producto de un **cubo de un binomio (resta)** es igual al cubo del primer término, menos tres veces el cuadrado del primer por el segundo término, más tres veces el primero por el cuadrado del segundo término; menos el cubo del segundo término. Esto es

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2\,b + 3ab^2-b^3$$

Para usar la fórmula anterior, se considera a b sin el signo, como se observa en los siguientes ejemplos.

1. $(x-2)^3 = x^3-3(x)^2(2) + 3x(2)^2-(2)^3$	Sustituir en la fórmula $a = x$ y $b = 2$
$= x^3-6x^2+12x-8$	Resultado
2. $(x-7)^3= x^3-3(x)^2\,(7) + 3x(7)^2+(7)^3$	Sustituir en la fórmula $a = x$ y $b = 7$
$= x^3-21x^2+147x-343$	Resultado
3. $(2x-4)^3=(2x)^3+3(2x)^2(4) + 3(2x)(4)^2+ 4^3$	Sustituir en la fórmula $a = 2x$ y $b = 4$
$=8x^3+3(4x^2)(4) + 3(2x)(16) + 64$	Resolver por jerarquía de operaciones
$=8x^3+ 48x^2+ 96x + 64$	Resultado



Actividad 13.

Cuadrado de un binomio

Instrucciones: resuelve correctamente los productos notables y selecciona la respuesta correcta.

1.4 Factorización

En matemáticas, factorizar es el proceso de expresar una suma de términos algebraicos como un producto. Swokowski, E., Cole, J. (2009).

Este proceso se usa para reducir el estudio de las expresiones algebraicas complicadas al estudio de varias expresiones más sencillas.

Para el desarrollo de la factorización primero veremos que los números se pueden descomponer como producto de números primos y diremos que un número es divisible por otro sin al realizar la división el residuo es cero, es decir, la división es exacta.

Por ejemplo, la factorización de número 12, se realiza al obtener sus factores primos de la siguiente manera.

12	2	12 se puede dividir por 2
6	2	El resultado 6, también se puede dividir por 2
3	3	El resultado 3, al ser número primo solo se puede dividir por sí mismo y por uno, pero el uno no es número primo.
1		Cuando se obtiene el uno termina el proceso.

Entonces

$$12=(2)(2)(3)$$

Sin embargo, también se puede descomponer en los siguientes productos:

$$12=3(4)$$

$$12=2(6)$$

$$12=1(12)$$

En la siguiente tabla se obtiene la descomposición por factores primos del 34, 45 y 56, y se agregan otras formas de expresarlo como producto de números no necesariamente primos.

Tabla 5. Descomposición de números como producto de factores

Número	34	45	56
Descomposición en factores primos	34 | 2 17 | 17 1 | $34=2(17)$	45 | 3 15 | 3 5 | 5 1 | $45=3(3)(5)$	56 | 2 28 | 2 14 | 2 7 | 7 1 | $56=2(2)(2)(7)$
Descomposición en factores no necesariamente primos	$34=1(34)$	$45=1(45)$ $45=9(5)$ $45=3(15)$	$56=2(28)$ $56=4(14)$ $56=8(7)$ $56=1(56)$

Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Elaboración propia. [Descomposición de números como producto de factores]

Un término algebraico también se puede descomponer como producto de dos o más factores, esto se deduce de las leyes de los exponentes y la descomposición de números. Veamos los ejemplos en la siguiente tabla.

Tabla 6. Descomposición de términos algebraicos como producto de factores

$3x^3$	$34x^3$	$56a^5$
$3x^3=3x(x)\,(x)$ $3x^3=3x\,(x^2)$	$34x^4=(17x)(2x^3)$ $34x^4=(2x)(17x^3)$ $34x^4=(17x^2)(2x^2)$ $34x^4=(34x)(x^3)$ $34x^4=(34x^3)(x)$	$56=4(28x^5)$ $56=(28x^2)(2x^3)$ $56=(14x^2)(4x^3)$ $56=(14x)(4x^4)$ $56=(8x^2)(7x^3)$ $56=(7x)(4x^4)$ Nota: Hay más descomposiciones

Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Elaboración propia. [Descomposición de términos algebraicos como producto de factores].

1.4.1 Factor común

La factorización con **factor común** se usa cuando cada término de un polinomio contiene un monomio que es factor común. Ese monomio es factor de todo el polinomio como consecuencia de la propiedad distributiva. Lehman, C. H. (2004).

Para describir el procedimiento algebraico para obtener la factorización con por factor común primero definiremos el máximo común divisor de un número.

Definimos al máximo común divisor (mcd) como el mayor número que divide exactamente a dos o más números a la vez.

Ejemplo 1: obtener el $mcd\,(3,6)$

	Divisores		
3	6	3	3 y 6 se dividen a la vez por 2
1	3	3	Para 3 ya encontramos el 1, mientras que para 3 el resultado es 3, es decir aún se puede dividir por 3
	1		

Entonces el número más grande que divide a 3 y 6 a la vez es el 3, es decir $mcd\,(3,6) = 3$

Ejemplo 2: obtener el $mcd\,(12,6,15)$

		Divisores		
12	6	15	2	12 y 6 son divisibles por 2, el 15 se baja igual al no ser divisible por 2
6	3	15	2	6 es divisible por 2, 3 y 15 se bajan igual al no ser divisibles por 2.
3	**3**	**15**	3	3,3, y 15 son divisibles a la vez por 3
1	1	5		Ya solo queda dividir por 5 al 5, ya que es número primo.
		1		

Entonces el número más grande que divide a 12, 6 y 15 a la vez es el 3, es decir $mcd\,(12,6,15) = 3$

Ejemplo 3: obtener el $mcd\,(12,24,18)$

		Divisores		
12	24	20	2	12,24 y 20 son divisibles a la vez por 2
6	12	10	2	6,12 y 10 son divisibles a la vez por 2
3	6	5	3	6 es divisibles por 2, 3 y 5 se bajan al no ser divisibles a la vez por 2

3	3	5	3	3, 3 son divisibles a la vez por 3, 5 se baja al no ser divisibles a la vez por 3
1	1	5	5	Ya solo queda dividir por 5 al 5, ya que es número primo.
		1		

Entonces los números que dividen a la vez a 12, 24 y 15 son los primeros dos divisores 2 y 2, los cuales se multiplican obteniendo como mayor numero que divide a los tres números el 4, es decir, el $mcd(12,6,15) = 2\ (2) = 4$

Ejemplo 4: obtener el $mcd(8,5,14)$

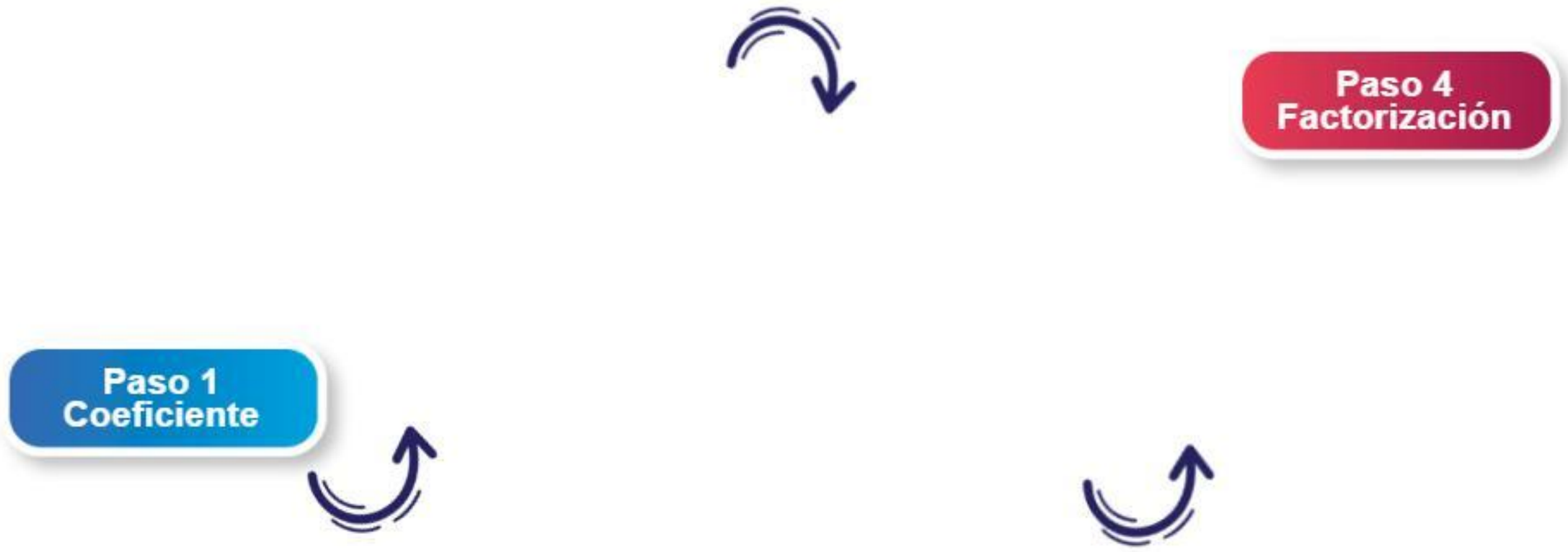
Divisores

8	5	14	2	8 y 14 son divisible por 2, el 5 se baja igual al no ser divisible por 2
4	5	7	2	4 es divisible por 2, 5 y 7 se bajan igual al no ser divisibles por 2.
2	5	7	2	2 es divisible por 2, 5 y 7 se bajan igual al no ser divisibles por 2.
1	5	7	5	5 solo es divisible por 5 al ser número primo y 7 se baja igual al no ser divisible por 5
	1	7	7	Ya solo queda dividir a 7 por 7al ser número primo.
		1		Ya solo queda dividir por 5 al 5, ya que es número primo.

Se puede observar que no hay algún número que divida a la vez al 8, 5 y 14, en este caso se dice que $mcd\ (8,5,14) = 1$, pues el 1 divide a cualquier número.

Ahora bien, para realizar la factorización con factor común de un polinomio se siguen los pasos descritos en el siguiente diagrama.

Figura 4. Pasos para factorizar por factor común



Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Pasos para factorizar por factor común]

Ejemplo 1: factorizar $3x + 6x^2$

$$3x + 6x^2$$

Término 1 Término 2

Figura 5. Ejemplo 1 de factorización con término común



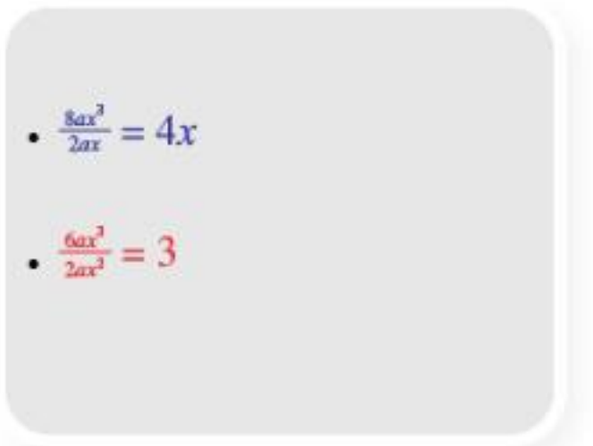
Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Ejemplo 1 de factorización con término común]

Ejemplo 2: factorizar $8ax^3 + 6ax^2$

$$8ax^3 + 6ax^2$$

Término 1 Término 2

Figura 6. Ejemplo 2 de factorización con término commún

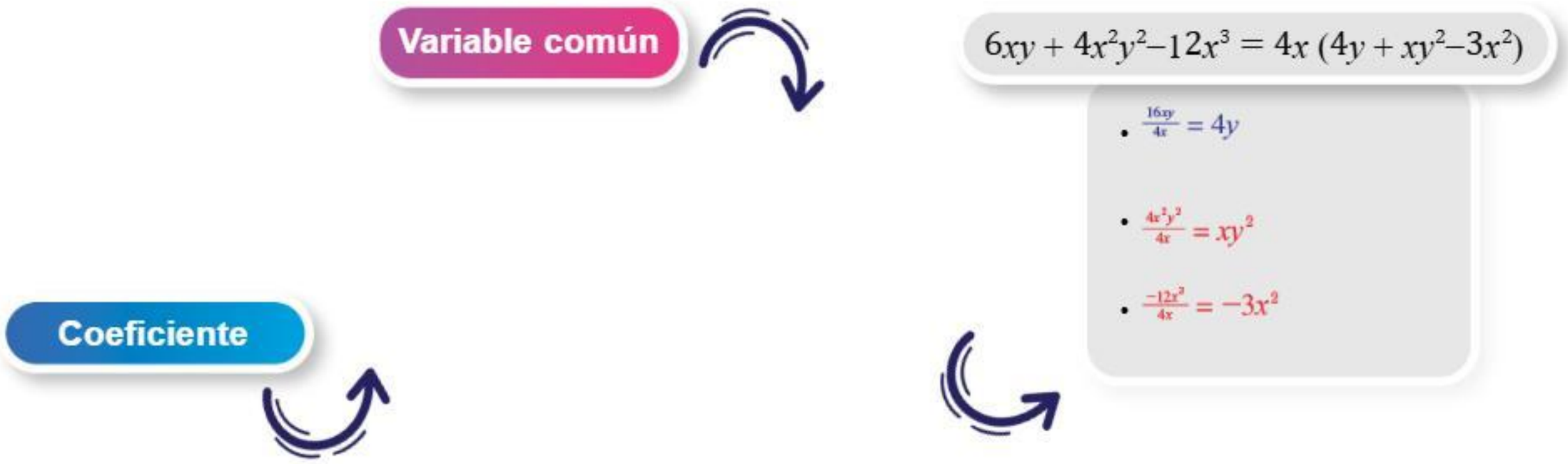


Nota. Fuente: Galicia A., V. (2024). Creación propia. [Ejemplo 2 de factorización con término común]

Ejemplo 3: factorizar $16xy + 4x^2y^2 - 12x^3$

$$16xy + 4x^2y^2 - 12x^3$$
Término 1 Término 2 Término 3

Figura 7. Ejemplo 3 de factorización con término común

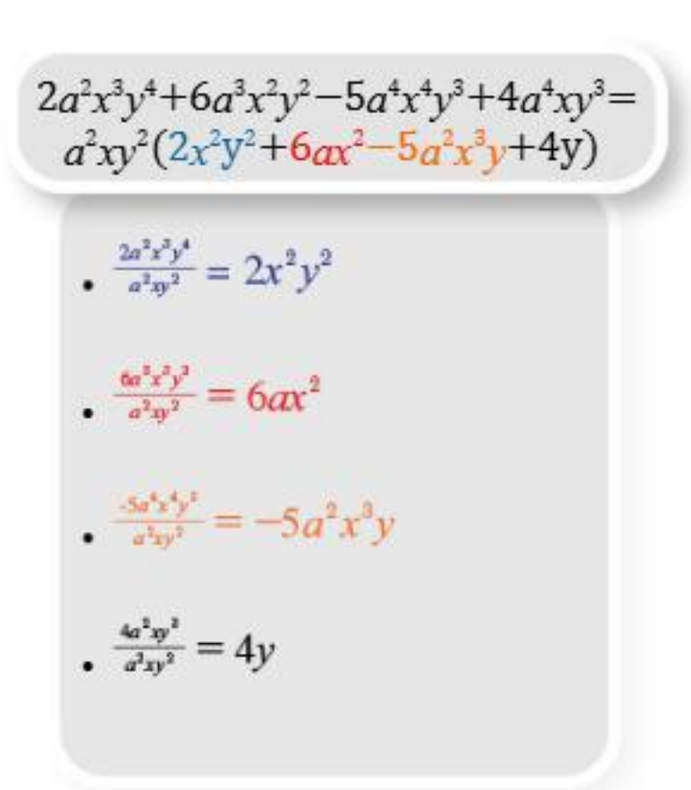


Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Ejemplo 3 de factorización con término común]

Ejemplo 4: factorizar $2a^2x^3y^4 + 6a^3x^2y^2 - 5a^4x^4y^3 + 4a^2xy^3$

$$2a^2x^3y^4 + 6a^3x^2y^2 - 5a^4x^4y^3 + 4a^2xy^3$$
Término 1 Término 2 Término 3 Término 4

Figura 8. Ejemplo 4 de factorización con término común



Nota. Fuente: Galicia A., V. (2024). Creación propia. [Ejemplo 4 de factorización con término común]



Actividad 14.

Factorización con factor común

Instrucciones: resuelve los siguientes ejercicios y decide si la factorización es falsa o verdadera.

1.4.2 Agrupación de términos semejantes

En ocasiones los polinomios no hay un factor común a todos los términos del polinomio, sino en cada uno de varios grupos de términos, pueden ser dos a dos, tres a tres, según su forma. Cuando esto ocurre, el factor común de cada grupo se factoriza mediante la propiedad distributiva. Esta técnica se llama **factorización por agrupamiento.**

Así la factorización por agrupación consiste en que *"si una suma contiene cuatro o más términos, puede ser posible agrupar los términos en una forma apropiada y luego hallar una factorización mediante el uso de las propiedades distributivas"*. Swokowski, E., Cole, J. (2009).

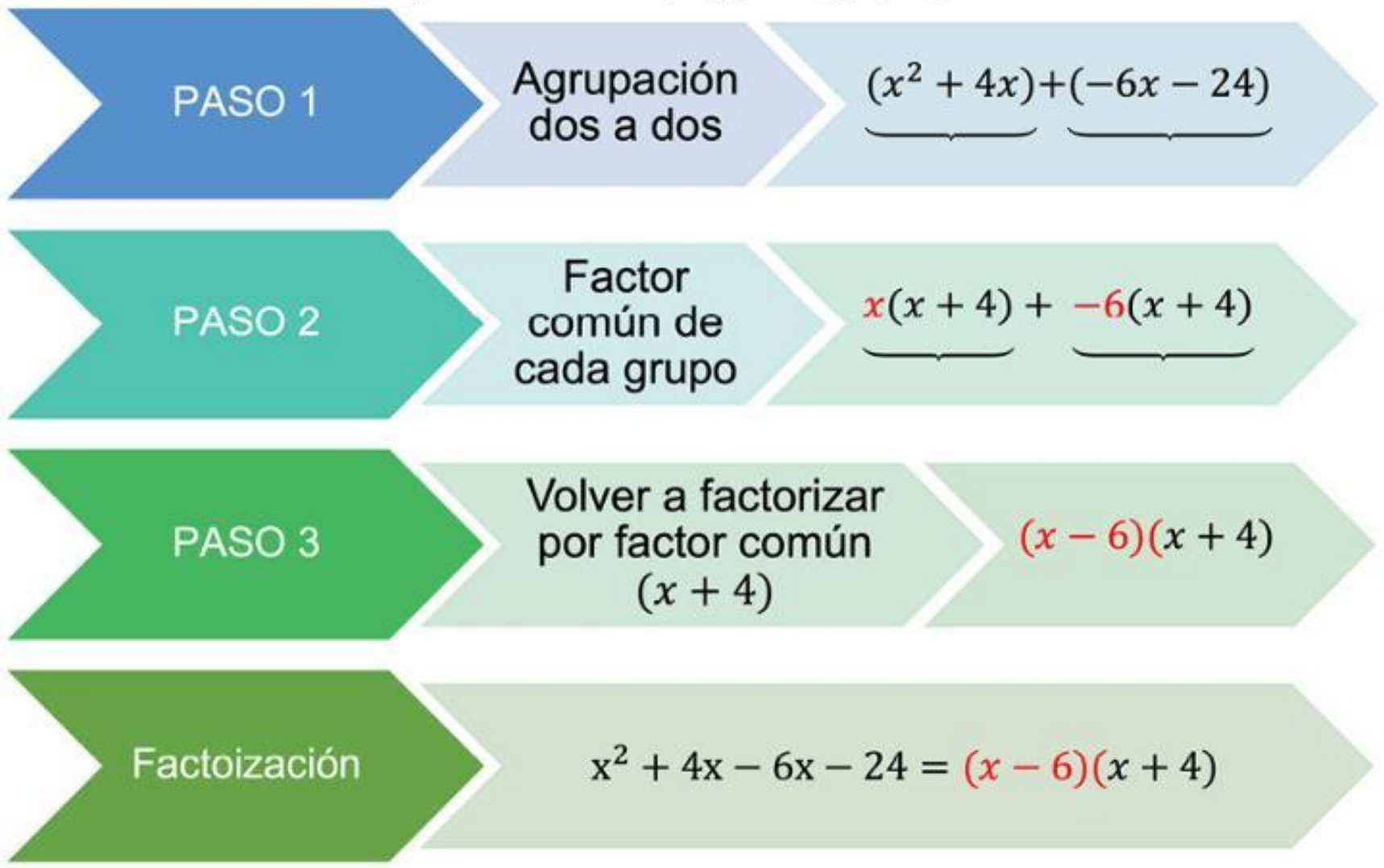
Figura 9. Factorización por agrupación (pasos)



Nota. Fuente: Galicia A., V. (2024). Creación propia. [Factorización por agrupación (pasos)]

Ejemplo 1: factorizar $x^2+4x-6x-24$

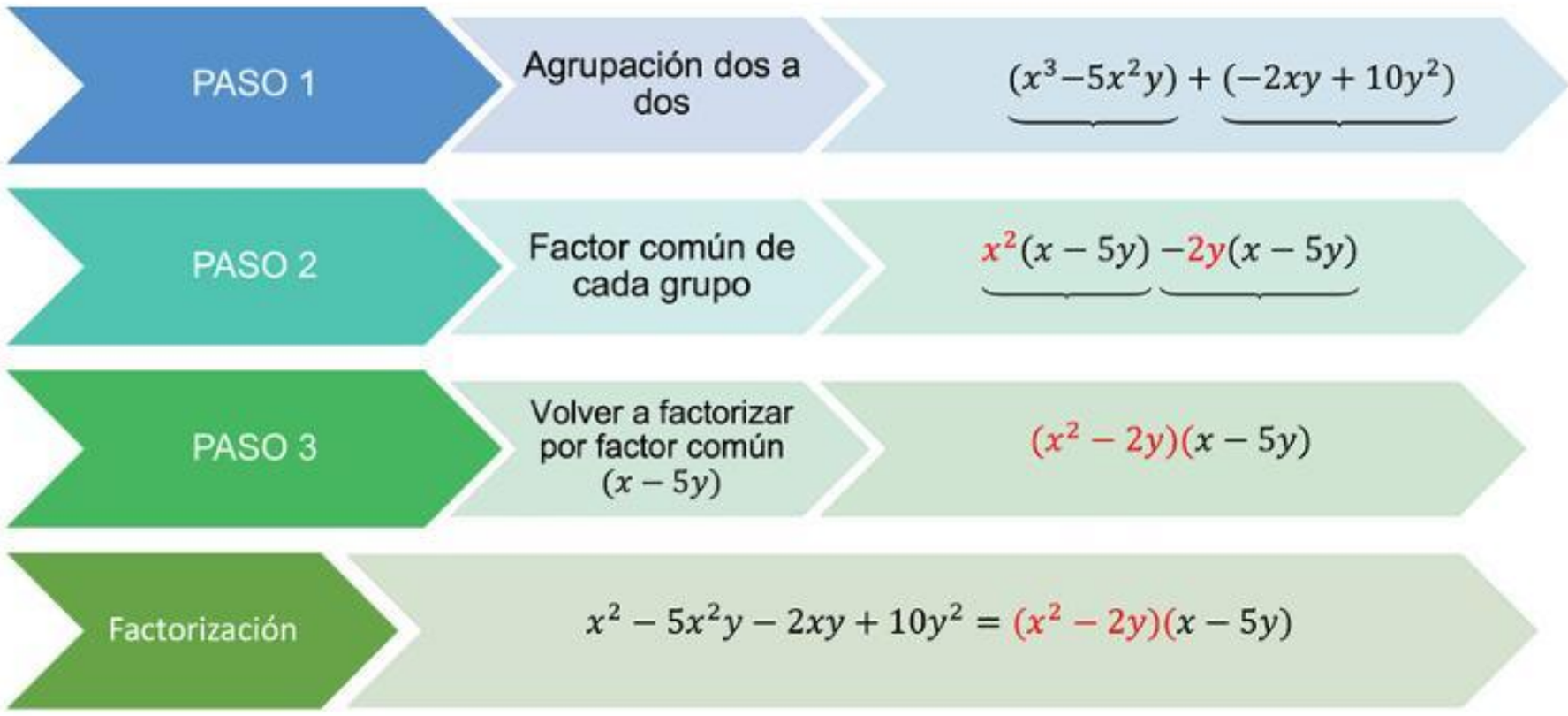
Figura 10. Factorización por agrupación (ejemplo 1)



