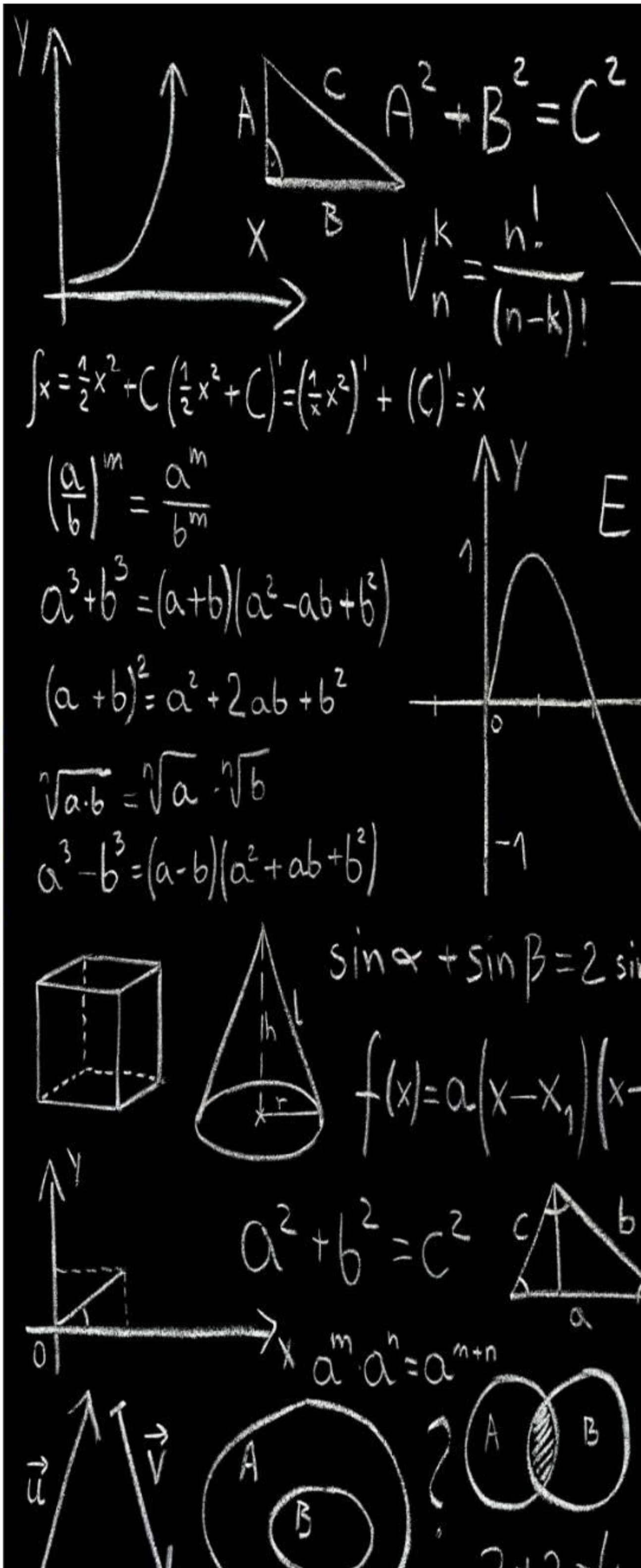
Universidad Autónoma
del Estado de México

E-BOOK

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

3ER. SEMESTRE

Maximiliano Adán Evangelista Esquivel
Gabriela Patricia González Navarro
María Fernanda López Albarrán