Nota. Fuente: Galicia A., V. (2024). Creación propia. [Factorización por agrupación (ejemplo 1)]

Ejemplo 2: factorizar $x^3-5x^2y-2xy+10y^2$

Figura 11. Factorización por agrupación (ejemplo 2)



Nota. Fuente: Galicia A., V. (2024). Creación propia. [Factorización por agrupación (ejemplo 2)]

DIRECCIÓN DE PUBLICACIONES UNIVERSITARIAS
Editorial de la Universidad Autónoma del Estado de México

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Luja
Secretaria de Difusión Cultural

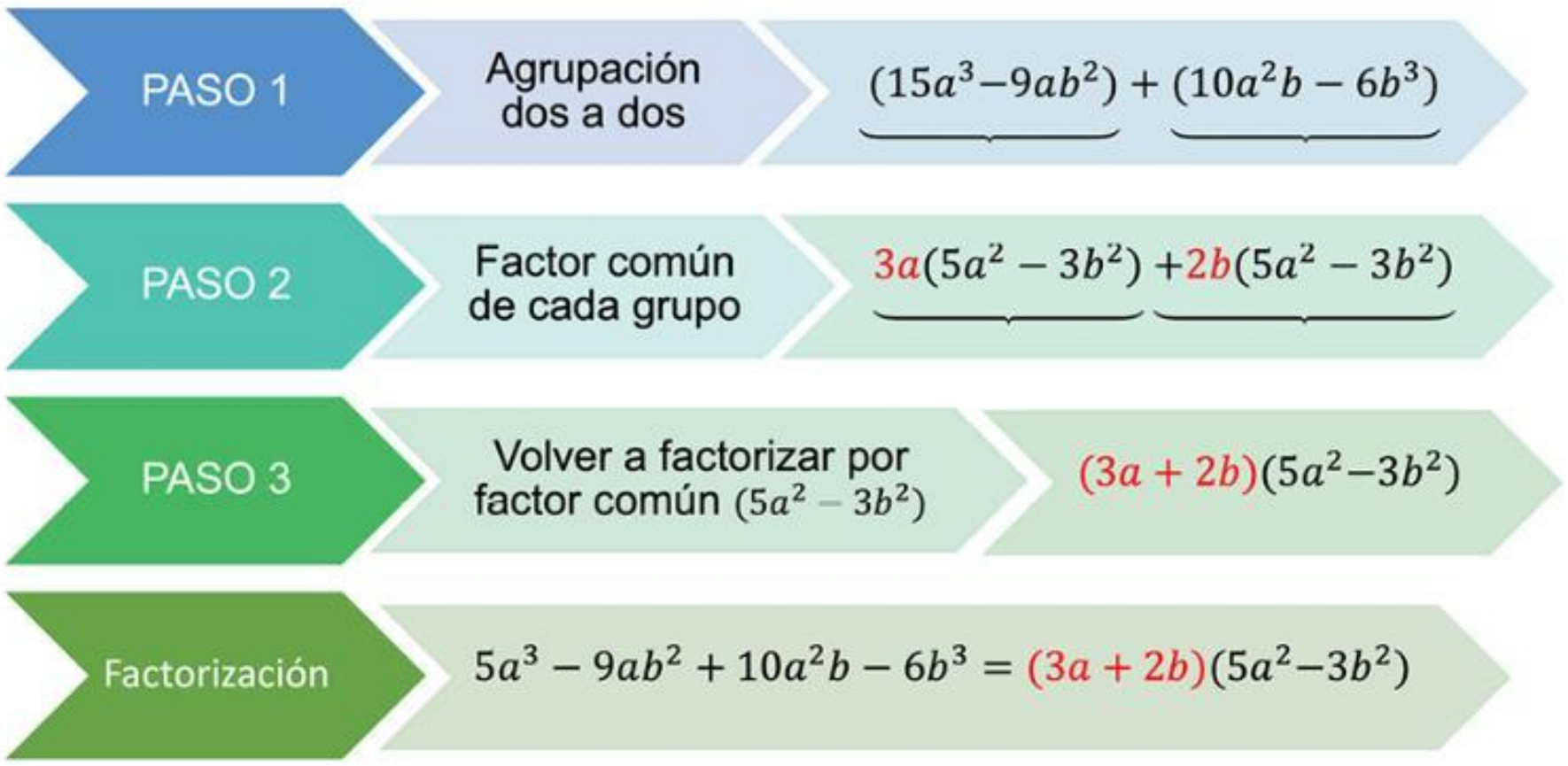
Doctor en Administración
Jorge Eduardo Robles Alvarez
Director de Publicaciones Universitarias

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Estudios de Nivel Medio Superior

Maestro en Tecnología Educativa
Alberto Torres Gutiérrez
Director de Educación Continua y Digital

Ejemplo 3: factorizar $15a^3-9ab^2+10a^2b-6b^3$

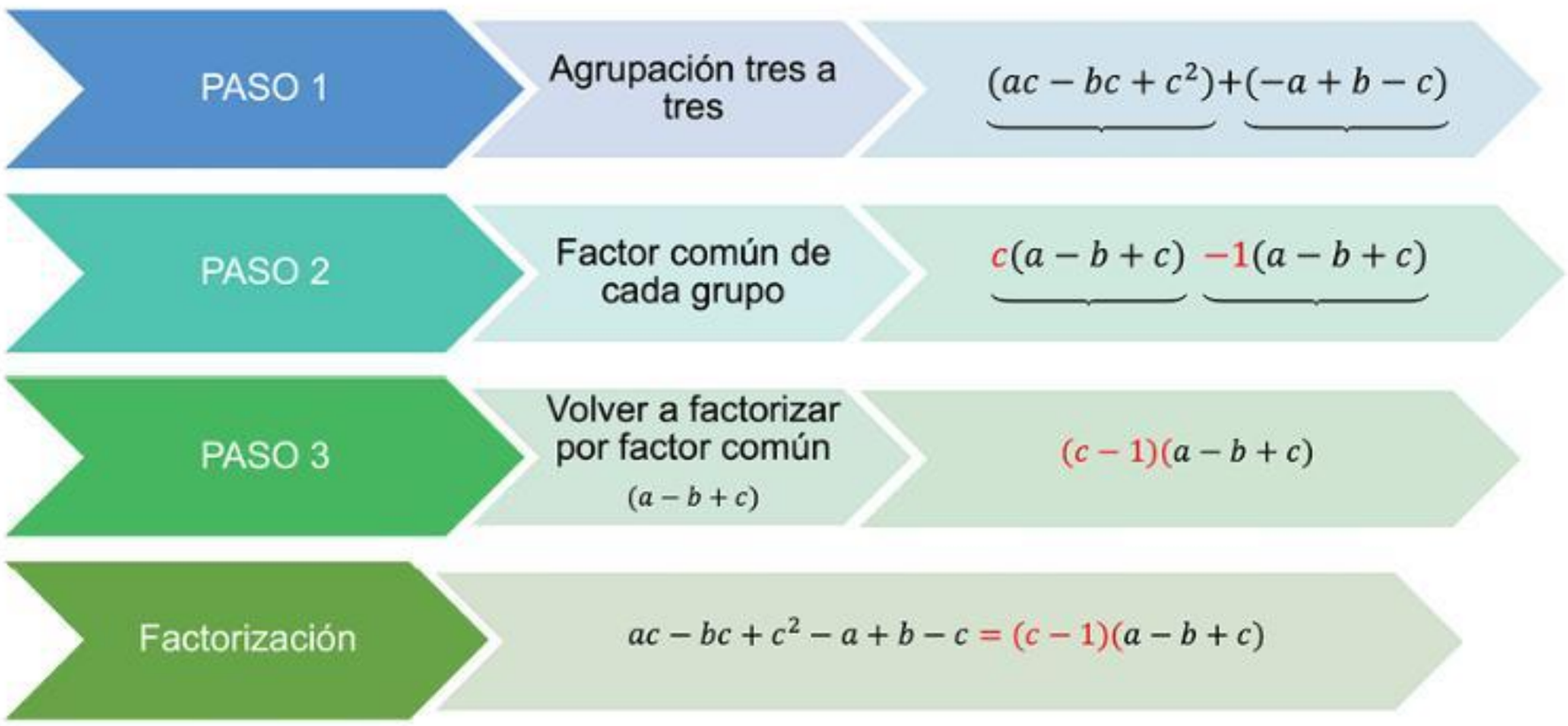
Figura 12. Factorización por agrupación (ejemplo 3)



Nota. Fuente: Galicia A., V. (2024). Creación propia. [Factorización por agrupación (ejemplo 3)]

Ejemplo 4: factorizar $ac-bc+c^2-a+b-c$

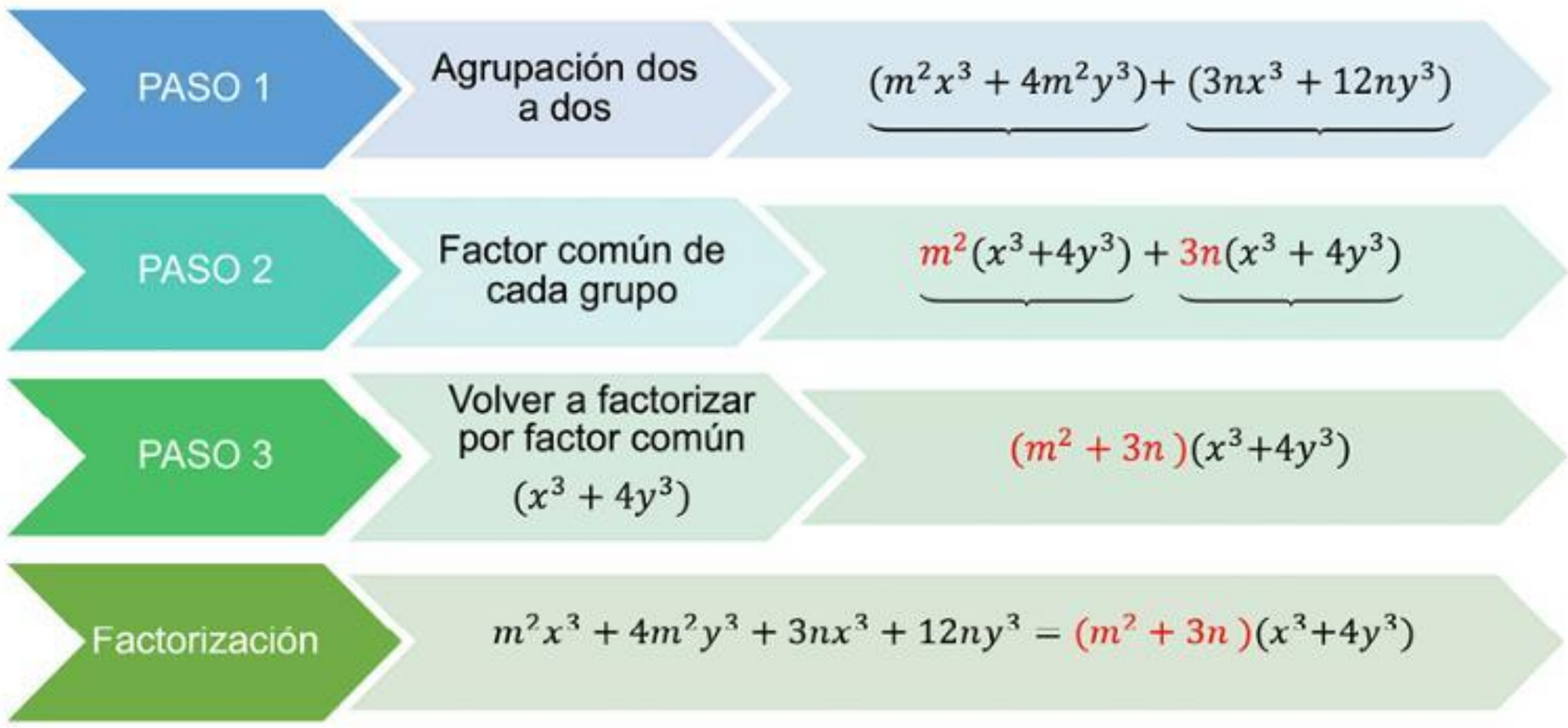
Figura 13. Factorización por agrupación (ejemplo 4)



Nota. Fuente: Galicia A., V.. (2024). Creación propia. [Factorización por agrupación (ejemplo 4)]

Ejemplo 5: factorizar $m^2x^3+4m^2y^3+3nx^3+12ny^3$

Figura 14. Factorización por agrupación (ejemplo 5)



Nota. Fuente: Galicia A., V. (2024). Creación propia. [Factorización por agrupación (ejemplo 5)]



Actividad 15.

Factorización por agrupación

Instrucciones: resuelve los siguientes ejercicios y decide si la factorización es falsa o verdadera.

1.4.3 Diferencia de cuadrados

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

PASO 1

Revisar que la expresión es un binomio, que los términos estén separados por el signo menos y, además, tengan raíz cuadrada exacta.

PASO 2

Obtener la raíz cuadra de cada término del binomio, tanto del minuendo como del sustraendo:
$\sqrt{a^2}=a$ y $\sqrt{b^2}=b$

PASO 3

Expresar en dos factores mediante dos pares de paréntesis y dentro de estos escribir los resultados del paso 2:
$(a\ \ b)(a\ b)$

PASO 4

Entre los dos términos del primer par de paréntesis escribir el signo más y entre los términos del otro paréntesis el signo menos:
$(a+b)(a-b)$

Nota: se sugiere recordar la ley de los radicales.

$$\sqrt[n]{x^m}=x^{m/n}$$

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas denominadas diferencia de cuadrados.

1. $x^2-16=$

x^2-16	Binomio con signo negativo, ambos términos tienen raíz cuadra exacta
$\sqrt{x^2}=x$ $\sqrt{16}=4$	Obtener la raíz cuadrada de cada término
$(x\ \ 4)(x\ \ 4)$	Expresar como producto de dos factores
$(x+4)(x-4)$	Escribir los signos más (+) y menos (–) en cada factor
$x^2-16=(x+4)(x-4)$	**Resultado**

2. $x^2 - 81 =$

$x^2 - 81$	Binomio con signo negativo, ambos términos tienen raíz cuadra exacta
$\sqrt{x^2} = x$ $\sqrt{81} = 9$	Obtener la raíz cuadrada de cada término
$(x \quad 9)(x \quad 9)$	Expresar como producto de dos factores
$(x + 9)(x - 9)$	Escribir los signos más (+) y menos (–) en cada factor
$x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$	Resultado

3. $x^2 - 121 =$

$x^2 - 121$	Binomio con signo negativo, ambos términos tienen raíz cuadra exacta
$\sqrt{x^2} = x$ $\sqrt{121} = 11$	Obtener la raíz cuadrada de cada término
$(x \quad 11)(x \quad 11)$	Expresar como producto de dos factores
$(x + 11)(x - 11)$	Escribir los signos más (+) y menos (–) en cada factor
$x^2 - 121 = (x + 11)(x - 11)$	Resultado

4. $4x^2 - 25 =$

$4x^2 - 25$	Binomio con signo negativo, ambos términos tienen raíz cuadra exacta
$\sqrt{4x^2} = x$ $\sqrt{25} = 5$	Obtener la raíz cuadrada de cada término
$(2x \quad 5)(2x \quad 5)$	Expresar como producto de dos factores
$(2x + 5)(2x - 5)$	Escribir los signos más (+) y menos (–) en cada factor
$4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$	Resultado

5. $16x^2 - 9y^2 =$

$16x^2 - 9y^2 =$	Binomio con signo negativo, ambos términos tienen raíz cuadra exacta
$\sqrt{16x^2} = 4x$ $\sqrt{9y^2} = 3y$	Obtener la raíz cuadrada de cada término
$(4x \quad 3y)(4x \quad 3y)$	Expresar como producto de dos factores
$(4x + 3y)(4x - 3y)$	Escribir los signos más (+) y menos (-) en cada factor
$16x^2 - 9y^2 = (4x + 3y)(4x - 3y)$	Resultado

6. $9x^6 - 25y^{10} =$

Binomio con signo negativo, ambos términos tienen raíz cuadra exacta	$9x^6 - 25y^{10} =$
Obtener la raíz cuadrada de cada término	$\sqrt{9x^6} = 3x^3$ Usar la ley de los radicales $\sqrt{25y^{10}} = 5y^5$
Expresar como producto de dos factores	$(3x^3 \quad 5y^5)(3x^3 \quad 5y^5)$
Escribir los signos más (+) y menos (–) en cada factor	$(3x^3 + 5y^5)(3x^3 - 5y^5)$
Resultado	$9x^6 - 25y^{10} = (3x^3 + 5y^5)(3x^3 - 5y^5)$





Actividad 16.

Ejercicios de factorización por diferencia de cuadrados

Instrucciones: para reforzar lo antes visto se te pide dar clic en el enlace, descarga el formato y resuelve el ejercicio según las instrucciones de tu docente.

1. $25-36x^4=$
2. $9x^2-=$
3. $36a^8-100=$
4. $49y^4-16z^2=$
5. $9p^{10}-121q^6=$

1.4.4 Trinomio simple x^2+bx+c

$$x^2+bx+c$$

Para factorizar el trinomio simple se debe descomponer el término c en un producto de dos factores tales que al sumarse den como resultado el coeficiente del término lineal, es decir b, esto es:

$$c=rs \quad \text{y} \quad b=r+s$$

$$x^2+bx+c=(x+r)(x+s)$$

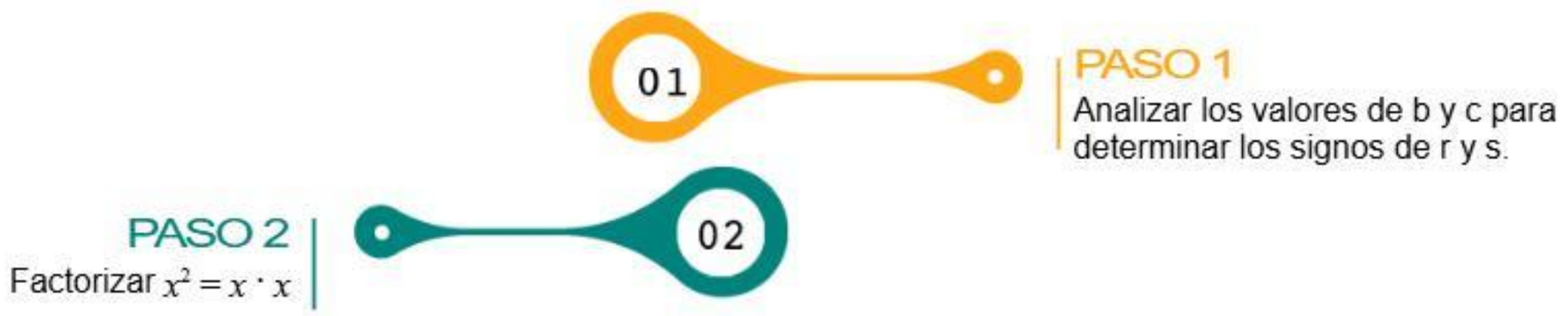
Se deben tomar en cuenta las siguientes consideraciones para los valores tanto de c como de b

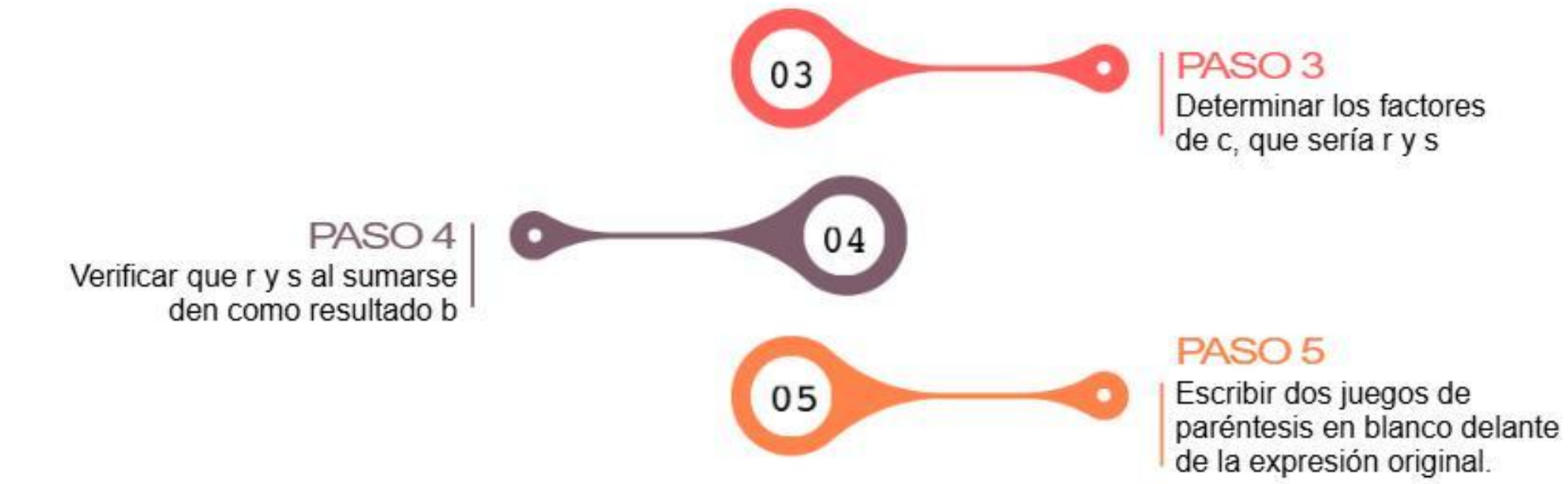
Tabla 7. Valores de *c* y *b*

c	b
1. Si $c>0$, es decir, c es positivo Entonces: ambos factores r y s serán positivos o negativos. **2. Si $c>0$, es decir, c es negativo Entonces: alguno de los factores r o s será negativo, pero no ambos.**	1. *Si* $c>0$ y $b>0$, Entonces: r y s serán positivos 2. *Si* $c>0$ y b <0, Entonces: r y s serán negativos 3. *Si* $c<0$ y b >0, Entonces: *El factor que es positivo tendrá un valor absoluto mayor, Esto es:* $\lvert r\rvert>\lvert s\rvert$ *por lo que* $r>0$ y $s<0$ 4. *Si* $c<0$ y $b<0$, Entonces: *El factor que es negativo tendrá un valor absoluto mayor, Esto es* $\lvert r\rvert>\lvert s\rvert$ *por lo que* $r<0$ y $s>0$

Nota. Fuente: Ortega, N.,A. (2024). Creación propia. [Valores de c y b]

El procedimiento para ejecutar es el siguiente:





Si el coeficiente de la variable cuadrática es diferente de 1 y los valores de b y c son múltiplos de dicho coeficiente, entonces se debe dividir cada coeficiente del trinomio simple entre dicho valor para después ejecutar el procedimiento descrito anteriormente. Al expresar la factorización los factores se deben multiplicar por el valor por el cual se dividió la expresión.

Ejemplos: factorizar los siguientes trinomios simples.

1. $x^2 - 7x + 10 =$

Como $b = -7 < 0$ **y** $c = 10 > 0$ ***Entonces*** r **y** s ***son negativos***	Analizar los valores de b y c para determinar los signos de r y s
$x^2 = x \cdot x$	Factorizar x^2
$10 = (-5)(-2)$ $r = -5$ **y** $s = -2$	Determinar los factores de c = 10
$b = -5 + (-2) = -7$	Verificar que $b = r + s$
$x^2 - 7x + 10 = (\quad)(\quad)$	Escribir los paréntesis
$x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$	Escribir cada factor tanto de x como los valores de r y s en cada paréntesis

2. $x^2 + 8x + 15 =$

Como $b = 8 > 0$ **y** $c = 15 > 0$ ***Entonces*** r **y** s ***son positivos***	Analizar los valores de b y c para determinar los signos de r y s
$x^2 = x \cdot x$	Factorizar x^2
$15 = (3)(5)$ $r = 3$ **y** $s = 5$	Determinar los factores de c = 15

$b = 2 + 5 = 8$	Verificar que $b = r + s$
$x^2 + 8x + 15 = (\quad)(\quad)$	Escribir los paréntesis
$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$	Escribir cada factor tanto de x como los valores de r y s en cada paréntesis

3. $x^2 + 3x - 4 =$

Como $b = 3 > 0$ y $c = -4 < 0$ *Entonces r o s es negativo*	Analizar los valores de b y c para determinar los signos de r y s
$x^2 = x \cdot x$	Factorizar x^2
$-4 = (-4)(1)$ $\lvert -4 \rvert > \lvert 1 \rvert$ $r > 0, r = 4$ y $s > 0, s = -1$	Determinar los factores de c = 15
$b = -7 + 2 = -5$	Verificar que $b = r + s$
$x^2 + 3x - 4 = (\quad)(\quad)$	Escribir los paréntesis
$x^2 + 3x - 4 = (x - 4)(x - 1)$	Escribir cada factor tanto de x como los valores de r y s en cada paréntesis

4. $x^2 - 5x - 14$

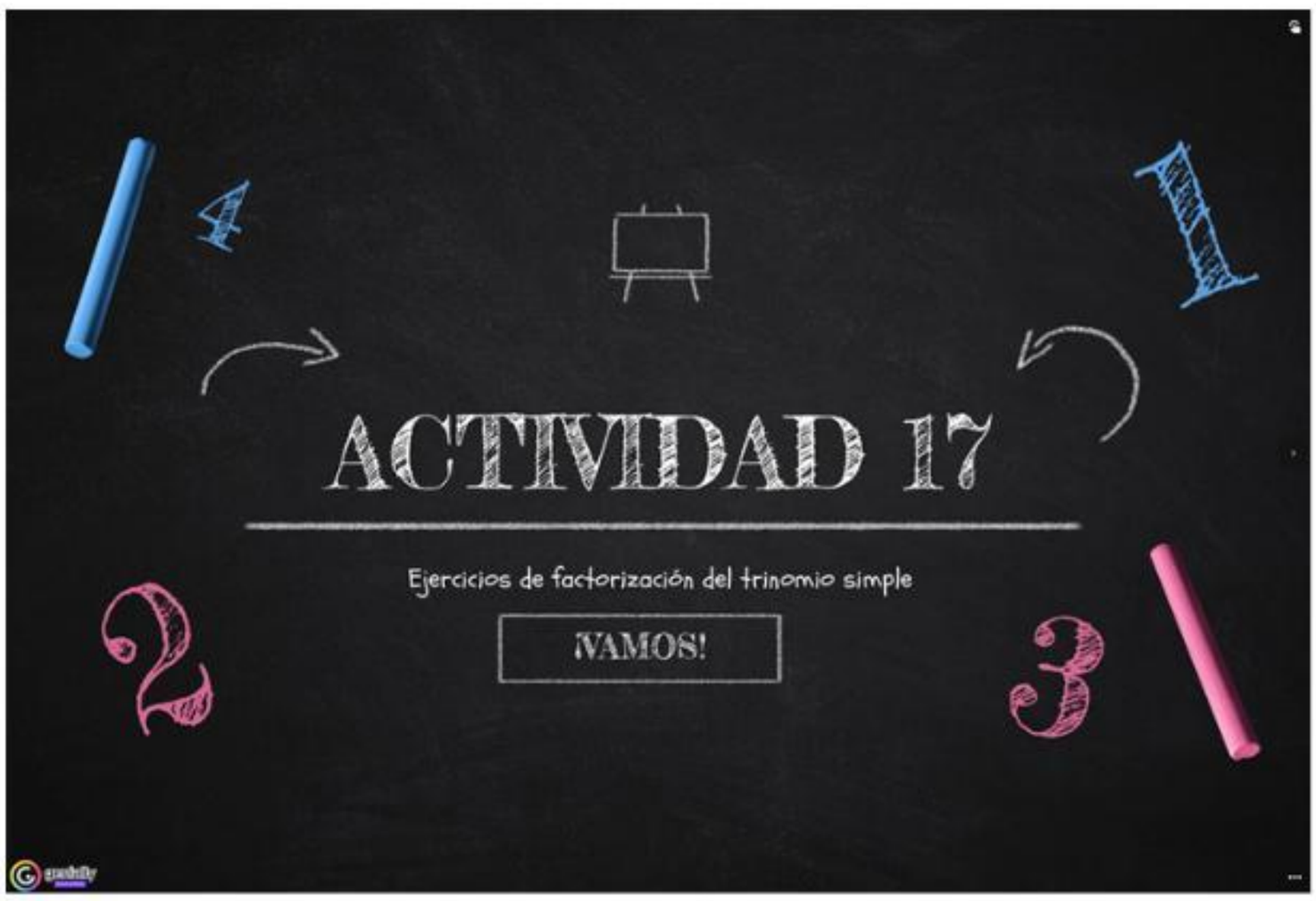
Como $b = -5 < 0$ y $c = -14 < 0$ *r o s es negativo*	Analizar los valores de b y c para determinar los signos de r y s
$x^2 = x \cdot x$	Factorizar x^2
$-14 = (-7)(2)$ $\lvert -7 \rvert > \lvert 2 \rvert$ $r < 0, r = -7$ y $s < 0, s = 2$	Determinar los factores de c = 15
$b = -7 + 2 = -5$	Verificar que $b = r + s$
$x^2 - 5x - 14 = (\quad)(\quad)$	Escribir los paréntesis
$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$	Escribir cada factor tanto de x como los valores de r y s en cada paréntesis

5. $2x^2 + 24x + 54 =$

Como se observa, en el trinomio dado el coeficiente de la variable x es diferente de uno y además, tanto b como c son múltiplos de dicho valor, entonces se divide cada término entre dos, quedando la siguiente expresión equivalente a la que se procederá a factorizar:

$$\frac{2x^2 + 24x + 54}{2} = x^2 + 12x + 27$$

Como $b = 12 > 0$ y $c = 27 > 0$ *r y s serán positivos*	Analizar los valores de b y c para determinar los signos de r y s
$x^2 = x \cdot x$	Factorizar x^2
$27 = (9)(3)$ $r = 9$ y $s = 3$	Determinar los factores de c = 15
$b = 9 + 3 = 12$	Verificar que $b = r + s$
$x^2 + 12x + 27 = (\quad)(\quad)$	Escribir los paréntesis
$2x^2 + 24x + 54 = 2(x + 9)(x + 3)$	Escribir cada factor tanto de x como los valores de r y s en cada paréntesis



Actividad 17.

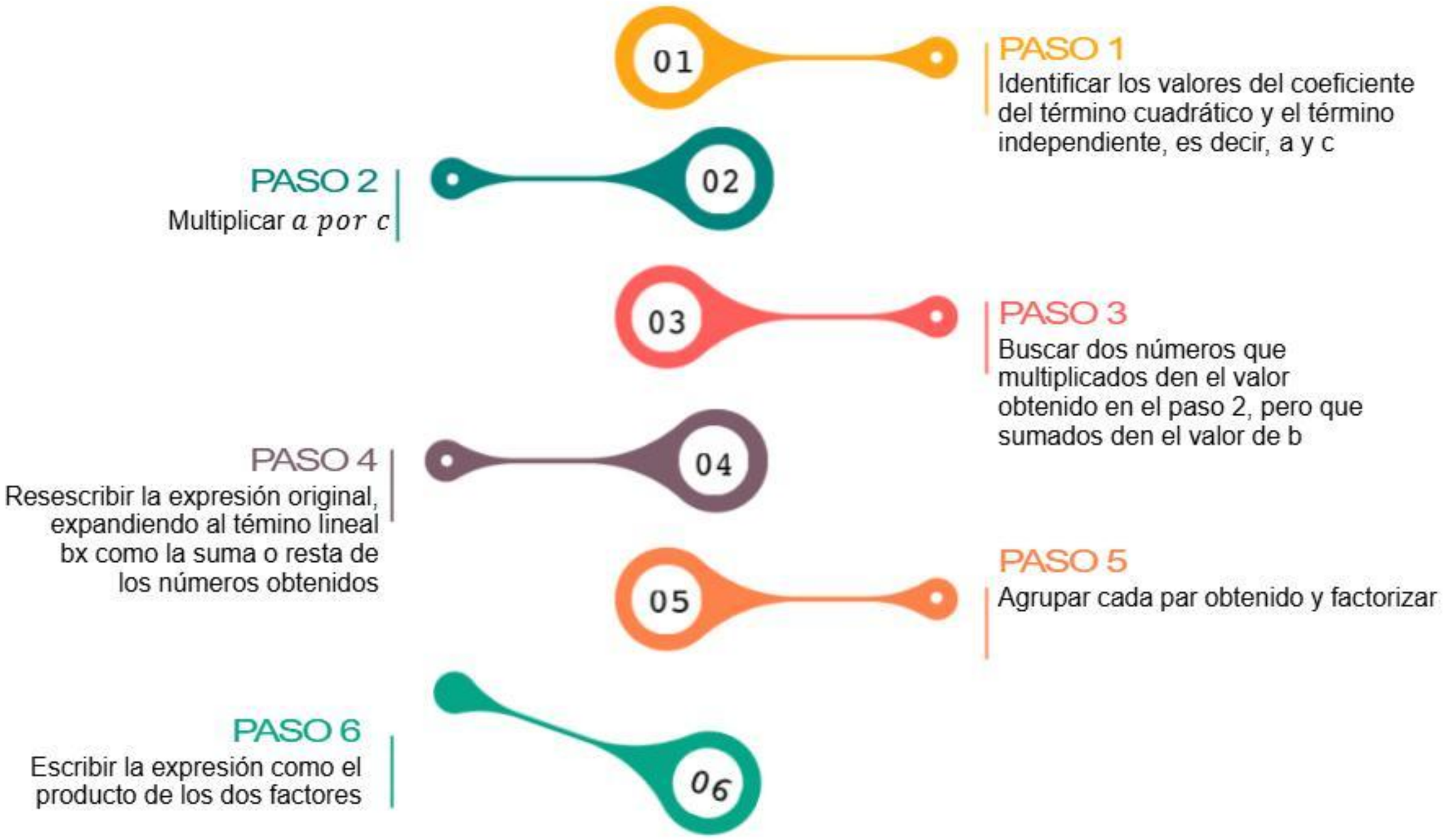
Ejercicios de factorización del trinomio simple

Instrucciones: mediante el uso de un procedimiento correcto, en tu cuaderno factoriza las siguientes expresiones y contesta falso o verdadero para cada uno de los factores de los trinomios propuestos.

1.4.5 Trinomio general $ax^2 + bx + c$

La expresión algebraica $ax^2 + bx + c$ se denomina trinomio general, donde a, b y c son los coeficientes de cada término respectivamente, el valor del coeficiente a es diferente de 1 y, además tanto el primer término como el tercero no tienen raíz cuadra exacta.

Existen varios métodos para poder factorizar dicho trinomio, pero el procedimiento a ejecutar para factorizar dicho trinomio es el siguiente:



1. $6x^2 + 7x + 2 =$

$a = 6, c = 2$	Identificar los valores de a y c
$(a)(c)=(6)(2)=12$	Multiplicar a por c
$12=(4)(3)$ $4+3=7$ $r = 4$ y $s = 3$	Buscar dos números que multiplicados den 12 y sumados den 7, es decir, $rs = 12$ y $r + s=7$
$6x^2+3x+4x+2$	Reescribir la expresión original expandiendo bx como la suma o resta de los términos obtenidos
$3x(2x+1)+2(2x+1)$ $2x+1$ es común $(2x+1)(3x+1)$	Agrupar por múltiplos y factorizar
$\mathbf{6x^2 + 7x + 2 = (3x+2)(2x+1)}$	Escribir la expresión como el producto de los factores

2. $5a^2 + 13a - 6 =$

$a = 5, c = -6$	Identificar los valores de a y c
$(a)(c) = (5)(-6)=-30$	Multiplicar a por c
$-30=(15)(-2)$ $15-2=13$ $r = 15$ y $s = -2$	Buscar dos números que multiplicados den -30 y sumados den 13, es decir, $rs = -30$ y $r + s = 13$

PENSAMIENTO MATEMÁTICO II

Alicia León Galeana
Vasti Galicia Aldama
Alejandro Ortega Nolasco
Gabriela Patricia González Navarro

Universidad Autónoma
del Estado de México

"2025, 195 Años de la Apertura del Instituto Literario en la Ciudad de Toluca"

$5a^2+15a-2a-6$	Reescribir la expresión original expandiendo bx como la suma o resta de los términos obtenidos
$5a(a+3)-2(a+3)$ $a+3$ es común $(a+3)(5a-2)$	Agrupar por múltiplos y factorizar
$\mathbf{5a^2+13a-6=(a+3)(5a-2)}$	Escribir la expresión como el producto de los factores

3. $3y^2-5y-2=$

$a=3, c=-2$	Identificar los valores de a y c
$(a)(c)=(2)(-2)=-6$	Multiplicar a por c
$-6=(-6)(1)$ $-6+1=-5$ $r=-6$ y $s=1$	Buscar dos números que multiplicados den -6 y sumados den -5, es decir, $rs=-6$ y $r+s=-5$
$3y^2-6y+y-2$	Reescribir la expresión original expandiendo bx como la suma o resta de los términos obtenidos
$3y(y-2)+(y-2)$ $y-2$ es común $(y-2)(3y+1)$	Agrupar por múltiplos y factorizar
$\mathbf{3y^2-5y-2=(y-2)(3y+1)}$	Escribir la expresión como el producto de los factores



Actividad 18.



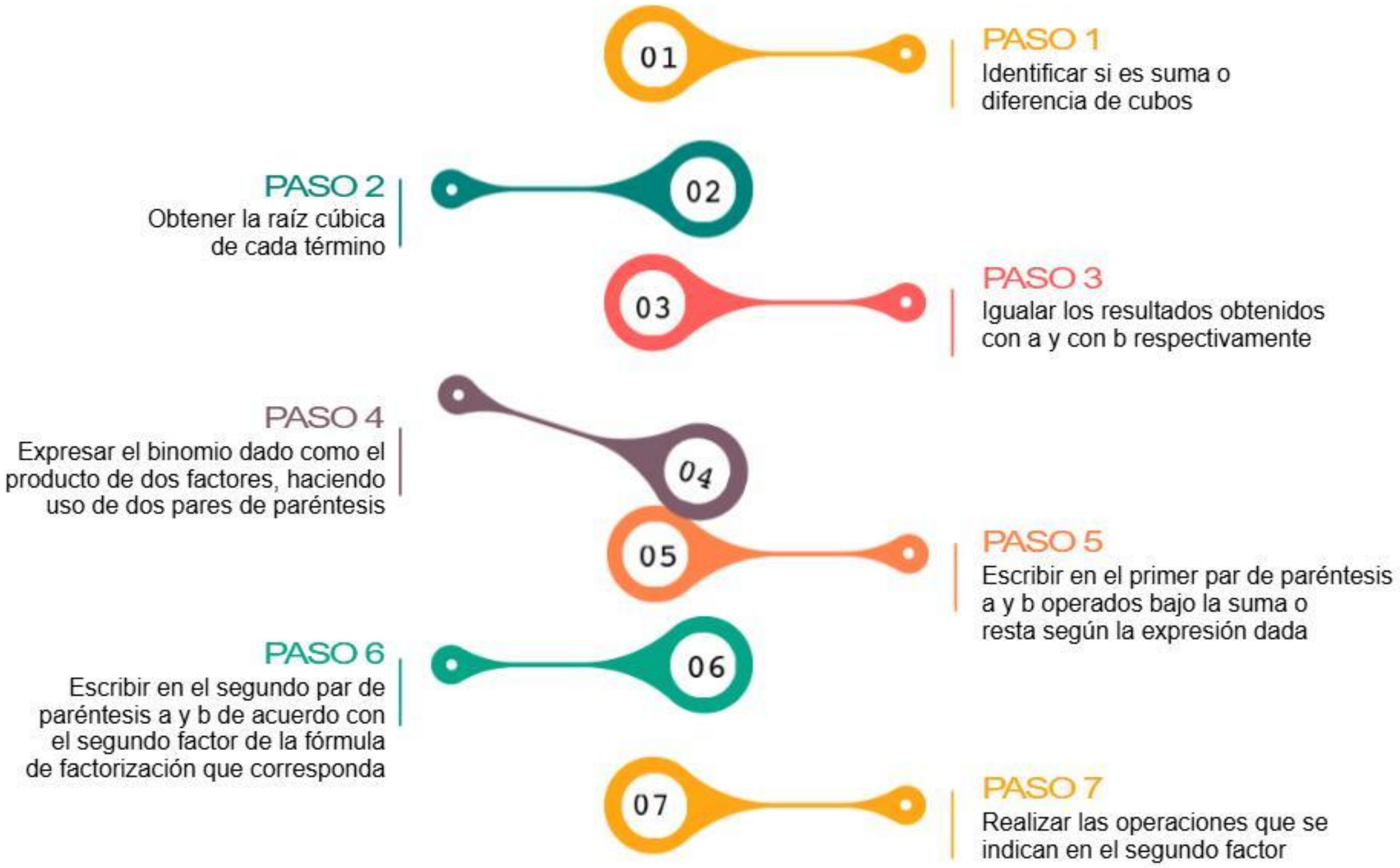
Ejercicios de factorización del trinomio general

Instrucciones: para reforzar lo antes visto se te pide dar clic en el enlace, descarga el formato y resuelve el ejercicio según las instrucciones de tu docente.

1.4.6 Suma y diferencia de cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Las expresiones anteriores también son conocidas como cubos perfectos y su factorización implica expresarlos como el producto de dos factores. Para lo cual se debe seguir el siguiente procedimiento:



Ejemplos: factorizar la suma o diferencia de cubos que se indican

1. $x^3 + 27 =$

x^3+27 es una suma	Identificar si es suma o diferencia de cubos
$\sqrt[3]{x^3} = x$ $\sqrt[3]{27} = 3$	Obtener la raíz cúbica de cada término

$x = a$ $3 = b$	Igualar los resultados obtenidos con a y con b respectivamente
$x^3 + 27 = (\quad)(\quad)$	Expresar el binomio dado como el producto de dos factores, haciendo uso de dos pares de paréntesis
$x^3 + 27 = (x+3)\,(\quad)$	Escribir en el primer par de paréntesis x y 3 operados bajo la suma
$x^3+27 = (x+3)((x)^2-3x+(3)^2)$	Escribir en el segundo par de paréntesis x y 3 de acuerdo con $a^2 - ab + b^2$
$x^3 + 27 = (x+3)(x^2-3x+9)$	Realizar las operaciones que se indican en el segundo factor

2. $x^3 - 64y^6 =$

$x^3 - 64y^6$ es una resta	Identificar si es suma o diferencia de cubos
$\sqrt[3]{x^3} = x$ $\sqrt[3]{64y^6} = 4y^2$	Obtener la raíz cúbica de cada término
$x = a$ $4y^6 = b$	Igualar los resultados obtenidos con a y con b respectivamente
$x^3 - 64y^6 = (\quad)(\quad)$	Expresar el binomio dado como el producto de dos factores, haciendo uso de dos pares de paréntesis
$x^3 - 64y^6 = (x- 4y^2)\,(\quad)$	Escribir en el primer par de paréntesis x y $4y^2$ operados bajo la suma
$x^3- 64y^6 = (x - 4y^6)((x) + (4y^2)+(4y^2)^2)$	Escribir en el segundo par de paréntesis x y $4y^2$ de acuerdo con $a^2 - ab + b^2$
$x^3 - 64y^6 = (x - 4y^2)(x^2 + 4xy^2 + 16y^4)$	Realizar las operaciones que se indican en el segundo factor



Actividad 19.



Ejercicios de factorización de suma y diferencia de cubos

Instrucciones: una vez desarrollado cada uno de los ejercicios propuestos, realiza la actividad siguiente, para iniciar da clic en el enlace.

1.5 Problemas de aplicación

1. Una parábola vertical negativa sigue una trayectoria descrita por la siguiente expresión: $-x^2+2x+3$, ¿cuál es la factorización de la trayectoria?

Solución.

La factorización está dada por un producto de binomios

$-x^2$	3
$-x$	3
x	1

$$\begin{array}{r} 3x \\ -x \\ \hline 2x \end{array}$$

$$-x^2+2x+3=(-x+1)(x+3)$$

2. Calcula el área de una superficie que se describe en la figura.

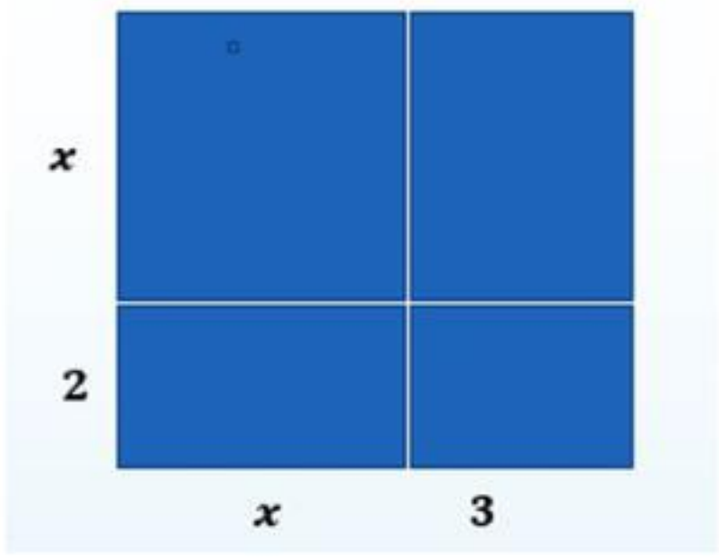
Solución.

El área de un rectángulo se calcula con la fórmula $A = bh$

Donde

A es el área
b es la base y
h es la altura.

En la figura se tienen que:



Base es $b = x + 2$

Altura es $h = x + 3$

Entonces el área es

$$A = bh$$

$$A = (x + 2)(x + 3)$$

$$A = x^2 + (2 + 3)x + 2(3)$$

$$A = x^2 + 5x + 6$$

4. En una bodega se colocan contenedores cúbicos, y la longitud de un lado del contenedor está dado por $x + 4$ metros. Calcula el volumen del espacio total ocupado por un contenedor.