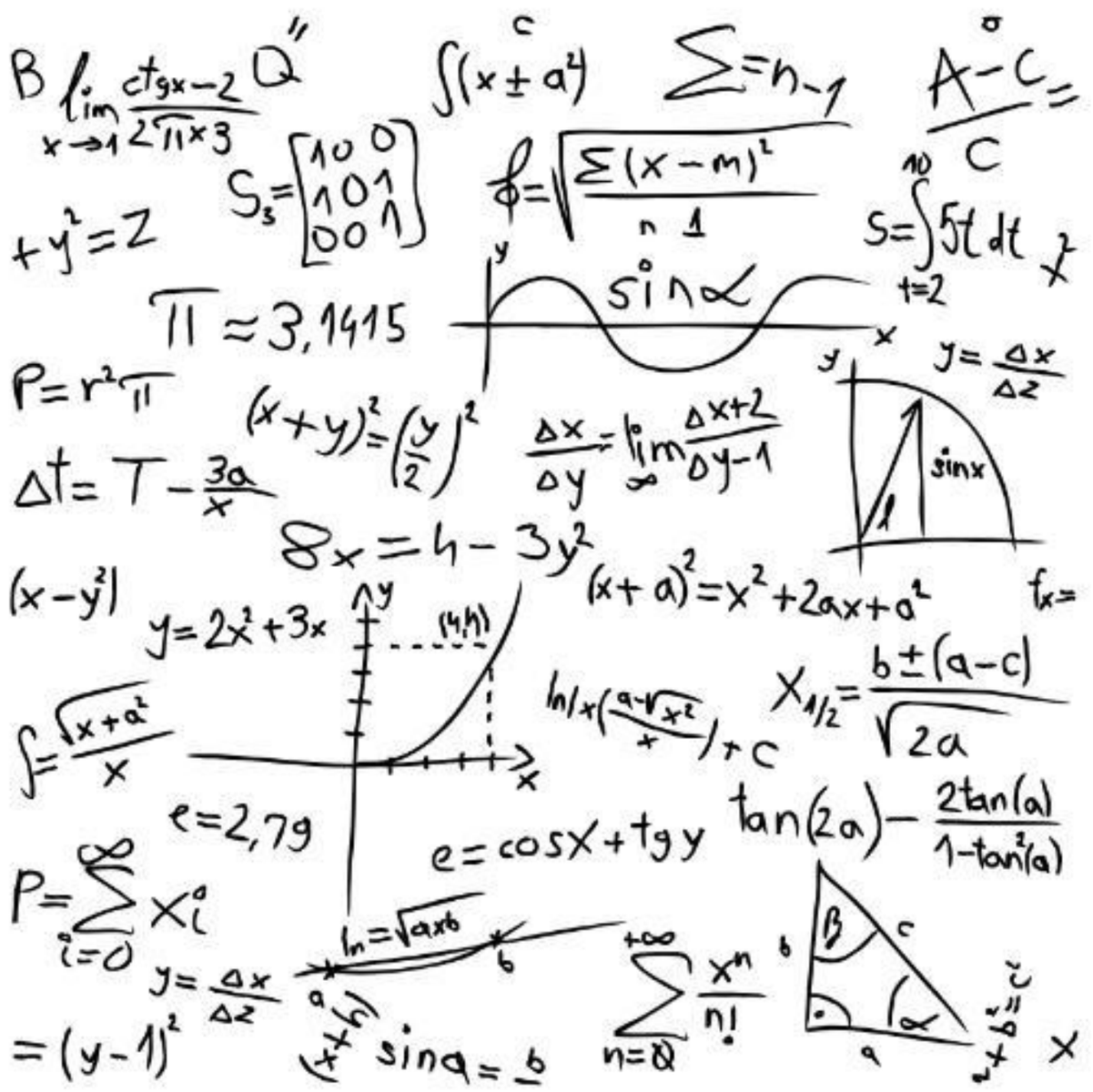
Presentación

Para conocer un poco más sobre el cálculo es importante sumergirnos en la historia humana, en donde la curiosidad aceleró la búsqueda de procesos infinitos que definen el escenario. El viaje teórico comenzó al desentrañar la historia del cálculo, donde los cimientos fueron los procesos infinitos para entender la variación ya sea promedio o instantánea, y la compleja descripción del movimiento de partículas.

El cálculo encontró sus raíces formalmente en el surgimiento del cálculo diferencial; esto sucedió en el periodo crucial de esta rama matemática y en los conceptos que la fundamentan y que hoy la sustentan. El enfrentamiento con el problema de la recta tangente marca una señal de impulso en el desarrollo de técnicas y principios, sentando así, las bases del cálculo moderno.

El problema de la recta tangente divide el cálculo en dos áreas: el cálculo diferencial y el cálculo integral. En este módulo analizaremos el problema que implica la gráfica de una función para el cálculo diferencial; al obtener la recta tangente a la gráfica de una función, podemos relacionarla con la velocidad instantánea, lo que nos lleva a uno de los objetivos fundamentales del cálculo infinitesimal que es el análisis del comportamiento de una función cuando existe un cambio en su variable independiente.