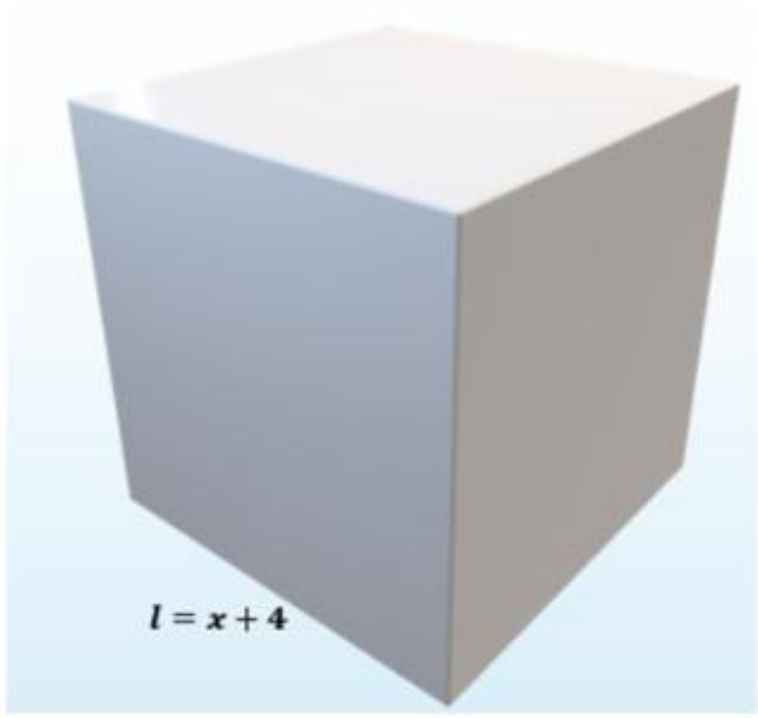
Solución.

El volumen de un cubo se calcula con la fórmula $V = l^3$

Donde

V es el volumen

l es la longitud de una arista



Entonces el volumen es

$$V = l^3$$

$$V = (x+4)^3$$

$$V = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$

4. Los ingresos de un concierto están dados por: $I = 5t2 + 17t + 6$. Factoriza esta expresión por agrupación para simplificar el cálculo de los ingresos del concierto.

Solución.

$$I = 5t^2 + 17t + 6$$

$$= (t + 3)(5t + 2)$$



Actividad 20.

Ejercicios de aplicación de productos notables y factorización

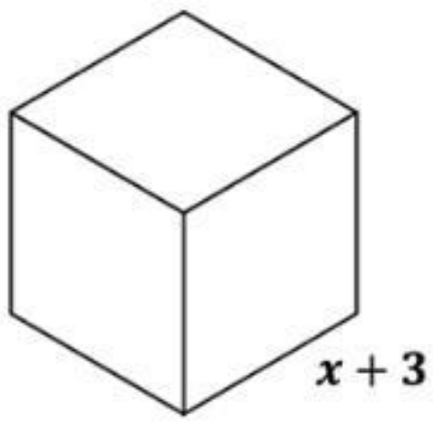
Instrucciones: copia en tu cuaderno cada uno de los problemas que se plantean y resuelve lo que se pide haciendo uso de lo aprendido en el módulo.

1. Determinar una expresión algebraica que permita calcular el área de un terreno rectangular como el que se muestra en la figura siguiente:



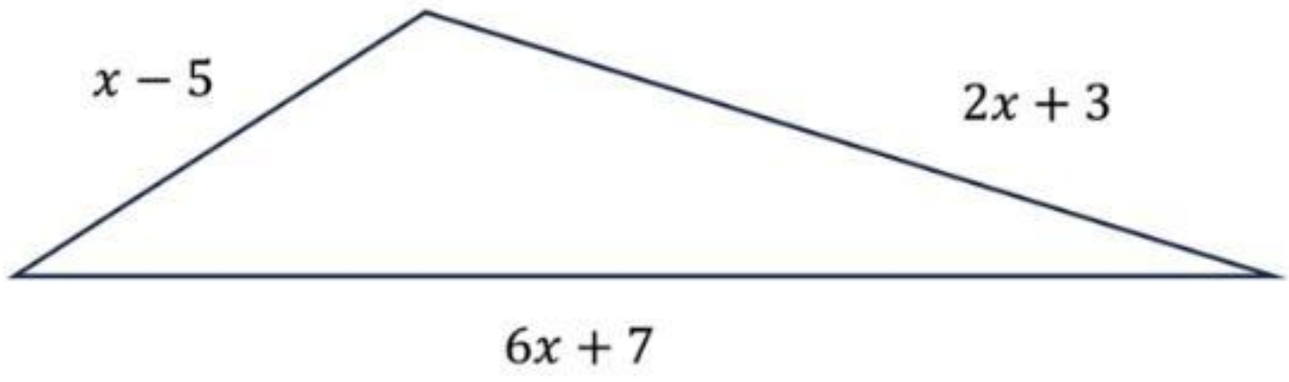
2. Un arquitecto está diseñando una plaza comercial de forma cuadrada, la cual debe tener una fuente en el centro. Si se sabe que el área total de la plaza es de $10{,}000\ m^2$ y que el área que ocupará la fuente es de $6{,}400\ m2$, usa una diferencia de cuadrados para saber cuál es área que queda libre.

3. Determinar una expresión algebraica que permita modelar el volumen del cubo que se muestra:



4. La suma de tres números pares consecutivos es igual a 240, determina una expresión algebraica que modele el problema.

5. Un terreno triangular tiene por medidas las que se muestran en la figura, con ello determinar una expresión algebraica que permita calcular el perímetro de dicha figura:



Resumen del Módulo

El módulo que se desarrolla contiene los temas relacionados a la introducción al álgebra, rama de las matemáticas que los alumnos del segundo semestre deben conocer para poder entender el lenguaje matemático, generalizado mediante las distintas operaciones aritméticas básicas, partiendo desde la transformación de un lenguaje cotidiano o común a un lenguaje algebraico que le permitirá la manipulación de las diferentes expresiones algebraicas, su clasificación, operaciones y simplificación, hasta el desarrollo de los denominados productos notables y su operación inversa, la factorización, entendiendo estos conceptos a partir de la operación aritmética básica, la multiplicación, y sus elementos factores y productos.

El propósito es que el estudiante solucione problemas de aplicación que le permitan aplicar un proceso de análisis y síntesis para lograr la solución de situaciones que se pueden presentar en la vida cotidiana y así alcanzar el desarrollo de la progresión que se establece, bajo una estructura de conceptualización del tema, desarrollo de procedimientos y ejecución de problemas, con base en ejemplos y ejercicios mediante la gamificación, así como el desarrollo de series de ejercicios en cuaderno que el alumno realizará juntamente con su docente titular.

Actividad 21.



Ejercicio autoevaluable

Es momento de probar cuánto has aprendido en este módulo acerca de los temas vistos.

Realiza el siguiente ejercicio, para comenzar, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada M1 Cuestionario Final.

Glosario

Adición: es una de las operaciones básicas de la aritmética y consiste en combinar o agregar dos o más números para obtener un total o resultado, llamado suma o resultado. Los números que se suman se denominan sumandos.

Cociente: nombre utilizado para referirse al resultado de la división.

Diferencia: nombre utilizado también para referirse al resultado de la resta.

Divisible: un número b es un divisible por otro a cuando la división es exacta.

Divisor: es aquel valor que divide al número en partes exactas. Así, dado un número a, si la división a/b es exacta (el resto es cero), entonces se dice que b es divisor de a.

Potencia: nombre utilizado también para referirse al exponente al que está elevado un término.

Producto: nombre utilizado para referirse al resultado de la multiplicación.

Números primos: son aquellos que solo son divisibles entre ellos mismos y el 1. Estos son: 2,3,5,7, 11,13,1, …

Máximo común divisor (mcd): se define como el número más grande que divide de manera exacta a dos o más números

Trinomio: expresión algebraica que consta de tres términos algebraicos no semejantes operados mediante la adición o sustracción.

Referencias

- Cuéllar, J. A. (2015) Matemáticas I, Mc Graw Hill Education, 4ª edición, México.
- Cuéllar, J. A. (2015) Matemáticas II, Mc Graw Hill Education, 4ª edición, México.
- Baldor, Aurelio (1994), Álgebra, Publicaciones Cultural. México. http://www.escolar.com/menumate.htm
- Lehmann, C. (1973). Álgebra. México: Limusa
- Swokowski, E., Cole, J. (2009). Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Cengage Learning.

Primera edición, febrero 2025

PENSAMIENTO MATEMÁTICO II
Libro de texto digital

Autores
Alicia León Galeana
Plantel "*Ignacio Ramírez Calzada*" de la Escuela Preparatoria de la UAEMéx
Vasti Galicia Aldama
Plantel "*Cuauhtémoc*" de la Escuela Preparatoria de la UAEMéx
Alejandro Ortega Nolasco
Plantel "*Ignacio Ramírez Calzada*" de la Escuela Preparatoria de la UAEMéx
Gabriela Patricia González Navarro
Plantel "*Ignacio Ramírez Calzada*" de la Escuela Preparatoria de la UAEMéx

Universidad Autónoma del Estado de México
Av. Instituto Literario 100 Ote. Col. Centro
Toluca, Estado de México
C. P. 50000
Tel: (52) 722 481 18 12
http://www.uaemex.mx

El contenido de este material es responsabilidad de los autores. Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra, sin el consentimiento previo y por escrito del editor. La Universidad Autónoma del Estado de México se deslinda de cualquier acción legal derivada de este material.

® Derechos reservados, 2025

ISBN: En trámite

Hecho en México
Made in Mexico

Módulo II

Teoría de números

Propósito de Módulo

Resuelve algebraica y gráficamente situaciones reales que involucren modelos lineales.

Presentación

En este módulo denominado Teoría de números se tiene como fin el estudio de las relaciones y propiedades de los conjuntos numéricos y para ello se abordan desde los aspectos básicos necesarios para entender desde su definición, representación, manipulación, y aplicaciones.

Se parte desde se conceptualización, clasificación tomando en cuenta sus características similares para denominarlos conjuntos, desde los naturales, enteros, racionales, irracionales y reales, así como su representación en la recta numérica, puntualizando en sus propiedades y poniendo especial atención en los llamados números primos, así como en las reglas de divisibilidad que permiten a través de un conjunto de reglas, determinar si un número es divisible entre otro de tal manera que su residuo sea cero.

Otro de los temas que se desarrolla a lo largo del módulo es el de modelos matemáticos, pasando desde lo que es una contante, variable, fórmula y ecuación que permiten representar de manera formal mediante la utilización de un lenguaje algebraico, que se puede entender como la generalización de la aritmética, sus propiedades y operaciones, las situaciones de la vida real en cada contexto del ser humano, para que después se pueda interpretar de manera numérica los fenómenos, hechos o situaciones específicas.

Por otro lado, se tratan los temas de mínimo común múltiplo y máximo común divisor que permiten trabajar un conjunto de números enteros para determinar el más pequeño o el más grande común respectivamente y así poder simplificar las operaciones aritméticas en caso de ser necesario.

Además, se explican los intervalos numéricos, así como su representación en la recta numérica, su clasificación y operaciones de unión e intersección y, finalmente, se abordan problemas de aplicación orientados tanto en el contexto de los alumnos, como en algunas de las áreas del conocimiento de la ciencia.



Actividad 1.

Evaluación Diagnóstica

Instrucciones: antes de iniciar con la revisión de los contenidos del módulo II, te invitamos a responder a la evaluación diagnóstica.

Esto te ayudará a descubrir los conocimientos previos que tienes sobre los temas a abordar y, al mismo tiempo, le permitirá a tu docente conocer tus fortalezas y debilidades.

Para comenzar con el ejercicio, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada: M2 Evaluación Diagnóstica.

2.1 Definición de número

La definición de número ha estado en constante evolución, desde la concepción de este en las culturas antiguas hasta la edad moderna, teniendo en cuenta el contexto al que se quiera aplicar, por lo que su representación gráfica o simbólica también ha sido diferente.

Así que entonces, un número, en ciencia, es una abstracción que **representa una cantidad** o una magnitud; sin embargo, en matemáticas, este puede representar una cantidad métrica o más generalmente un elemento de un sistema numérico o un número ordinal que representará una posición dentro de un orden de una serie determinada.

Cabe resaltar el concepto de unidad para poder entender al número, así que la unidad es aquella en virtud de la cual cada una de las cosas que hay se llama una, mientras que un número es una pluralidad de unidades.

Figura 1. Números primos



Nota. Fuente: Ruiz, L. (2007,16 enero). ¿Cuáles son los números primos? https://www.mundodeportivo.com/uncomo/educacion/articulo/cuales-son-los-numeros-primos-37095.html

2.1.1 Números primos

Hablar de **números primos** en matemáticas es tener presente los fundamentos de esta, ya que aluden a una parte llena de misterios y sin preciar, aún en esta ciencia del conocimiento humano; el término primo proviene de un vocablo antiguo que significa primario, esencial o primordial. Por lo anterior, es importante entender su definición:

Un número primo es un número natural que mayor a 1 que solo tiene dos divisores, que son la unidad y él mismo, lo cual implica que, al realizar la división, su residuo es cero.

Algunas de las características que tienen estos números son:

- Divisibilidad: solo pueden ser divididos entre la unidad y ellos mismos, es decir, su residuo es cero.
- Números naturales: son siempre números naturales mayores que 1.
- Imparidad: todos, excepto el 2, son números impares.
- Infinitud: los números primos son infinitos, es decir, no hay límite superior para ellos.
- No son fraccionarios: ya que son números enteros no negativos.

Para poder determinar si un número es primo existen varios métodos, entre los que se pueden mencionar: la división directa, la raíz cuadrada, la criba de Eratóstenes y la prueba de primalidad.

Figura 2. Números primos



Nota. Fuente: https://tomi-digital- resources.storage.googleapis.com/images/classes/resources/rsc-46619-5e69877a9f692.png



Actividad 2.

Números primos

Instrucciones: realiza la búsqueda y descarga del artículo, cuyo título es "Secretos de los números primos" del Dr. Félix García Merayo y **elabora una infografía.**

A continuación, se muestra una lista con los números primos mayores que 1 y menores que 100:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

Los números que no son primos se denominan números compuestos, es decir, son los números que tienen más de dos divisores.

2.1.1.1 Propiedades

Los números primos como elementos importantes dentro de las matemáticas cumplen con las siguientes propiedades:

a. Todo número entero positivo mayor que 1 es un producto de números primos.
b. Todo número entero positivo puede descomponerse en producto de números primos de manera única, salvo por la reordenación de factores. (*Teorema fundamental de la aritmética*)
c. No existe fórmula para hallar todos los números primos.
d. La serie de los números primos es ilimitada, es decir, por más grande que sea un número primo, siempre hay otro número primo mayor.
e. El 2 es el único número primo par.
f. El 2 y 3 son los únicos números consecutivos y primos a la vez.
g. Los números 3, 5 y 7 son la única terna de números impares consecutivos y primos a la vez.
h. Si "P" que es el sucesor o antecesor de un múltiplo de 4, es un número primo mayor que 2, entonces "P" se puede escribir como múltiplo de 4 más uno o múltiplo de 4 menos uno, la cual se verá ejemplificada a continuación:

Ejemplos

- $P = 3$ *es número primo, entonces:* $3 = 4 - 1$; *3 es múltiplo de* $4 - 1$
- $P = 5$ *es número primo, entonces:* $5 = 4 + 1$; 5 es múltiplo de $4 + 1$

• *P* = 7 *es número primo, entonces:* 7 = 8−1; 7 *es múltiplo de* 4 − 1;
ya que 8 = 2(4)

i. Si "P" que es el sucesor o antecesor de un múltiplo de 4, es un número primo mayor que 3, entonces "P" se puede escribir como múltiplo de 6 más uno o múltiplo de 6 menos uno.

Ejemplos

• *P* = 17 *es número primo, entonces:* 17 = 18 −1;17 *es múltiplo de* 6 −1;
ya que 18 = 3(6)

• P=43 *es número primo,entonces:* 43 = 42 + 1: 43 *es múltiplo de* 6 + 1;
ya que 42 = 7(6)

j. Conjetura de Goldbach: todo número entero par mayor que 2 puede ser expresado como la suma de dos números primos iguales o diferentes.

Ejemplos:

• 10 *par* > 2, *entonces:* 10 = 5 + 5 o 10 = 3 + 7; 3, 5 y 7 *son números primos*
• 12 *par* > 2, *entonces:* 12 = 5 + 7;5 y 7 *son números primos*
• 31 *par* > 2, *entonces:* 31 = 2 + 29,2 y 29 *son números primos*

2.1.2 Divisibilidad

Se denomina divisibilidad a la propiedad que tienen los números enteros de que al dividirse uno por otro, en el que su residuo es cero, es decir, su división es exacta.

Para **determinar si un número es divisible** entro otro sin realizar la operación de división de forma tradicional, existen reglas o protocolos, criterios de divisibilidad que se establecen para ciertos números, los cuales se mencionan a continuación:

Divisibilidad por 2
Todo número o cantidad numérica es divisible por dos si su último dígito es un número par, es decir, termina en 0, 2, 4, 6 u 8

Divisibilidad por 3
Todo número o cantidad numérica es divisible por 3 si al sumar todos sus dígitos, el resultado es un múltiplo de 3

Divisibilidad por 4
Todo número o cantidad numérica es divisible por 4 si sus dos últimos dígitos forman un múltiplo de 4

Divisibilidad por 5
Todo número o cantidad numérica que termine en 0 o en 5, es divisible por 5

Divisibilidad por 6
Todo número o cantidad numérica es divisible por 6 si lo es para 2 y 3

Divisibilidad por 7
Todo número o cantidad numérica es divisible por 7 si al tomar el último dígito, duplicarlo y restarlo al resto de la cantidad, el resultado es 0 o múltiplo de 7

Divisibilidad por 8
Todo número o cantidad numérica es divisible por 8 si los tres últimos dígitos forman un número que es múltiplo de 8

Divisibilidad por 9
Todo número o cantidad numérica es divisible por 9 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9

Divisibilidad por 10
Todo número o cantidad numérica es divisible por 10 si su último dígito es un 0

Entonces, como se mencionó en párrafos anteriores, las reglas que se enlistaron ayudan a definir si un número o cantidad numérica es divisible por un número sin la necesidad de realizar la operación de división de la forma tradicional, sino simplemente ejecutando dicha regla.

Ejemplos

Para cada una de las cantidades numéricas que se muestran, determina si son divisibles por el número dado, aplicando los criterios de divisibilidad:

a. 500 es divisible por 2, ya que es número par; por 5, ya que termina en 0 y por 10, ya que termina en 0.

b. ¿El número 652341 es divisible por 3?

Sumamos todos los dígitos $6+5+2+3+4+1=21$ como el resultado es un múltiplo de 3, entonces se puede afirmar que el 652341 es divisible por 3

c. ¿El 3325 es divisible por 7?

Tomamos el último dígito, es decir, el 5 y
lo duplicamos: $5(2)=10$
el resultado lo restamos de la cifra que quedó $332-10=322$
tomamos de nuevo el último digito, es decir 2 y
lo duplicamos $2(2)=4$
el resultado lo restamos de la cifra que quedó $32-4=28$
como ya el 28 es múltiplo del 7, entonces, 3325 es divisible por 7

d. ¿El 25625 es divisible por 4?

Se toman los dos últimos dígitos, es decir 25, este número no es múltiplo de 4, por lo tanto, podemos afirmar que el 25625 no es divisible por 4.

e. ¿El 12856 es divisible por 8?

Se toman los tres últimos dígitos, en este caso 856
Verificamos si 856 es múltiplo de 8, vemos que $856=8\ (107)$, por lo tanto, se puede afirmar que 856 sí es múltiplo de 8, por ende, podemos afirmar que 12856 es divisible por 8



Actividad 3.



Números primos

Instrucciones: para reforzar lo revisado realiza la siguiente actividad solo da clic en el enlace y comienza.

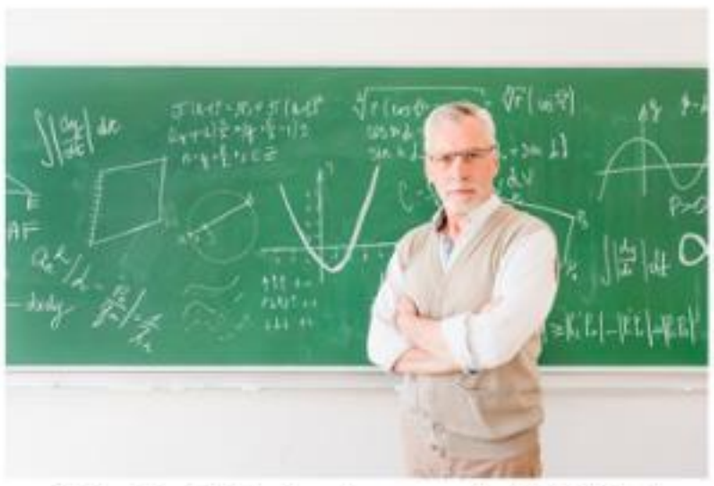
2.2 Definición de modelos matemáticos

Harold, H. G., 1877-1947. Citado en De Torres, C. M.2015, menciona que:

> Un matemático, como un pintor o un poeta, es un fabricante de modelos. Si sus modelos son más duraderos que los de estos últimos, es debido a que están hechos de ideas. Los modelos del matemático, como los del pintor o los del poeta deben ser hermosos. La belleza es la primera prueba; no hay lugar permanente en el mundo para unas matemáticas feas.

Un modelo matemático es una representación formal, mediante el uso del lenguaje matemático de las relaciones que existe entre las variables que intervienen un fenómeno o problema científico o social de estudio. Estos modelos pueden ser ecuaciones, funciones o fórmulas matemáticas que modelan la relación entre las variables.

Revisa, descarga y pega en tu cuaderno la infografía de modelo matemático
Las matemáticas son el parteaguas de muchas otras ciencias, al traducir los fenómenos o problemas en modelos matemáticos. A continuación, definimos algunos de ellos y sus características.



Nota: Fuente Aguirre Gomezcorta, M. (2022, 2 septiembre). Se buscan profesores de Matemáticas: «Pocos graduados tienen ahora la docencia como primera opción» - NIUS. Telecinco.
https://www.freepik.es/foto-gratis/profesor-mayor-pie-junto-pizarra-aula_4943900.htm#fromView=search&page=3&position=1&uuid=7ad8d7f4-2a21-4b88-a33d-3d14669e52f5

2.2.1 Fórmulas

Seguramente desde la primaria escuchaste las frases que “el área de un cuadrado es lado por lado” y escribías: $A = l * l$ y que “el perímetro del rectángulo es dos veces la base más dos veces la altura” y escribías: $P = 2b + 2h$

Física	Velocidad	$v = d / t$	La velocidad es igual al cociente entre la distancia y el tiempo.
	Fuerza	$F = m\,a$	La fuerza es igual a masa por aceleración
	Energía cinética	$Ec = \frac{1}{2} m\ v^2$	La energía cinética es igual a un medio de la masa por la velocidad al cuadrado.
Química	Mol	$Mol = \frac{Mol\ (g)}{Masa\ molar \frac{(g)}{(mol)}}$	El mol es igual a la razón entre el mol y la masa molar.
	Densidad	$D = \frac{m}{V}$	La densidad es igual a la masa sobre el volumen.
	Molaridad	$M = \frac{moles\ de\ soluto}{litros\ de\ solución}$	La moralidad es el cociente entre los moles de soluto y los litros de solución.

Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Ejemplos de fórmulas].

Entre muchas otras fórmulas que se usan en otras áreas del conocimiento.



Actividad 4.



Fórmula

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da clic en el siguiente enlace.

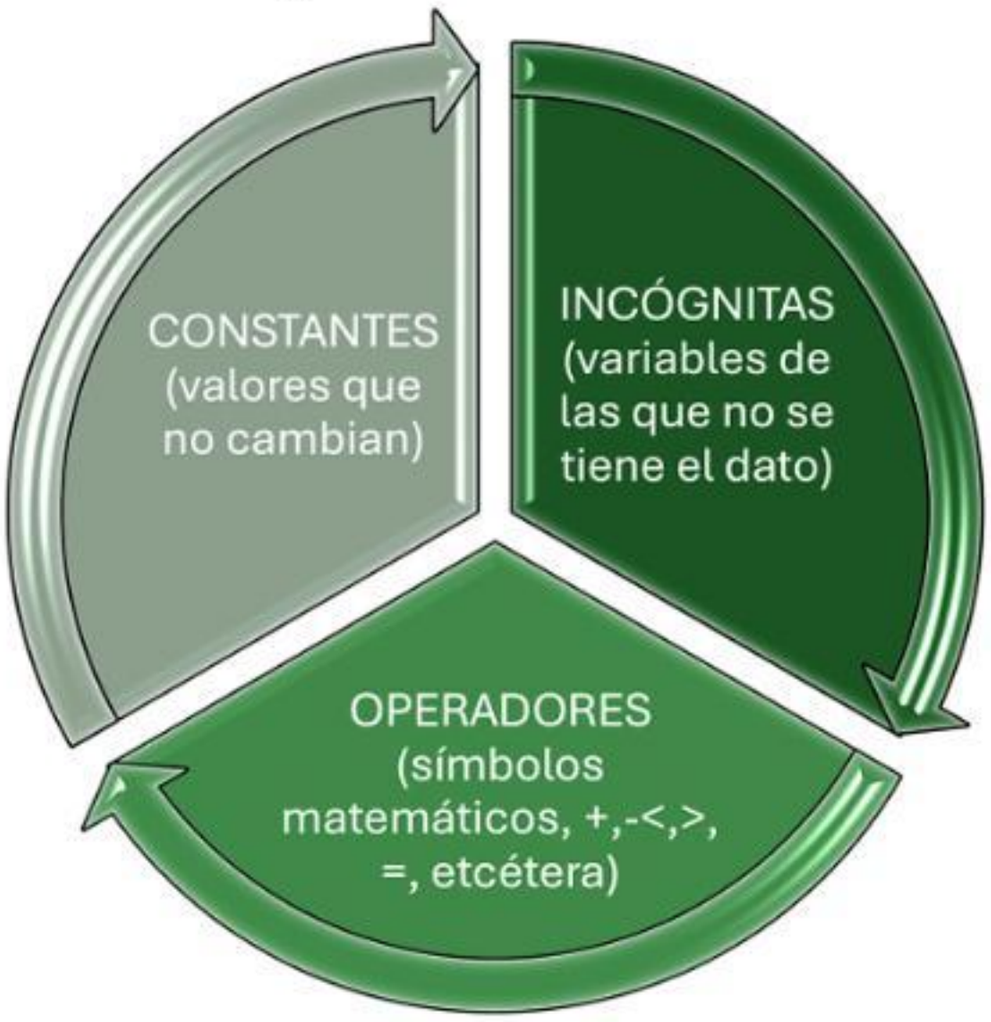
Una fórmula es una expresión matemática que representa la relación entre dos o más variables, se involucra el signo igual para establecerla y facilitar la aplicación en diferentes situaciones numéricas.

También se puede definir como el conjunto de términos matemáticos utilizados para resolver un problema para obtener una cantidad numérica específica (Alvarado, 2018).

Las fórmulas no solo se usan en el área de las matemáticas, sino en todas las ciencias como física, química, economía, etcétera.

Los elementos básicos son:

Figura 4. Elementos de una fórmula



Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Elementos de una fórmula].

Tabla 1. Ejemplos de fórmulas

		Fórmula	Lenguaje común
Matemáticas	Área de un rectángulo	$A = bh$	El área de un rectángulo es igual a la base por su altura.
	Teorema de Pitágoras	$c^2 = a^2 + b^2$	El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
	Perímetro de la circunferencia	$P = 2\pi r$	El perímetro de la circunferencia el doble de π (3.1415…) por el radio.

2.2.2 Variables

En matemáticas, una variable es un símbolo que representa valores cambiantes en los modelos matemáticos como fórmulas, ecuaciones, funciones.

En el modelo matemático de las fórmulas se pueden distinguir dos tipos de variables.

La **variable independiente** es aquella cuyo valor no depende de otra variable en el contexto específico. Es decir, la variable se opera o controla en un fenómeno o estudio.

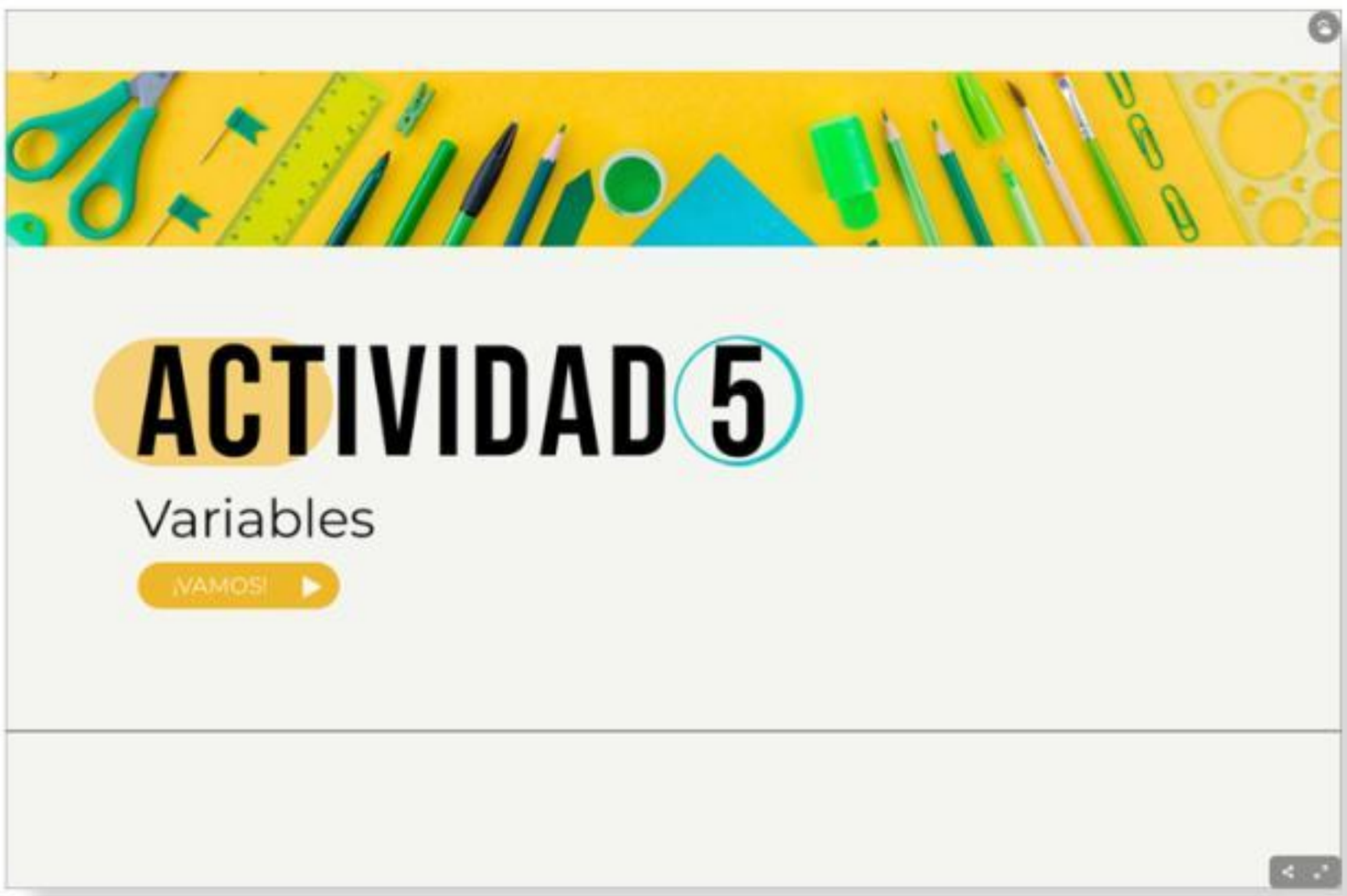
Y la **variable dependiente,** cuyo valor depende de la variable independiente. Es decir, la variable se mide o se observa en función de la variable independiente.

En las siguientes fórmulas identificaremos la clasificación de las variables involucradas.

Tabla 2. Uso de variables.

		Fórmula	Variable dependiente	Variable independiente
Matemáticas	Área de un cuadrado	$A = l + l = l^2$	A: área	l: la medida de un lado del cuadrado
	Teorema de Pitágoras	$c^2 = a^2 + b^2$	c: hipotenusa	a: cateto opuesto b: cateto adyacente
	Perímetro de la circunferencia	$P = 2\pi r$	P: perímetro	r: radio de la circunferencia
Física	Velocidad	$v = d / t$	v: velocidad	d: distancia t: tiempo
	Fuerza	$F = m\,a$	F: fuerza	m: masa a: aceleración
	Energía cinética	$Ec = \frac{1}{2} m\ a^2$	Ec: Energía cinética	m: masa a: aceleración

Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Uso de variables].





Actividad 5.

Variables

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio para repasar el tema de la fórmula, para comenzar da clic AQUÍ.

Mensaje

La **Universidad Autónoma del Estado de México,** en la búsqueda permanente de garantizar una educación inclusiva, equitativa y de excelencia, se mantiene a la vanguardia en los avances tecnológicos, desarrollando libros electrónicos (e-book), con el propósito de implicarte interactivamente con los contenidos de las asignaturas que integran el plan de estudios del Bachillerato Universitario.

Nuestro objetivo es contribuir a la formación integral de estudiantes con conocimientos rigurosos, valores humanistas y habilidades digitales, utilizando metodologías activas, que desarrollen el pensamiento crítico y analítico, así como la capacidad de afrontar los retos de la era digital.

Los cambios sociales, ambientales y culturales del mundo contemporáneo presentan serios desafíos al proceso educativo; por ello, nuestra Escuela Preparatoria promueve formas de aprendizaje innovadoras, en las que se desarrollan la comunicación asertiva, la creatividad y el trabajo colaborativo. De este modo buscamos garantizar la impartición de una educación capaz de estimular la curiosidad intelectual de los preparatorianos y la exploración de todos los campos del conocimiento, de modo que cada estudiante sea capaz de ampliar sus horizontes culturales, reconociendo sus habilidades, gustos y aptitudes.

El material educativo que tienes en tus manos ha sido elaborado por docentes de las áreas de conocimiento correspondientes. La creatividad, el pensamiento crítico y el espíritu científico de los colectivos docentes se reúnen en un e-book para facilitar la comprensión de los contenidos y comprometerte con tu aprendizaje.

El libro digital que ahora puedes consultar tiene una estructura lógica de fácil manejo, que te permitirá navegar por los contenidos y recursos académicos que responden a tus necesidades; podrás acceder a ellos desde una computadora, tableta o un teléfono celular.

Te invito a aprovechar al máximo esta nueva experiencia de aprendizaje, disfruta esta herramienta que potenciará tus habilidades digitales, tus conocimientos y tu creatividad.

SOMOS UAEMéx

PATRIA, CIENCIA Y TRABAJO

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

2.2.3 Evaluación de expresiones algebraicas (valor numérico)

El **valor numérico** es el resultado de sustituir un valor asignado a la o las variables y hacer los cálculos aritméticos indicados en una fórmula o expresión algebraica.

Por ejemplo…

a. Si $a = 1$, $b = 3$ y $c = 4$, ¿cuál es el valor numérico de $3a + 2b - 6c$?

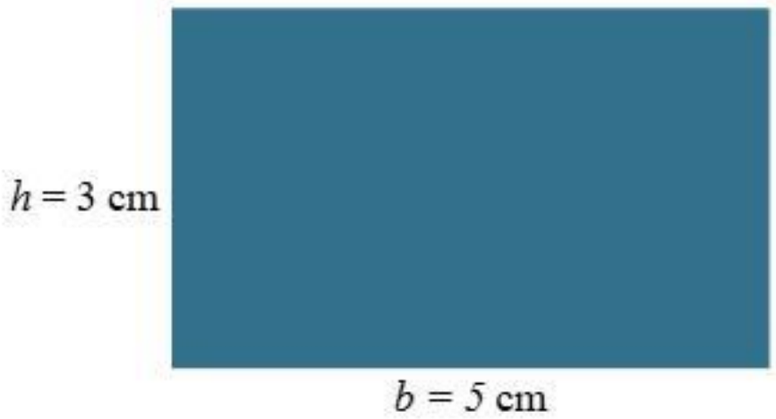
$3a + 2b - 6c = 3(1) + 2(3) - 6(4)$ Se sustituye el valor de la variable
$= 3 + 6 - 24$ Se resuelven las operaciones aritméticas
$= -15$

b. Si $x = 3$, $y = -5$ ¿cuál es el valor numérico de $5x^2 - 2xy + 6y^2$?

$5x^2 - 2xy + 6y^2 = 5(3)^2 - 2(3)(-5) + 6(-5)^2$ Se sustituye el valor de la variable
$= 5(9) - 2(-15) + 6(25)$ Se resuelven las operaciones aritméticas
$= 45 + 30 + 150$
$= 225$

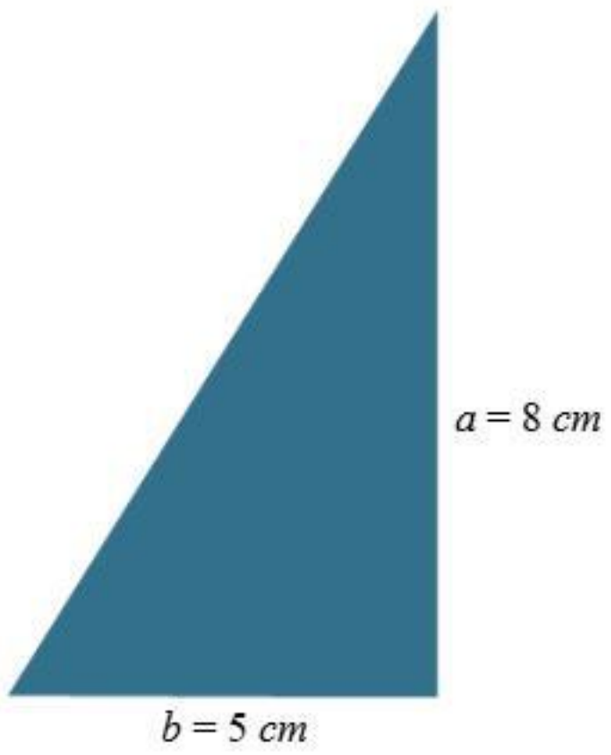
c. Si un rectángulo mide de base $b = 5$ cm y de altura $h = 3$ cm. Entonces el valor numérico de su área se calcula al sustituir los valores dados a b y a h en su fórmula $A = bh$. Esto es

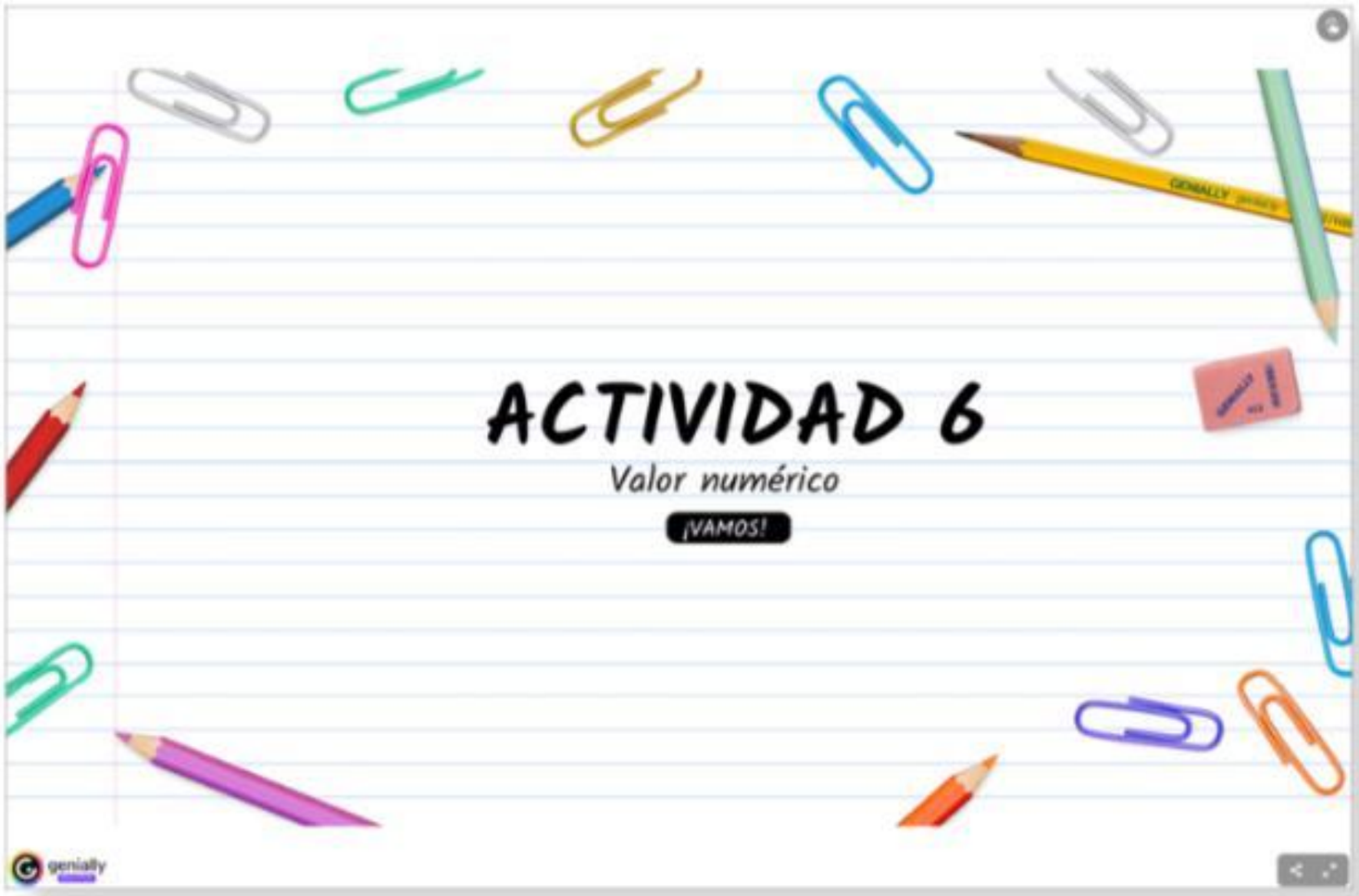
$A = 5 * 3 = 15\ cm^2$



d. Si un triángulo rectángulo tiene de medidas $a = 5$ y $b = 8$. Entonces el valor numérico del cuadrado de su hipotenusa se calcula con la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$. Esto es

$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 8^2 + 5^2$
$c^2 = 64 + 25$
$c^2 = 89$





Actividad 6.

Valor numérico

Instrucciones: Sustituye y calcula el valor numérico de cada expresión matemática en siguiente ejercicio, da clic AQUÍ para comenzar.

2.2.4 Ecuaciones

En matemáticas, una igualdad matemática es la relación que indica que dos expresiones tienen el mismo valor. De aquí que una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, donde intervienen una o más variables y su valor es desconocido, por lo que reciben el nombre de incógnitas.

Las ecuaciones se pueden clasificar en ecuación *idéntica* o identidad y *ecuación condicional* o simplemente *ecuación*.

Figura 5. Tipos de ecuación

Idéntica o identidad

Es una igualdad que es cierta para todos los valores posibles de las variables involucradas. Esto significa que ambas partes de la identidad representan el mismo valor independientemente de los valores específicos que tomen las variables. Se utiliza el símbolo ≡ que se lee como "idéntico a"

Ejemplos

$\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta\equiv 1$

$c^2\equiv a^2+b^2$

Condicional

Es una igualdad en la cual ambos lados o miembros son iguales solamente para algunos valores particulares de la o las variables involucradas.

Algebraicas:

$2x+4=5$

$3x^2+8x-5=0$

No algebraicas

$\text{sen}x=1/2$

$\ln(x+2)=0$

$e^{x+3}=1$

Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Tipos de ecuación].

Las ecuaciones algebraicas en una variable se pueden clasificar por el grado máximo de la variable en:

Ecuación de primer grado es una ecuación polinómica en una donde el mayor exponente de la variable es 1. La forma general de una ecuación de primer grado es

Ejemplos:

a. $x-3=-6$; la incógnita es x y tienen exponente 1.
b. $y+5=2$; la incógnita es y y tienen exponente 1.
c. $3a+2=3$ la incógnita es a y tienen exponente 1.
d. $3z+2=-5z+2$ la incógnita es z y tienen exponente 1.
e. $x+2=-4$ la incógnita es x y tienen exponente 1.

La forma general de una ecuación de primer grado es $ax+b=0$, donde a,b son números reales y x es la incógnita.

Ecuación de segundo grado es una ecuación polinómica en una donde el mayor exponente de la variable es 2.

a. $x^2-3=-6$; la incógnita es x y tienen exponente 2.
b. $z^2+5z-2=;$ la incógnita es z y tienen exponente 2.
c. $3z+2=-5z^2+6$ la incógnita es z y tienen exponente 2.
d. $x^2-2=-4x^2$ la incógnita es x y tienen exponente 2.
e. $a^2+4a+4=0$ la incógnita es a y tienen exponente 2.

La forma general de una ecuación de segundo grado es $ax^2+bx+c=0,$ donde a,b y $c,$ son números reales y x es la incógnita

De manera análoga se define la ecuación de tercer grado (cúbica), de grado cuarto, etc.

En los siguientes ejemplos escribiremos la ecuación que modela el problema.

a. Ricardo tiene 16 años y sus dos hermanos pequeños, 2 y 3 años. Escribe la ecuación que representa cuántos años han de pasar para que el doble de la suma de las edades de los hermanos de Ricardo sea la misma que la que tiene él.