Gráficamente se visualizan cambios, los cuales permiten identificar la existencia de puntos máximos o mínimos relativos, concavidades e intervalos de crecimiento y decrecimiento; esta información brinda datos muy importantes para diferentes tipos de aplicaciones, tales como la optimización de materiales y la trayectoria o movimiento de objetos. En este módulo se realizará un análisis intuitivo de estos conceptos, los cuales, posteriormente, serán estudiados de forma analítica.



Tips para cuando se tiene una función racional y se evalúa la continuidad y se obtiene $\frac{0}{0}$:

1. La función se evalúa sustituyendo el valor de *x*
2. Los límites los **factorizo**
3. Compruebo la igualdad del punto 1 y 2

Ejemplos:

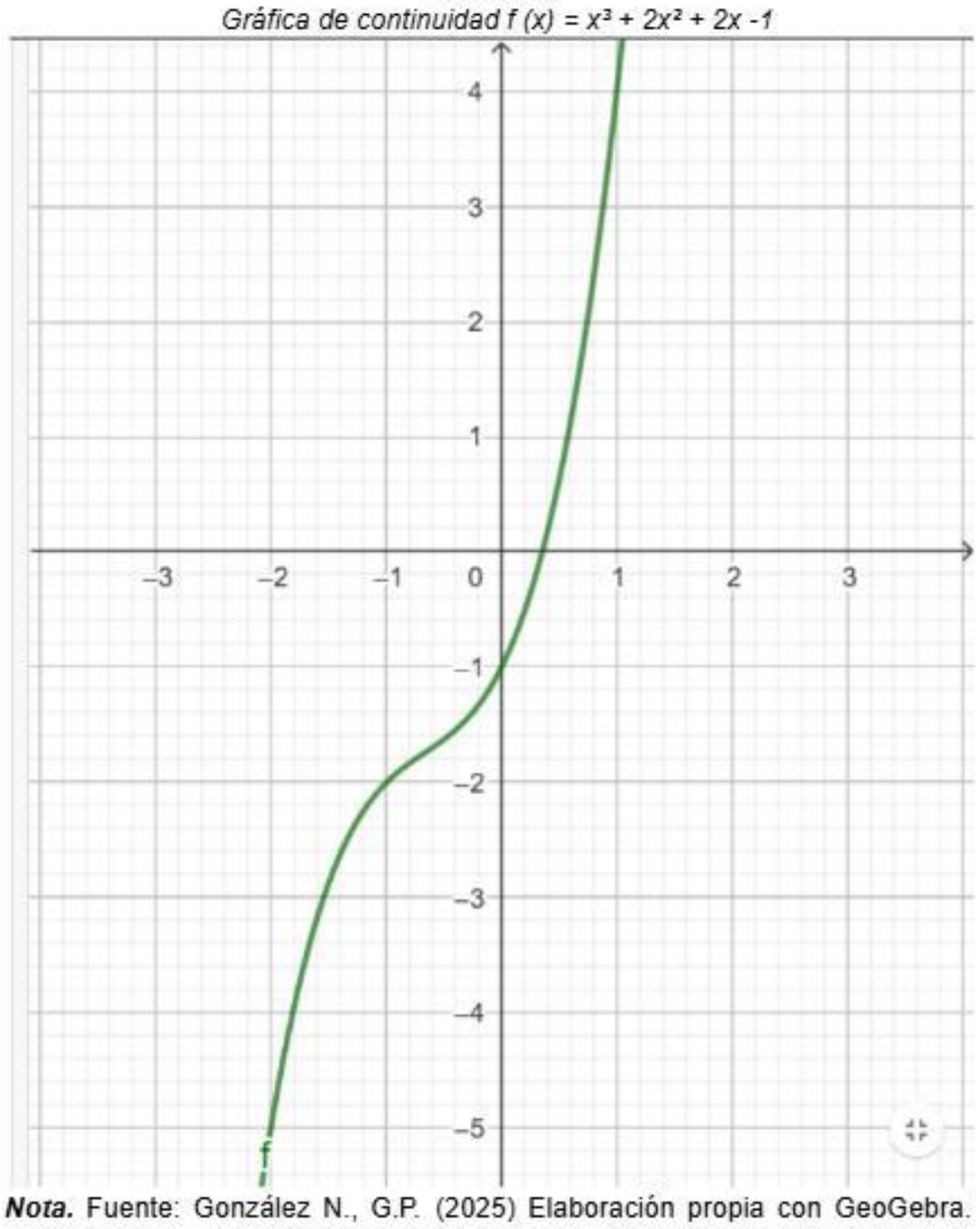
1) Analiza la continuidad de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ en x = 1, y representa gráficamente.