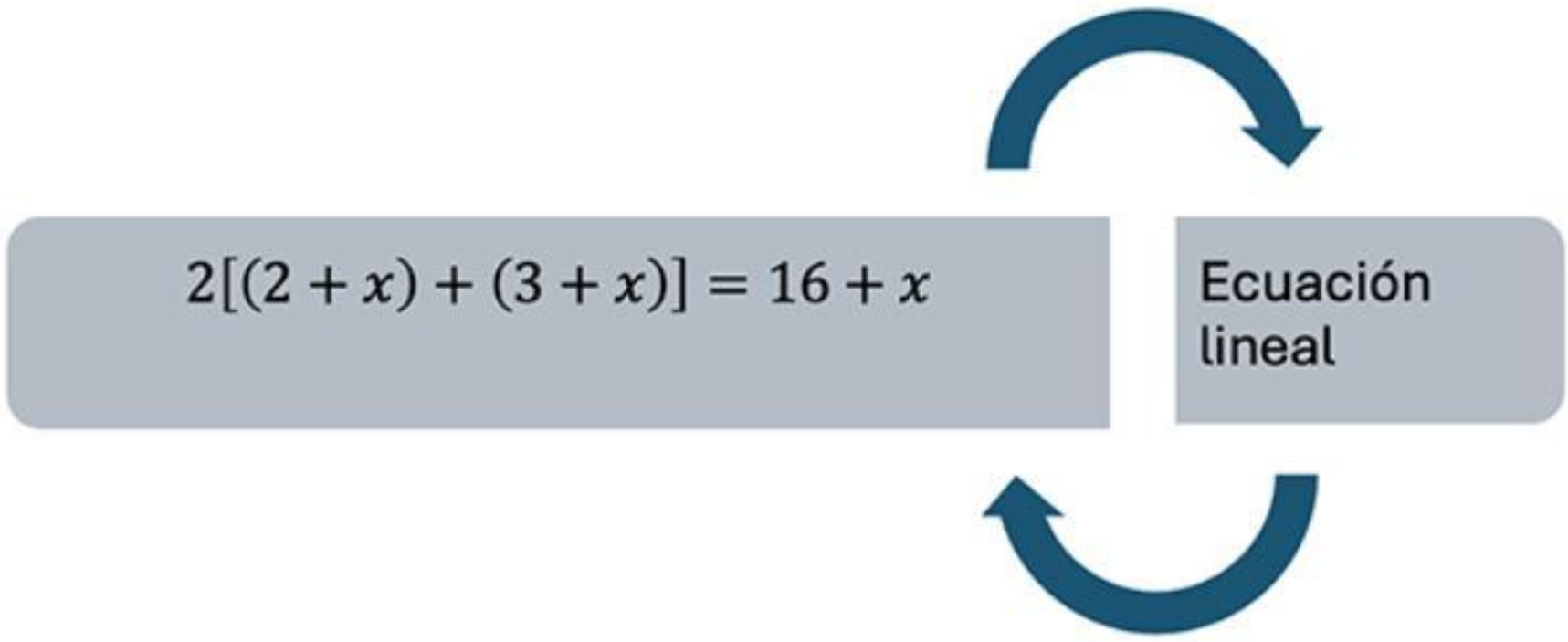
Solución:

Sea x: los años que tienen que pasar, entonces cuando x años hallan pasado:

- El hermano pequeño tendrá $2+x$ años.
- El hermano mayor tendrá $3+x$ años.
- Ricardo tendrá $16+x$ años.

El doble de la suma de los años de los hermanos a de ser igual que la de Ricardo:

Figura 6. Modelo matemático: ecuación 1.



Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Modelo matemático: ecuación 1].

Nota: la solución de la ecuación se obtendrá en los siguientes módulos.

b. Hallar el número tal que si sumamos su mitad con su doble y su triple obtenemos 55.

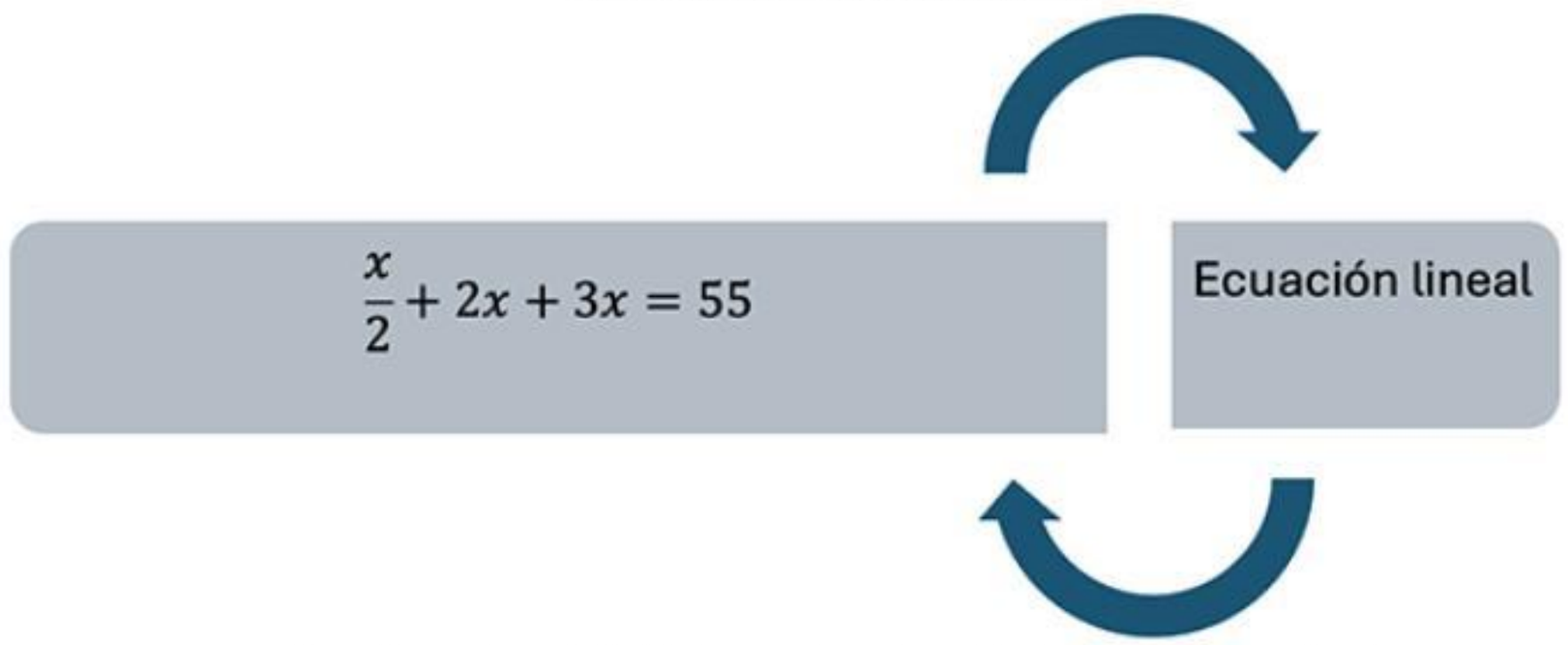
Solución:

Sea x: es el número buscado.

Entonces

- La mitad del número es $\frac{x}{2}$.
- El doble del número es $2x$
- El triple del número es $3x$

Figura 7. Modelo matemático: ecuación 2.



Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Modelo matemático: ecuación 2].

Resolver una ecuación es determinar el valor o valores de las incógnitas que transformen la ecuación en una identidad.

Una ecuación se puede comprobar cuando ambos lados son iguales al sustituir los valores encontrados en las incógnitas, mediante la simplificación algebraica y aritmética que se verá en los siguientes módulos.

2.3 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

El máximo común divisor (MCD) de dos números naturales n y m se denota por (n,m) y cumple que:

a. Es un divisor común, es decir (n,m) divide a n y divide a m.
b. Si d es otro divisor común de n y m entonces d divide a (n,m).

Para obtener el máximo común divisor de dos números naturales debemos buscar todos sus divisores primos comunes. Finalmente los multiplicamos como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Instrucciones: obtener el máximo común divisor MCD de 8 y 12.

8	12	2	Los dos números son pares. Dividir entre 2.
4	6	2	Los dos números son pares. Dividir entre 2.
2	3		Un número es par y otro impar. Ya no tienen divisores comunes.

Así el máximo común divisor es $(2)(2) = 4$.

Instrucciones: revisa el siguiente **video**, da clic en el link.

En general, el máximo común divisor (MCD) de una cantidad finita de números naturales $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se denota por $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y cumple que:

a. Es un divisor común de todos los números.
b. Si d es otro divisor común de todos los números, entonces d divide a $(x_1, x_2, \cdots, x^n)$.

Para obtener el máximo común divisor de tres o más números naturales debemos buscar todos sus divisores primos comunes. Finalmente los multiplicamos como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

Instrucciones: obtener el máximo común divisor MCD de 8,12 y 30.

8	12	30	2	Los tres números son pares. Dividir entre 2.
4	6	15		Dos números son pares y el otro es impar. Ya no tienen divisores comunes.

Así el máximo común divisor es 2.

Instrucciones: revisa el siguiente **video**, da clic en el link.

El mínimo común múltiplo (mcm) de dos números naturales n y m se denota por $[n,m]$ y cumple que:

a. Es un múltiplo común, es decir n divide a $[n,m]$ y m divide a $[n,m]$.
b. Si t es otro múltiplo común de n y m entonces $[n,m]$ divide a t.

Para obtener el mínimo común múltiplo de dos números naturales debemos dividirlos entre los números primos menores, hasta terminar con residuo uno. Finalmente los multiplicamos como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Instrucciones: obtener el mínimo común múltiplo mcm de 8 y 12.

8	12	2	Los dos números son pares. Dividir entre 2.
4	6	2	Los dos números son pares. Dividir entre 2.
2	3	2	Un número es par y otro impar. Sólo se divide el 2 y el 3 pasa igual.
1	3	3	El 1 pasa igual y se divide el 3.
1	1		

Así el mínimo común múltiplo es $(2)(2)(2)(3)=24$

Instrucciones: revisa el siguiente **video**, da clic en el link.

En general, el mínimo común múltiplo (mcm) de una cantidad finita de números naturales $x1,x2,\cdots,xn$ se denota por $[x1,x2,\cdots,xn\ ]$ y cumple que:

a. Es un múltiplo común de todos los números.
b. Si t es otro múltiplo común de todos los números entonces $[x1,x2,\cdots,xn\ ]$ divide a t.

Para obtener el mínimo común múltiplo de tres o más números naturales debemos dividirlos entre los números primos menores, hasta terminar con residuo uno. Finalmente los multiplicamos como se observa en el siguiente ejemplo.

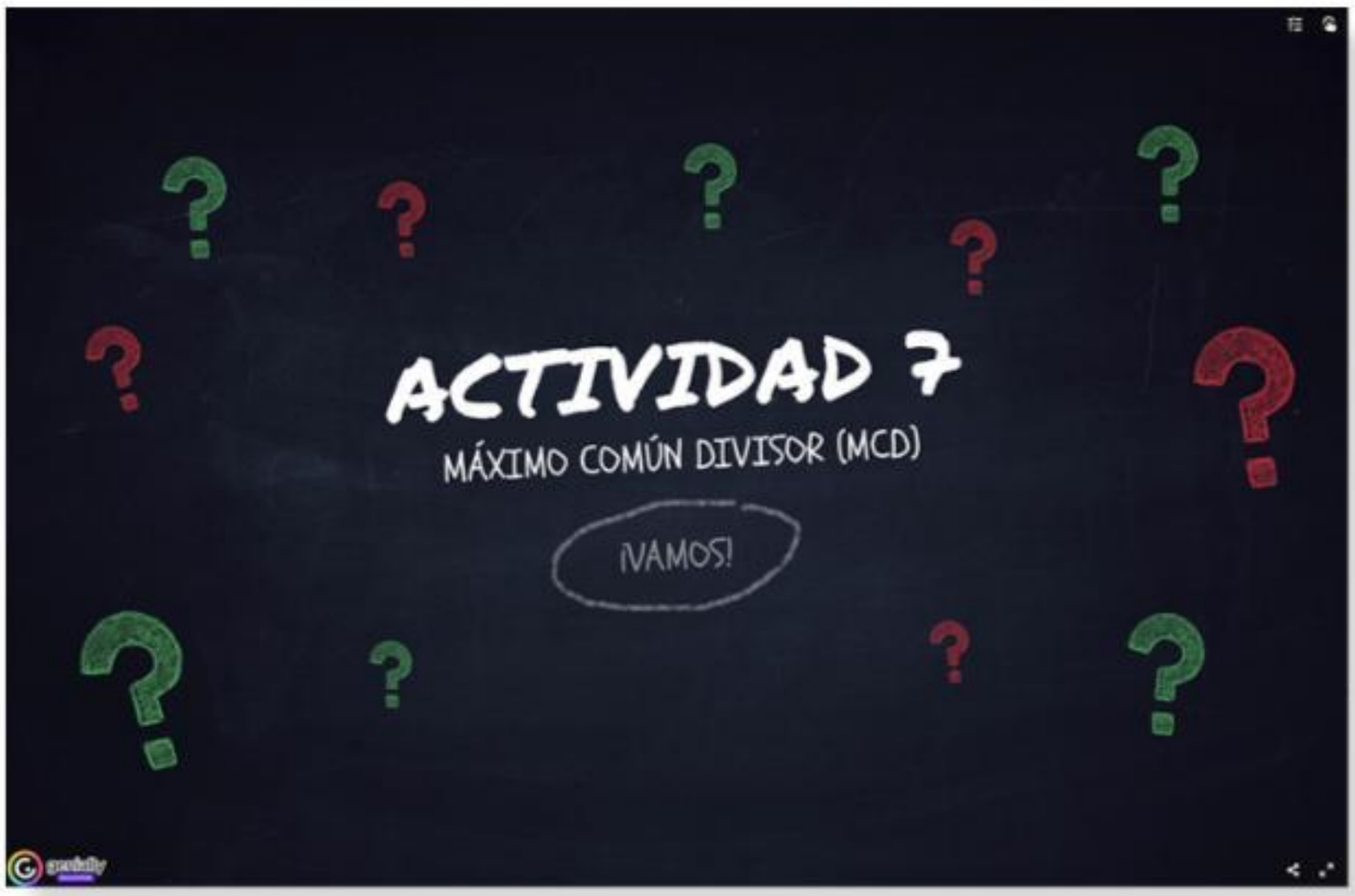
Ejemplo

Instrucciones: obtener el mínimo común múltiplo mcm de 8,12 y 30.

8	12	30	2	Los tres números son pares. Dividir entre 2.
4	6	15	2	Dos números son pares y el otro es impar. Se divide entre 2 y 15 pasa igual.
2	3	15	2	Un número es par y los otros son impares. Se divide entre 2 y los demás pasan igual.
1	3	15	3	El 1 pasa igual y los otros números se dividen entre 3.
1	1	5	5	El 1 pasa igual y se divide entre 5.
1	1	1		

Así el mínimo común múltiplo es $(2)(2)(2)(3)(5)=120$

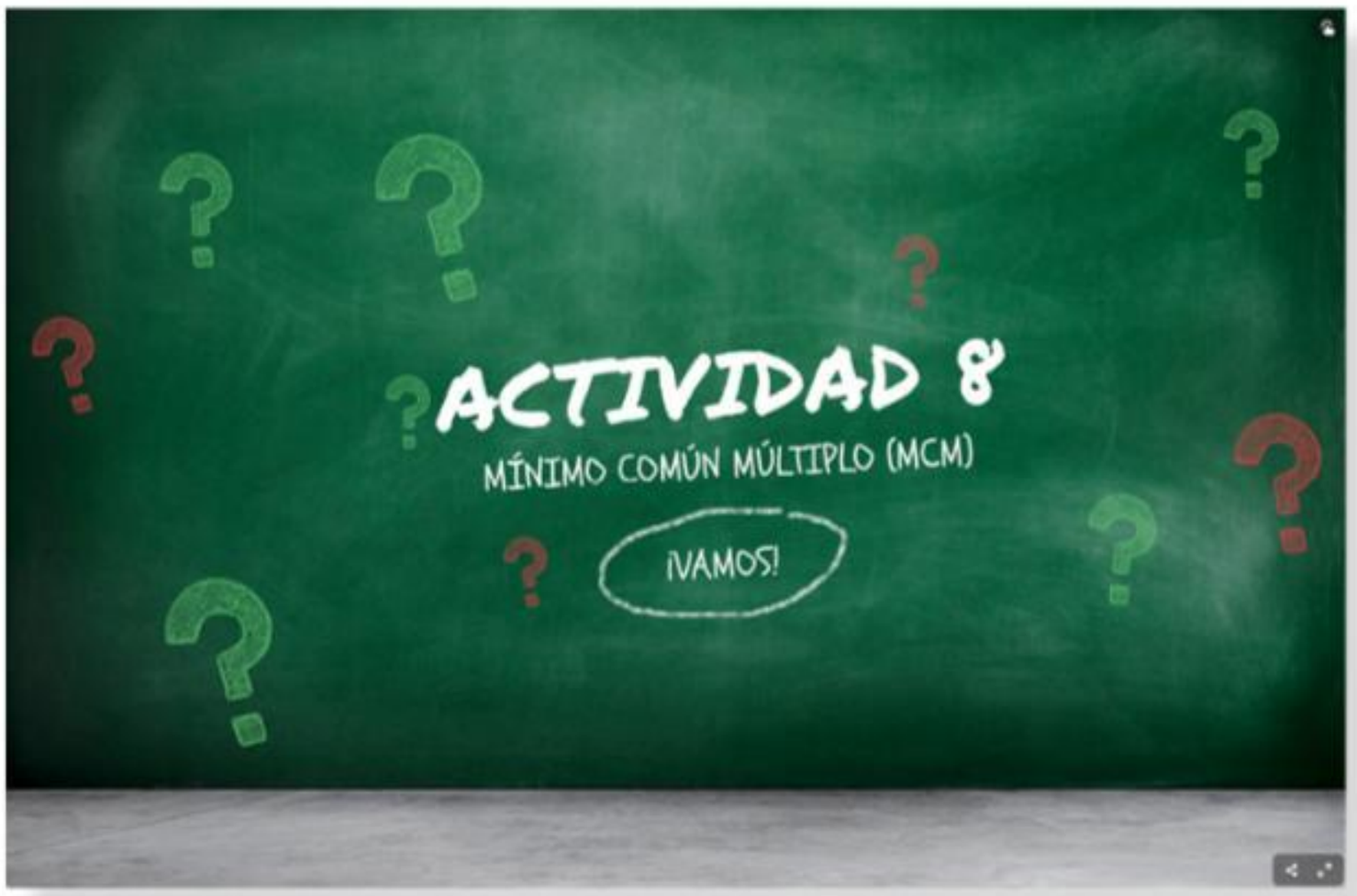
Instrucciones: revisa el siguiente **video**, da clic en el link.



Actividad 7.

Máximo común divisor (MCD).

Instrucciones: para ver la actividad da clic en la imagen



Actividad 8.

Mínimo común múltiplo (mcm).

Instrucciones: para ver la actividad da clic en la imagen

2.4 Conjuntos numéricos: naturales, enteros, racionales, irracionales y reales

Los conjuntos numéricos son agrupaciones de números que comparten características específicas y permiten organizar las diferentes clases de números que utilizamos en matemáticas. A lo largo de la historia, se han desarrollado distintos conjuntos para satisfacer las necesidades de cálculo y representación de cantidades en situaciones cada vez más complejas. Entre los conjuntos más importantes están: naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.

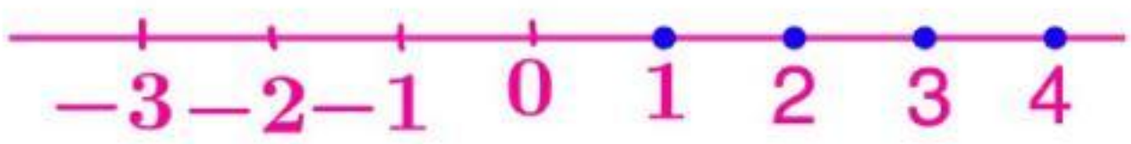
2.4.1 Representación de los conjuntos numéricos en la recta numérica

El conjunto de los números naturales según los cinco postulados de Peano es:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\cdots\}$$

En la recta numérica se representan como puntos.

Figura 8. Representación de algunos números naturales en la recta real o numérica.



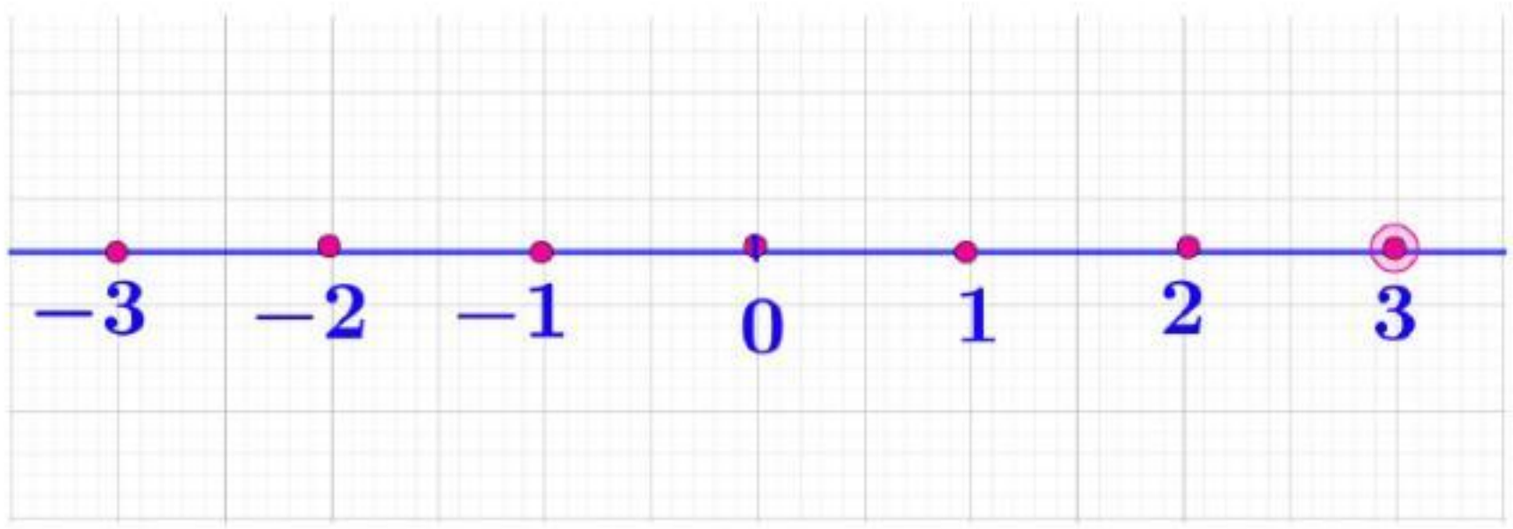
Nota. Fuente: León, G. A. (2024). Creación propia. [Representación de algunos números naturales en la recta real o numérica].

El conjunto de los números enteros es:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$$

En la recta numérica se representan como puntos.

Figura 9. Representación de algunos números enteros en la recta numérica.



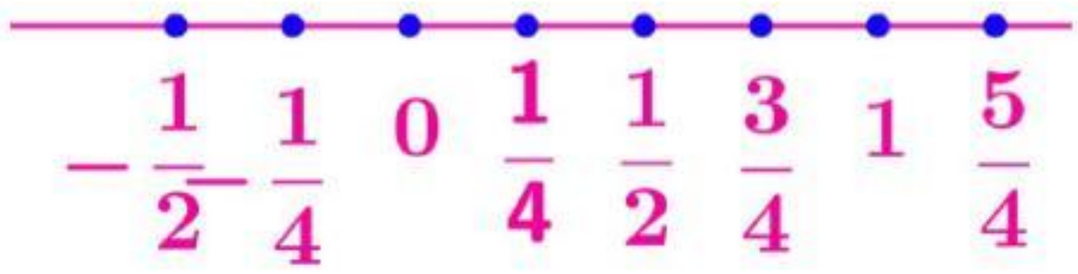
Nota. Fuente: León, G.A. (2024). Creación propia. [Representación de algunos números enteros en la recta numérica].

El conjunto de los números racionales se define como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} a, b \in \mathbb{Z} \, y \, b \neq 0 \right\}$$

En la recta numérica se representan como puntos.

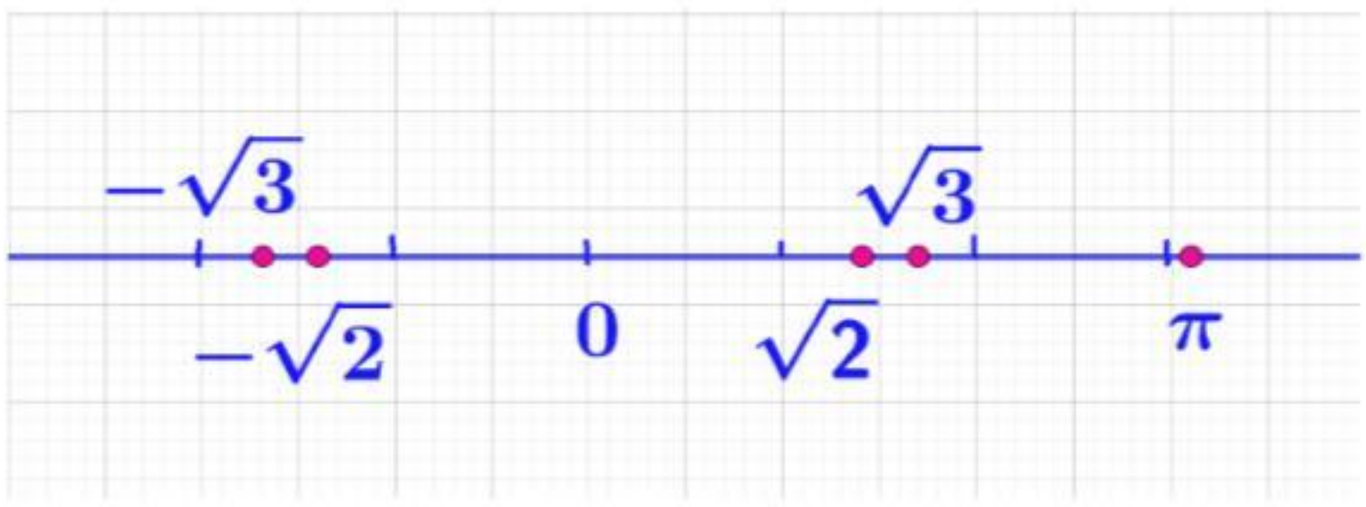
Figura 10. Representación de algunos números racionales en la recta numérica.



Nota. Fuente: León, G. A. (2024). Creación propia. [Representación de algunos números racionales en la recta numérica].

El conjunto de los números irracionales son los que tienen parte decimal infinita y no periódica. En la recta numérica se representan como puntos.

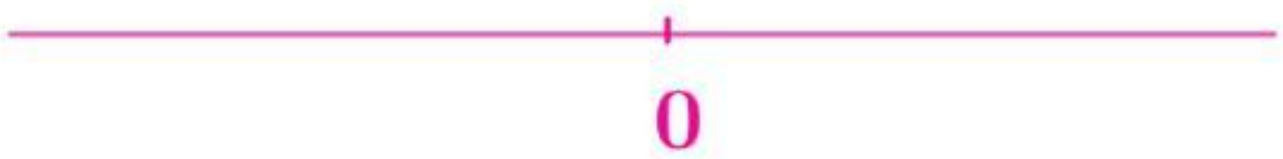
Figura 11. Representación de algunos números irracionales en la recta numérica.



Nota. Fuente: León, G.A. (2024). Creación propia. [Representación de algunos números irracionales en la recta numérica].

Los números reales $\mathbb{R}$ son los números racionales, unión de los números irracionales. Representan toda la recta numérica por eso también se le conoce como recta real.

Figura 12. Representación de los números reales en la recta real o numérica.



Nota. . Fuente: León G.A. (2024). Creación propia. [Representación de los números reales en la recta real o numérica].-

Nota

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Es decir, los números naturales son un subconjunto de los números enteros y ellos son un subconjunto de los números racionales, que a la vez son un subconjunto de los números reales. Así los números reales contienen a todos.

Ejemplo

Instrucciones: revisa el siguiente video, da clic en el link.



Actividad 9.

Números en la recta numérica.

Instrucciones: rpara ver la actividad da clic en el enlace.

Introducción

El **pensamiento matemático** es una disciplina que **va más allá** de los números y operaciones, enfocándose en la manera en que las matemáticas permiten resolver problemas, razonar de forma lógica y estructurar ideas de forma rigurosa. El curso de Pensamiento Matemático II **se centra** en **desarrollar habilidades** de razonamiento lógico, abstracción y análisis, fundamentales para abordar cualquier área de las matemáticas y otras ciencias.

Para desarrollar habilidades de razonamiento lógico, el pensamiento matemático no se trata solo de hacer cálculos, sino de estructurar argumentos de manera coherente. A lo largo del curso, aprenderás a identificar, analizar y construir argumentos lógicos, tanto deductivos como inductivos.

Al fomentar la abstracción y generalización, las matemáticas a menudo requieren abstraer problemas reales para modelarlos de manera simplificada. Aquí aprenderán cómo identificar patrones y tendencias para generalizar conceptos matemáticos.

Respecto de aplicar métodos de resolución de problemas, el pensamiento matemático implica abordar problemas complejos y encontrar soluciones eficientes, tanto dentro como fuera del ámbito matemático. Los estudiantes **aprenderán a aplicar** estrategias de resolución de problemas que incluyen análisis de casos.

El pensamiento matemático no solo es esencial para los matemáticos, sino que **tiene aplicaciones en áreas tan diversas** como la ingeniería, las ciencias computacionales, la economía y las ciencias sociales. Al aprender a razonar de manera estructurada y abstracta, los estudiantes desarrollan habilidades críticas que les permiten abordar problemas complejos y tomar decisiones bien fundamentadas.

Este ebook te proporciona una base sólida para cualquier estudio posterior en matemáticas y ciencias y fomenta una mentalidad analítica que puede ser aplicada en la vida cotidiana y profesional.

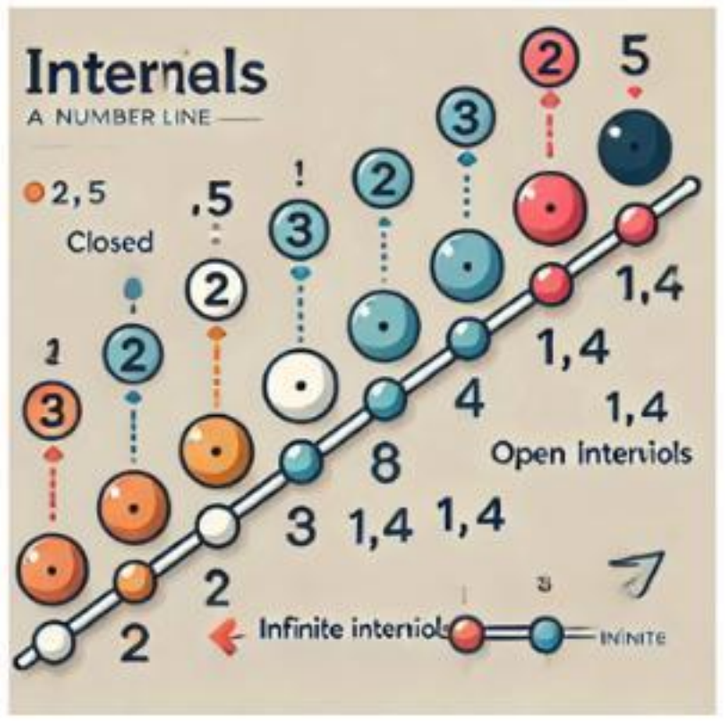
2.5 Intervalos

Un intervalo es un conjunto de números que se encuentran entre dos valores determinados en la recta numérica. Representa un rango continuo de números, inician con un valor mínimo y terminan en un valor máximo, e indica si esos extremos están incluidos o no, dependiendo si son abiertos o cerrados.

Los intervalos se utilizan en matemáticas para definir rangos de valores en los que se cumplen ciertas condiciones o para representar subconjuntos de números reales.

Hay diferentes tipos de intervalos, dependiendo de si los extremos se incluyen o no.

Figura 13. Intervalos



Nota. Fuente: González, G. P. (2024). Elaboración propia con Open AI. ChatGPT [Intervalos]. https://files.oaiusercontent.com/file-hXekGhgt9Aud9YNHIN5240vx?se=2024-10-15T23%3A54%3A55Z&sp=r&sv=2024-08-04&sr=b&rscc=max-age%3D604800%2C%20immutable%2C%20private&rscd=attachment%3B%20filename%3D6814cc90-d222-44f0-9ad2-041e14b5c79f.webp&sig=KUbe59BDMqLzV/X5g5Z3f2OI%2BuscAwvGDKLn5CgC6BQ%3D

2.5.1 Tipos de intervalos

Intervalo cerrado
Se incluyen ambos extremos. Se representa como $[a,b]$, donde a y b son los límites del intervalo y están incluidos.

- Ejemplo: [3,7] incluye todos los números entre 3 y 7, incluyendo el 3 y el 7.

Intervalo abierto
No se incluyen los extremos. Se representa como (a, b).

- Ejemplo: (3,7) incluye todos los números entre 3 y 7, pero no incluye el 3 ni el 7.

Intervalo semiabierto/semicerrado o Mixto
Solo se incluye uno de los extremos.

- [a, b): Incluye el valor a, pero no el valor b.
- (a, b]: Incluye el valor b, pero no el valor a.
- Ejemplo: [3,7) incluye todos los números entre 3 y 7, incluyendo el 3, pero no el 7.

Intervalos infinitos
Solo se incluye uno de los extremos o ninguno.

- $[a, \infty)$: Incluye el valor a, pero no el valor b no tiene fin.
- $(-\infty, b]$: Incluye el valor b, pero no el valor a no tiene inicio.
- $(-\infty, \infty)$ no tiene el valor de inicio, ni el de fin, estos pueden ser positivos o negativos
- Ejemplo: $[3, \infty)$ incluye todos los números entre 3 y ∞, incluyendo el 3.
- $(-\infty, \infty)$ incluye todos los números entre $-\infty$ y ∞.

2.5.2 Operaciones con intervalos

Las operaciones con intervalos permiten realizar cálculos y análisis entre diferentes rangos de números. A continuación, se describen las dos principales operaciones con intervalos:

Intersección de intervalos

La intersección de dos intervalos consiste en encontrar la parte común entre ellos, es decir, los números que pertenecen a ambos intervalos al mismo tiempo.

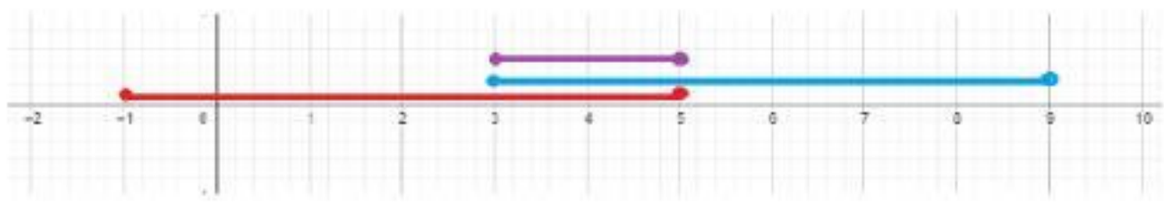
La intersección se denota como: A ∩ B

- Si los intervalos $A = [a_1, b_1]$ y $B = [a_2, b_2]$ se superponen, su intersección será otro intervalo que va desde el mayor de los límites inferiores (a_1, a_2) hasta el menor de los límites superiores (b_1, b_2).
- Si no se superponen, la intersección es el conjunto vacío (∅).

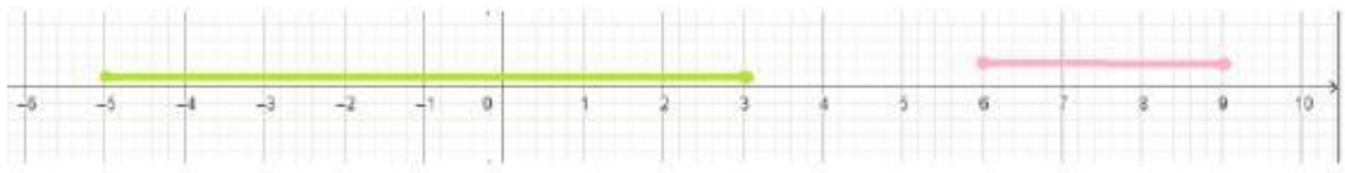
Ejemplo

Obtén la intersección de los siguientes intervalos y su interpretación en la gráfica.

- $[-1,5] \cap [3,9] = [3,5]$.



- $[-5,3] \cap [6,9] = \emptyset$.



Unión de intervalos

La unión de dos intervalos consiste en juntar todos los números que pertenecen a un intervalo y también los del otro, es decir, los números que pertenecen a cada uno de ambos intervalos.

La unión se denota por: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

- Si los intervalos se superponen o tienen un punto en común, la unión será un único intervalo que va desde el menor de los límites inferiores (a_1, a_2) hasta el mayor de los límites superiores (b_1, b_2).
- Si los intervalos no se superponen, la unión se representará como todos los números que están en un intervalo y que están en el otro, es decir los de los dos intervalos.

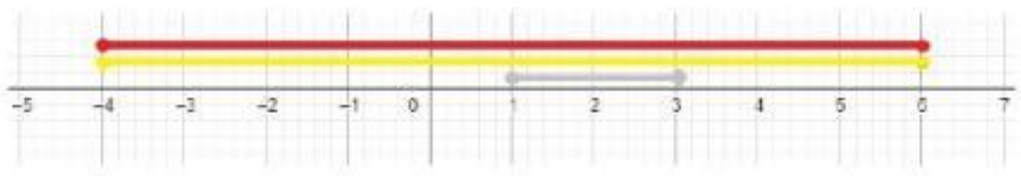
Ejemplo

Obtén la unión de los siguientes intervalos.

- $[-1,5] \cup [3,7] = [-1,7]$.



- $[1,3] \cup [-4,6] = [-4, 6]$





2.6 Problemas de aplicación

a) Un elevador está en el piso 3. Luego baja 5 pisos y después sube 7 pisos. ¿En qué piso se encuentra el elevador ahora?



b) Un granjero tiene 12 ovejas y compra 5 más. ¿Cuántas ovejas tiene en total?



Actividad 10.

Operaciones con intervalos.

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da clic AQUÍ.

Actividad 11.

Problemas de aplicación

Instrucciones: te invitamos a resolver los siguientes retos.

c) Un comerciante tiene 77 manzanas y desea dividirlas en grupos iguales, utilizando el número máximo de grupos posible. ¿Cuántas manzanas habrá en cada grupo si usa únicamente el factor primo más grande?



d) Un maestro tiene 120 lápices y quiere repartirlos de manera equitativa entre sus alumnos, de forma que no queden lápices sobrantes. Si tiene 15 alumnos, ¿cuántos lápices recibirá cada uno?



e) María tiene un jardín rectangular y quiere rodearlo con una cerca. El jardín mide 10 metros de largo y 7 metros de ancho. Ella necesita calcular el perímetro del jardín para saber cuántos metros de cerca necesita comprar.



f) Obtener el MCD de 20,18,10

20	18	10	2
10	9	5	
			MCD= 2

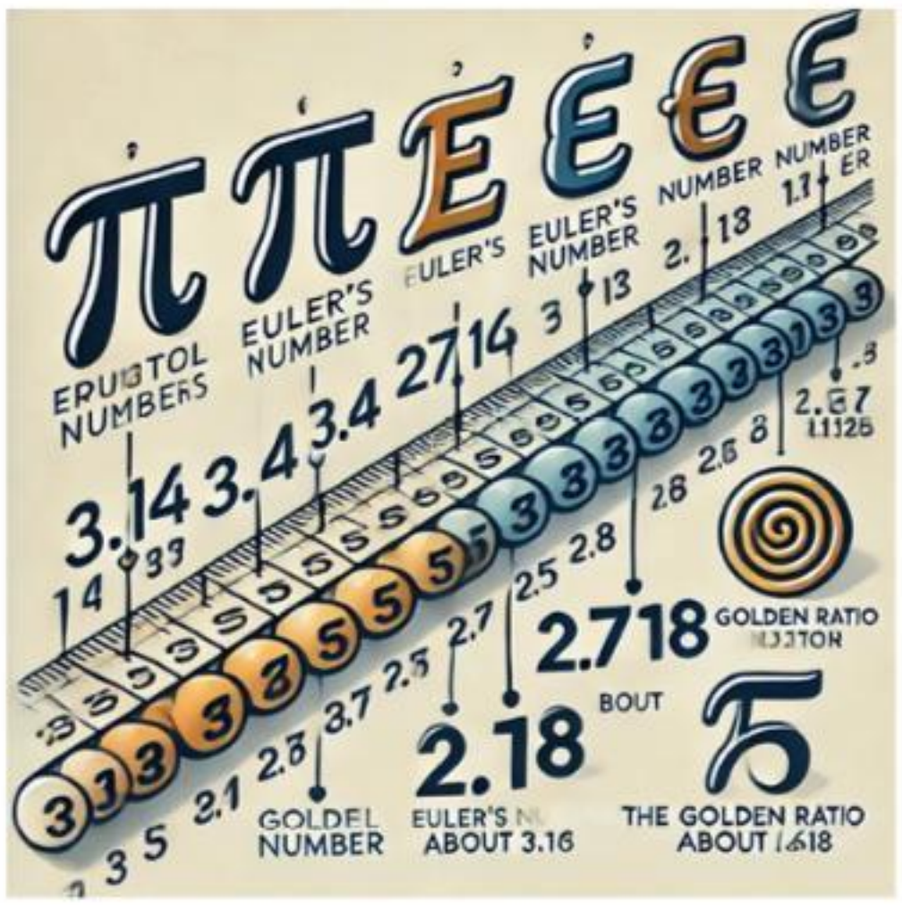
g) Obtener el mcm de 20,18,10

20	18	10	2
10	9	5	2
5	9	5	3
5	3	5	3
5	1	5	5
1	1	1	mcm = 180

h) Ana tiene 3/4 de una pizza y quiere comprar 5/3 más, si llega Lupita y le trae 7/2 más de pizza, ¿cuánta pizza tiene en total?



i) Representa en la recta numérica a: π, e, Φ



j) Un tren sale del punto (-7) y llega al punto 8, mientras otro sale del punto (-4) y llega al punto 10, ¿en qué puntos se intersectarán?



Resumen del Módulo

Este módulo cubre los aspectos esenciales de la teoría de números y con números primos y modelos matemáticos, con aplicaciones prácticas en la definición de ecuaciones y la manipulación de conjuntos numéricos, así como de mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

La teoría de números estudia las propiedades de estos, especialmente los **números primos.** Abarca conceptos clave como: **números primos** que solo son divisibles por 1 y y el mismo número, los cuales son 2, 3, 5, 7, etc.. Estos son fundamentales porque todo número entero puede descomponerse.

Otro punto importante que vimos fue la **divisibilidad** como la capacidad de un número de dividirse exactamente entre otro y que para ellos existen reglas específicas para determinar si un número es divisible por otro; esto lo aplicamos en el **mínimo común múltiplo (MCM),** que es el menor número que es múltiplo común de dos o más números. También vimos el **máximo común divisor (MCD)** que es el mayor número que divide exactamente a dos o más números.

En cuanto a los **conjuntos numéricos** vimos que existen conjuntos iniciando en los **números naturales, números enteros, números racionales, números irracionales,** los cuales forman el conjunto de los **números reales** y que se pueden representar en la **recta numérica.**

Y no menos importante, estudiamos a los **intervalos,** los **tipos de intervalos** y las **operaciones** entre ellos.

Todo para concluir con problemas de aplicación en los cuales valoraremos lo aprendido y ejercitaremos lo aprendido para llevarlo a la vida cotidiana en nuestro entorno.

Actividad 12.



Ejercicio autoevaluable

para reforzar los temas vistos en este Módulo II, realiza el siguiente ejercicio, para comenzar, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada M2 Cuestionario Final.

Glosario

Número: representa una cantidad.

Números primos: un número primo es un número natural que mayor a 1 que solo tiene dos divisores, que son la unidad y él mismo, lo cual implica que, al realizar la división, su residuo es cero

Propiedades: atributos o cualidades de un objeto que pueden ser de distintos tipos.

Divisibilidad: propiedad que tienen los números enteros de que solo pueden ser divididos entre la unidad y ellos mismos, es decir, su residuo es cero.

Múltiplo de un número: es el producto de ese número por un número entero.

Divisor de un número: es un número entero que divide exactamente a otro número entero, es decir, sin dejar residuo. Si un número a es divisor de otro número b, entonces existe un número entero k tal que:

$$b = a(k)$$

Hipotenusa: es el lado opuesto al ángulo recto (de 90 grados) y es el lado más largo de un triángulo rectángulo (triángulo que tiene un ángulo de 90°). Generalmente, en un triángulo rectángulo con lados a y b denotan los catetos, la longitud de la hipotenusa c se calcula mediante al obtener la raíz cuadrada de c^2 en el Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Incógnita: variable o letra que representa un valor desconocido en una ecuación o problema matemático. La incógnita es el valor que se busca encontrar para que una ecuación sea verdadera.

Recta numérica: recta donde se representan todos los números reales. También se le conoce como recta real.

Subconjunto de un conjunto es un conjunto A: es un conjunto que todos sus elementos pertenecen al conjunto A. Es decir, es un conjunto que está contenido en el conjunto A.

Números compuestos: son números o cantidades numéricas que no cumplen con las condiciones de ser números primos.

Referencias

- De Torres, C. M (2015) Los reyes de la pasarela, modelos matemáticos en las ciencias. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Fundación de Historia Natural Félix de Azar. https://www.fundacionazara.org.ar/img/libros/modelos-matematicos.pdf
- Rojas González, R. (2018). El lenguaje de las matemáticas: historia de los símbolos. Fondo de Cultura Económica.
- Ruiz, L. (2007, 16 enero). ¿Cuáles son los números primos? https://www.mundodeportivo.com/uncomo/educacion/articulo/cuales-son-los-numeros-primos-37095.html



Variaciones y figuras geométricas

Propósito de Módulo

Analiza variaciones y figuras geométricas para identificarlas y relacionarlas con su entorno a través de la resolución de problemas de aplicación.

Presentación

En este módulo se abordarán temas fundamentales como la proporcionalidad directa e inversa, el manejo de porcentajes, para resolver ejercicios de situaciones-problema significativas, Estos conceptos no solo son fundamentales en el campo matemático, sino también son herramientas valiosas para la vida diaria, facilitando la comprensión y resolución de problemas en contextos diversos.

La matemática financiera es otra rama de las matemáticas, por lo tanto, se definirá el interés simple y compuesto. Los contenidos permiten a los alumnos reflexionar sobre el impacto de las decisiones financieras en el proyecto de vida de cada persona, promoviendo una toma de decisiones más informada y razonada.

Además, se exploran aspectos de la geometría clásica y analítica para calcular áreas de figuras geométricas simples y culminando con el análisis de teoremas avanzados como el Teorema del Triángulo de Napoleón. Se busca una conexión entre conceptos clásicos de la geometría euclidiana, como el Teorema de Pitágoras y los criterios de congruencia y semejanza, con herramientas analíticas modernas como el sistema de coordenadas.



Actividad 1.



Ejercicio de diagnóstico

Instrucciones: apara ver iniciar con la actividad da clic en el enlace.

Módulo I

Introducción al álgebra

Propósito de Módulo

Emplear los diferentes tipos de expresiones algebraicas para la resolución de operaciones y problemas de aplicación

3.1 Definición y ejemplos de: razón, proporción y porcentaje

Las proporciones o relaciones entre cantidades suelen utilizarse cuando se quiere conocer cuantas veces una cantidad excede a otra (razón aritmética) o cuantas veces cabe una en otra (razón geométrica). Una de las aplicaciones más significativas de las razones es la **escala de dibujos** que se define como *"la relación que existe entre la representación gráfica del objeto y el propio objeto en la realidad" Arcos D.J. (s.f.).* Por lo que las representaciones a escala de dibujos, figuras, mapas y planos juegan un papel importante en áreas como el diseño gráfico, la arquitectura, el área de ingeniería, medicina, ya que en ocasiones es más fácil trabajar una representación más pequeña o más grande que el tamaño original según los propósitos que se quieren alcanzar.

En la siguiente figura se tiene un ejemplo de un cuadrado (en su tamaño original) y se dice que tiene escala "1 a 1"; a la izquierda esta un cuadrado tal que sus medidas están reducidas a la mitad del cuadrado original y se dice que tiene una escala "1 a 2"; a la derecha del cuadrado original se tiene una representación ampliada al doble o escala "2 a 1". En matemáticas las expresiones "1 a 2", "1 a 1" y "2 a 1" se llaman razones y se denotan por "1:2", "1:1" y "2:1", respectivamente.

Figura 1. Escalas



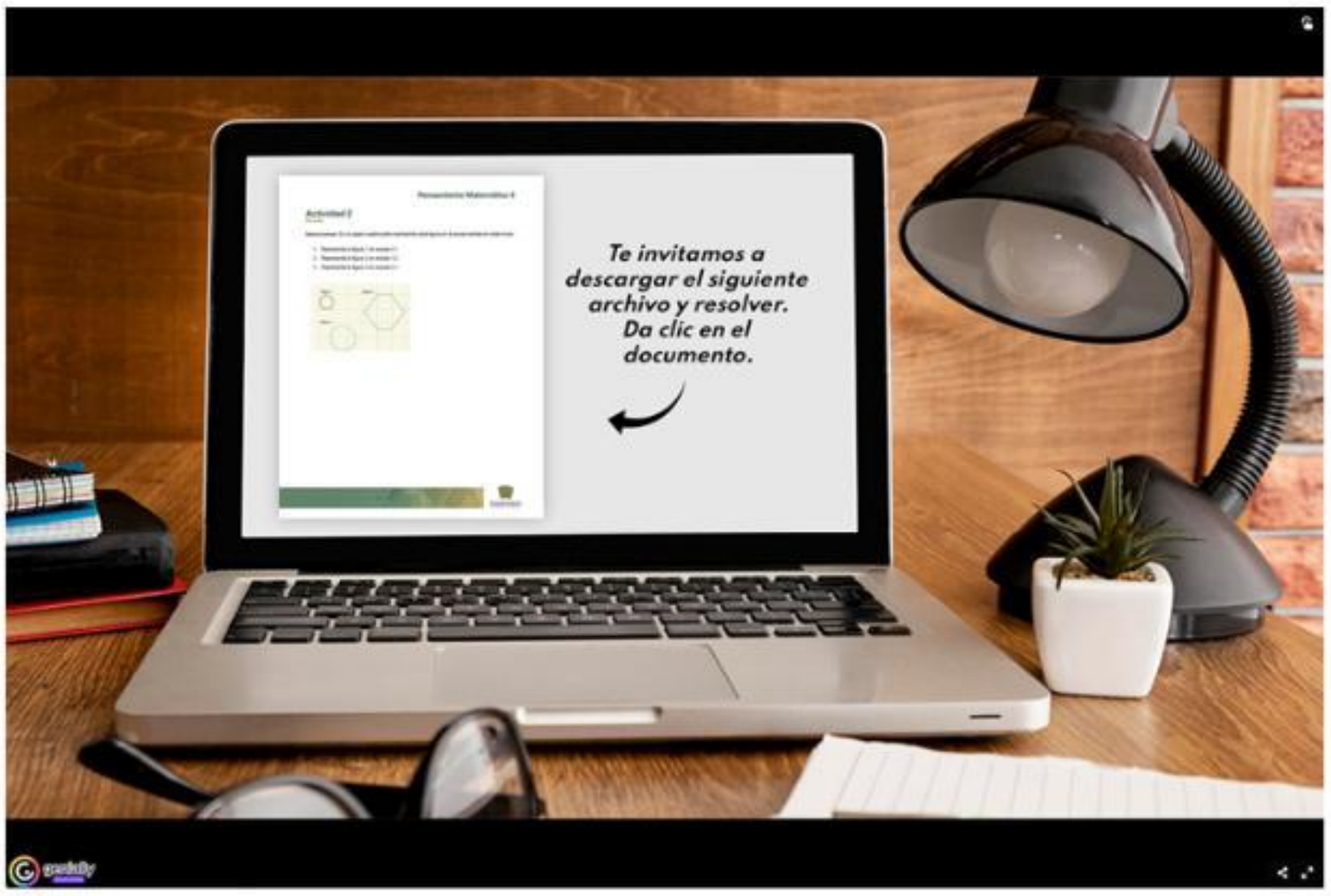
Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Escalas].

3.1.1 Razón

Una razón es la comparación entre dos cantidades y se pueden definir dos tipos de razones:

La razón geométrica que es la comparación de dos cantidades mediante la división, es decir, es el cociente entre dos cantidades y permite saber cuántas veces una de las cantidades contiene a la otra. Los términos de la razón geométrica son el antecedente (numerador) y consecuente (denominador).

La razón aritmética es la comparación de dos cantidades mediante resta, es decir, es la diferencia de dos cantidades, permite conocer cuanto excede una de las cantidades a la otra. Los términos de la razón aritmética son el antecedente (minuendo) y consecuente (sustraendo).



Actividad 2.



Escalas

Instrucciones: Para reforzar lo revisado realiza la siguiente actividad solo da clic en el enlace.

3.1.2 Proporción

Una proporción es la igualdad entre dos o más razones. Al resultado de la división de las razones, se llama constante de proporcionalidad. Esto es:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ o $a{:}b{::}c{:}d$ para $b, d \neq 0$ y para que pueda existir la razón $a, c \neq 0$

Se lee "a es a b como c es a d"

Donde:

k: Constante de proporcionalidad

a, d: Se denominan extremos de la proporción.

b, c: Se denominan medios de la proporción.

Figura 3. Proporciones de Leonardo Da Vinci



Nota. Fuente: BBC NewsMundo (2020b, julio 5). Leonardo Da Vinci: las mil y un maneras en las que el Hombre de Vitruvio revela que el artista italiano era un genio. [Proporciones de Leonardo Da Vinci]. https://www.bbc.com/mundo/noticias-53090609

Tabla 2. Ejemplos de proporciones

Proporción	Verificación de la constante(realizar la división de cada razón)	Constante de proporcionalidad
3:5 :: 9:15	$\frac{3}{5} = 0.6$ $\frac{9}{15} = 0.6$	0.6
$\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$	$\frac{4}{8} = 0.5$ $\frac{1}{2} = 0.5$ $\frac{5}{10} = 0.5$	0.5
2:7::12:42	$\frac{2}{7} = 0.\overline{285718}$ $\frac{12}{42} = 0.\overline{285714}$	$0.\overline{285714}$

5:2::10:4	$\frac{5}{2}=2.5$	$\frac{10}{4}=2.5$		2.5
8:3::16:6::40:15	$\frac{8}{3}=2.\overline{6}$	$\frac{16}{6}=2.\overline{6}$	$\frac{40}{15}=2.\overline{6}$	$2.\overline{6}$

Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Ejemplos de proporciones].

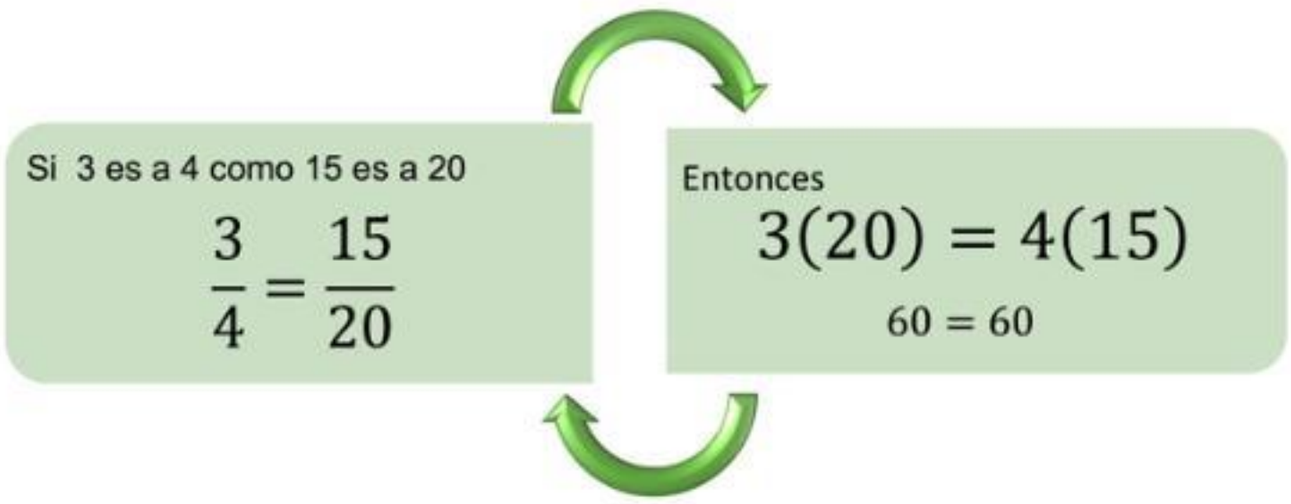
En proporciones se tiene un teorema importante que enunciamos a continuación, el cual nos permitirá resolver proporcionalidades que involucran incógnitas o números reales, sin necesidad de hacer la división.

Teorema fundamental de proporciones

En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

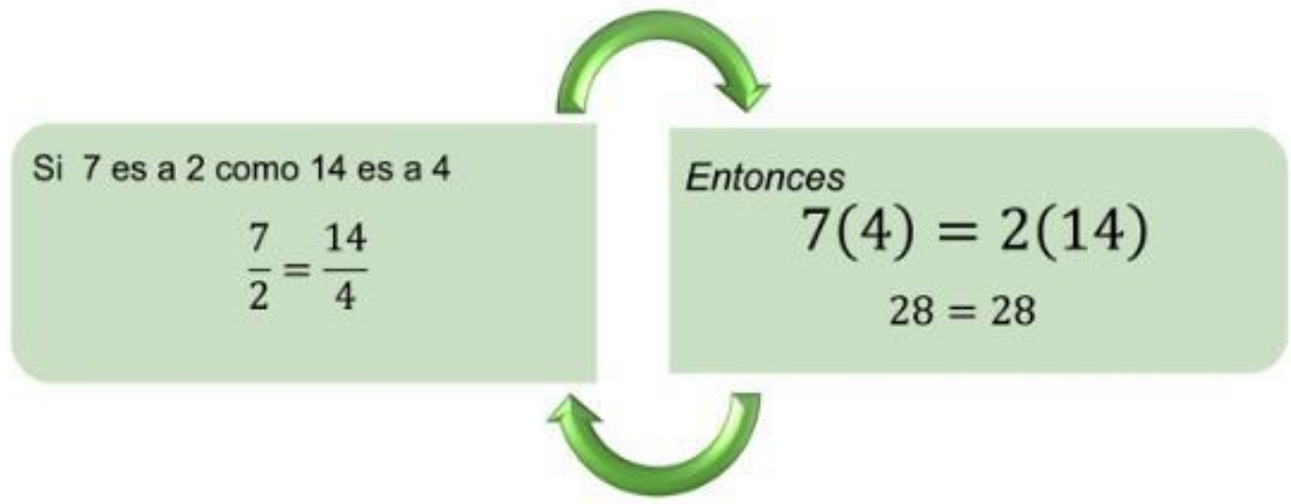
Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ entonces $ad=bc$

Figura 4. Ejemplo 2. Teorema fundamental de proporciones



Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Ejemplo 2. Teorema fundamental de proporciones].

Figura 5. Ejemplo 2. Teorema fundamental de proporciones



Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Ejemplo 2. Teorema fundamental de proporciones].

Ejemplo 3. Encontrar el valor de la incógnita en cada proporción, aplicando el Teorema fundamental de proporciones

a. $\frac{3}{7}=\frac{x}{2}$

Solución:

$\frac{3}{7}=\frac{x}{2}$

$3(2)=7x$ Por Teorema fundamental

$x=\frac{3(2)}{7}$ Despejar a la variable

$x=\frac{6}{7}=0.\overline{857142}$ Resolver las operaciones

b. $\frac{63}{x}=\frac{9}{7}$

Solución:

$\frac{63}{x}=\frac{9}{7}$

$63(7)=9x$ Por Teorema fundamental

$x=\frac{63(7)}{9}$ Despejar a la variable

$x=49$ Resolver las operaciones

c. Las edades de dos hermanas son entre sí como 4:6 La edad de la mayor supera a la menor en 4 años. ¿Cuál es la edad de cada una?

Solución:
La razón de las edades es de $4{:}6$. Si x es la edad de la hermana menor, entonces $x+4$ es la edad de la mayor. Entonces la proporción es

$\frac{4}{6}=\frac{x}{x+4}$

$4(x+4)=6x$ Por Teorema fundamental

$4x+16=6x$

$4x-6x=-16x$ Simplificar la expresión

$-2x=-16$

$x=\frac{-16}{-2}$

$x=8$ Resolver las operaciones

Como $x=8$, se tiene que $x+4=8+4=12$.

Entonces la edad de la menor es 8 y la edad de la mayor es 12





Actividad 3.

Proporciones

Instrucciones: es momento de revisar lo aprendido. Realiza el siguiente ejercicio, da clic en el enlace para comenzar la actividad.

3.1.3 Porcentaje

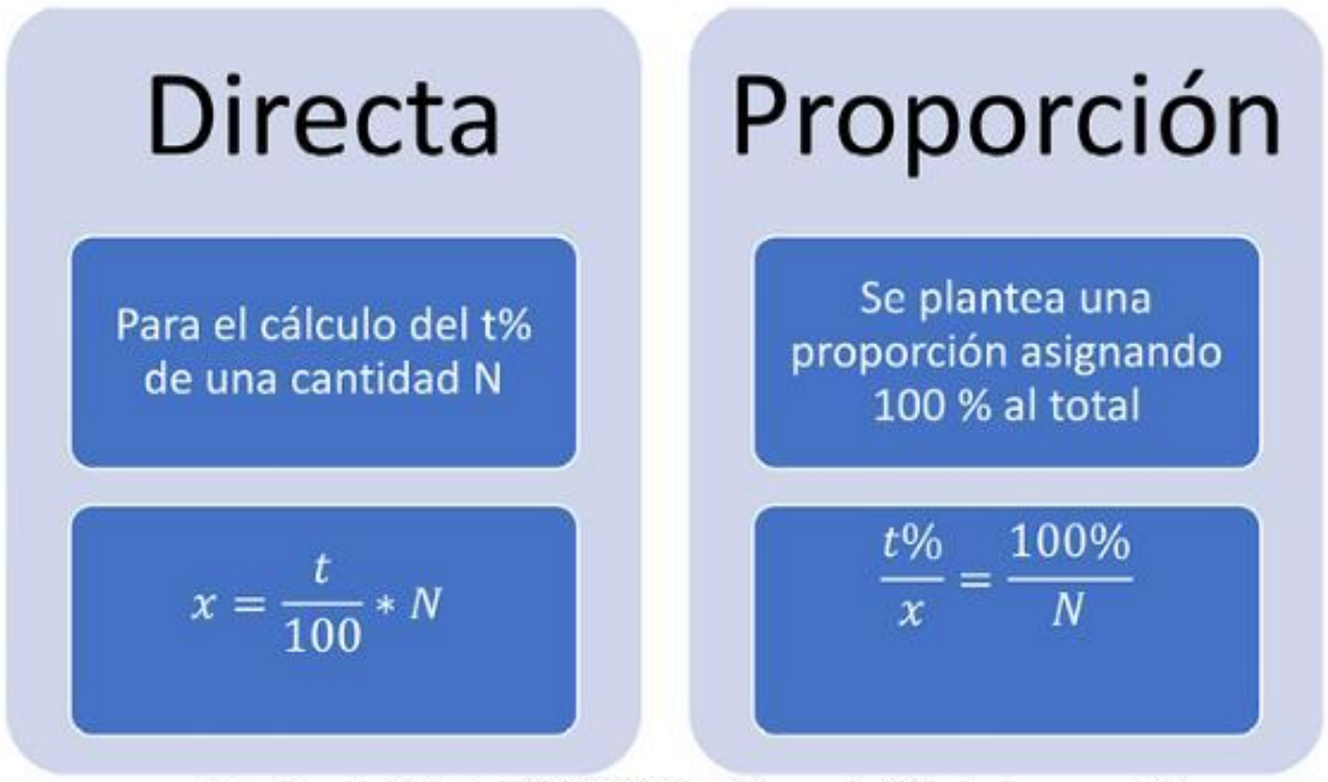
El cálculo de porcentajes es una aplicación de la proporcionalidad al comparar cantidades o unidades de medidas con partes de un ciento. Para calcular un porcentaje, identificamos el total de individuos, cosas o números con el 100%, es decir, que se toma como referencia al número 100.

El porcentaje n% significa n individuos (cosas o números) de cada 100. Por ejemplo:

- El 50% es la mitad del total (50 de cada 100).
- El 10% es la décima parte del total (10 de cada 100).
- El 20% es la quinta parte del total (20 de cada 100).

Podemos establecer dos procedimientos de cálculo:

Figura 6. Cálculo de porcentaje



Nota. Fuente: Galicia, A.V. (2024). Creación propia. [Cálculo de porcentaje].

Ejemplo 1.
a. Calcular el 18 % de la cantidad 1 245 unidades

Forma directa: $t = 18$ y $N=1\,245$

$$x = \frac{18\%}{100\%} * 1\,245$$ Sustituir los valores en la fórmula directa

$$x = 0.18 * 1245$$ Simplificar las operaciones.

$$x = 224.1$$

El 18% de 1 245 es 224.1

b. En un salón de clase hay 40 alumnos. ¿Cuántas mujeres hay, si se sabe que representan el 30% del total?

Forma directa: $t = 30$ y $N = 40$

$$x = \frac{30\%}{100\%} * 40$$ Sustituir los valores en la fórmula directa

$$x=0.30*40$$ Simplificar las operaciones.

$$x=12$$

En el salón de clase hay 12 mujeres.

c. Calcular qué porcentaje representan 145 personas de una comunidad de 347 personas.

Usando proporcionalidad: $t = ?, x = 145$ y $N=347$

$$\frac{t}{145} = \frac{100\%}{347}$$ Sustituir los valores en la fórmula de la proporción

$$x = \frac{145(100\%)}{347}$$ Simplificar las operaciones.

$$x=41.7867$$

Las 145 personas representan 41.7867% de la comunidad.

d. Calcular el total de datos, si se sabe que 2 378 es el 20% de ellos.

Usando proporcionalidad: $t = 65, x= 2\,375$ y $N =?$

$$\frac{20\%}{2\,378}=\frac{100\%}{N}$$

Sustituir los valores en la fórmula de la proporción

$$N=\frac{2\,375(100\%)}{20\%}$$

Simplificar las operaciones.

$$N=11\,890$$

El total de datos es de 11 890

e. Un trabajador recibe un aumento de $1 200, lo que equivale al 6% de su salario. ¿Cuál es su nuevo salario?

Usando proporcionalidad $t=30$ y $N=40$

$$\frac{6\%}{1\,200}=\frac{100\%}{N}$$

Sustituir los valores en la fórmula de la proporción

$$x=\frac{1\,200(100\%)}{6\%}$$

Simplificar las operaciones.

$$x=20\,000$$



Actividad 4.



Porcentajes

Instrucciones: es momento de revisar lo aprendido. Realiza el siguiente ejercicio, da clic en el enlace para comenzar la actividad.

3.2 Variaciones

De acuerdo con Swokowsky & Cole, (j2009) también denominadas proporciones, se usan para explicar la relación que existe entre dos cantidades variables, dichas relaciones pueden ocurrir de forma directa, inversa o compuesta.

Dicho de otra manera, matemáticamente hablando, es una ecuación en la que se relaciona una variable con otra u otras mediante dos operaciones aritméticas: la multiplicación o la división.

3.2.1 Directas

Según Angel (2007) es la relación entre dos variables que son múltiplos constantes entre sí, es decir, cuando una cantidad aumenta, también la otra aumenta y cuando una disminuye también la otra lo hace.

Entonces, dos cantidades o magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Si una variable y varía de forma directa con una variable x, entonces:

$$y = kx$$

en donde k es la constante de proporcionalidad o de variación.

De forma matemática, se dice que dos cantidades son directamente proporcionales si se cumple que $k = \frac{x}{y}$ con $k, y, x \neq 0$

Ejemplo:

La siguiente tabla muestra la relación que existe entre dos cantidades que representan un fenómeno de la vida cotidiana:

Cantidad A	18	1.5	60	2.7	0.21
Cantidad B	6	0.5	20	0.9	0.07

Al realizar el análisis de cada par, se puede observar que:

La cantidad B se puede obtener dividiendo la cantidad A entre 3 en cada par, es decir: $18 \div 3 = 6; 1.5 \div 3 = 0.5; 60 \div 3 = 20; 2.7 \div 3 = 0.9; 0.21 \div 3 = 0.07$

O la cantidad A se puede obtener al multiplicar la cantidad B por 3 en cada par, es decir: $6(3) = 18; 0.5(3) = 1.5; 20(3); 0.9(3); 0.07(3) = 0.21$

Así que se puede afirmar que la constante $k = 3$ expresándose de la siguiente manera:

$$k = \frac{cantidad\ 1}{cantidad\ 2} = \frac{18}{6} = \frac{1.5}{0.5} = \frac{60}{20} = \frac{2.7}{0.9} = \frac{0.21}{0.07} = 3$$

Generalizando lo anterior, las variaciones o proporciones directas se pueden expresar como:

$$k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{o} \quad a:b::c:d$$

Ejemplos:

1. Juan realiza la compra de 5 cuadernos, por lo que pagó $120.00. Si Laura pagó $216.00 ¿Cuántos cuadernos compró Laura?

Solución:

Se realizará el análisis de la relación cuadernos/dinero para el planteamiento:

$$\frac{5}{120}=\frac{x}{216}$$

Despejar x realizando operaciones inversas o aplicando las propiedades básicas de la igualdad:

$$(5)(216)=(120)(x)$$

$$x=\frac{5(216)}{120}=\frac{1080}{120}=9$$

Laura compró 9 cuadernos.

2. La familia Lara quiere comprar una sala, cuyo costo es de $36 000.00, si esta tiene un descuento de 25%, ¿cuál es el monto del descuento?

Solución:

$$36\,000:100\%::x:25\%$$

Despejar a x:

$$x=\frac{36\,000(25\%)}{100\%}=\frac{900\,000}{100}=\$9\,000.00$$

El descuento fue de $9 000.00

3.Un alumno obtiene en un examen 56 aciertos de 70 posibles, ¿cuál es su calificación?

Solución:

$$\frac{Aciertos}{Calificación}:\frac{70}{10}=\frac{56}{x}$$

Despejar a x:

$$x=\frac{56(10)}{70}=\frac{560}{70}=8$$

La calificación obtenida fue de 8.0



Actividad 5.

Variación directa

Instrucciones: aplicando el procedimiento para determinar la variación directa, realiza la actividad solo da clic en el enlace para comenzar.

3.2.2 Indirectas

Para Ángel (2007) es la relación entre dos cantidades que cuando una aumenta, la otra disminuye, y viceversa.

Entonces, dos cantidades o magnitudes son indirectamente o inversamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Si una variable y varía de forma inversa con una variable x, entonces:

$$y = \frac{k}{x}$$

en donde k es la constante de proporcionalidad o de variación.

De forma matemática, se dice que dos cantidades son indirecta o inversamente proporcionales si se cumple que $k = xy$

Ejemplo:

Si un automóvil que viaja a una velocidad de 60km/h llega a su destino en 6 horas, si aumenta su velocidad a 90 km/h entonces llega a su destino en 4 horas, así que, como su velocidad aumentó, su tiempo se disminuyó, lo que se puede representar como:

$$\mathrm{k}=60(6)=90(4)=360$$