1. Evaluamos la función en *x* =1, es decir *f* (1)	$f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 2(1) - 1$ $f(1) = 1 + 2 + 2 - 1$ $f(1) = 4$
2. Obtenemos el límite	$\lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ $\lim_{x\to 1} (1)^3 + 2(1)^2 + 2(1) - 1$ $\lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 4$
3. Comprobamos que ambos resultados sean iguales	$f(1) = 4 = \lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 4$

∴ **la función** $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$, es **continua** en $x = 1$

Figura 11.

Gráfica de continuidad f (x) = x³ + 2x² + 2x -1



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de continuidad *f (x) = x³ + 2x² + 2x -1*].

2) Analiza la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

1. Evaluamos la función en $x = 2$, entonces analizamos cuál función debemos de evaluar de las 2 propuestas, como en $f(x) = 6 - x^2$ el dominio es 2, en esa sustituimos el valor.	$f(2) = 6 - (2)^2$ $f(2) = 6 - 4$ $f(2) = 2$
2. Evaluamos el límite, recordando que una condición para que exista el límite es que existan sus laterales y estos tienen que ser iguales, entonces evaluamos por la izquierda y por la derecha:	$\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x$ a^- X: 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999 y: 1.159, 1.910, 1.991, 1.999 $\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x = 2$ $\lim_{x \to 2^+} 6 - x^2$ a^+ x: 2.0001, 2.001, 2.01, 2.1 y: 1.999, 1.995, 1.959, 1.590 $\lim_{x \to 2^+} 6 - x^2 = 2$ $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$
3. Comprobamos que ambos resultados sean iguales	$\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x = 2 = \lim_{x \to 2^+} 6 - x^2 = 2$ $f(2) = 6 - x^2 = 2 = \lim_{x \to 2} \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

∴ **la función** $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$, es **continua** en $x = 2$

2) Analiza la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

1. Evaluamos la función en $x = 2$, entonces analizamos cuál función debemos de evaluar de las 2 propuestas, como en $f(x) = 6 - x^2$ el dominio es 2, en esa sustituimos el valor.	$f(2) = 6 - (2)^2$ $f(2) = 6 - 4$ $f(2) = 2$
2. Evaluamos el límite, recordando que una condición para que exista el límite es que existan sus laterales y estos tienen que ser iguales, entonces evaluamos por la izquierda y por la derecha:	$\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x$ a^- X: 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999 y: 1.159, 1.910, 1.991, 1.999 $\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x = 2$ $\lim_{x \to 2^+} 6 - x^2$ a^+ x: 2.0001, 2.001, 2.01, 2.1 y: 1.999, 1.995, 1.959, 1.590 $\lim_{x \to 2^+} 6 - x^2 = 2$ $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$
3. Comprobamos que ambos resultados sean iguales	$\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x = 2 = \lim_{x \to 2^+} 6 - x^2 = 2$ $f(2) = 6 - x^2 = 2 = \lim_{x \to 2} \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

∴ **la función** $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$, es **continua** en $x = 2$

2) Analiza la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

1. Evaluamos la función en $x = 2$, entonces analizamos cuál función debemos de evaluar de las 2 propuestas, como en $f(x) = 6 - x^2$ el dominio es 2, en esa sustituimos el valor.	$f(2) = 6 - (2)^2$ $f(2) = 6 - 4$ $f(2) = 2$
2. Evaluamos el límite, recordando que una condición para que exista el límite es que existan sus laterales y estos tienen que ser iguales, entonces evaluamos por la izquierda y por la derecha:	$\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x$ a^- X: 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999 y: 1.159, 1.910, 1.991, 1.999 $\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x = 2$ $\lim_{x \to 2^+} 6 - x^2$ a^+ x: 2.0001, 2.001, 2.01, 2.1 y: 1.999, 1.995, 1.959, 1.590 $\lim_{x \to 2^+} 6 - x^2 = 2$ $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$
3. Comprobamos que ambos resultados sean iguales	$\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x = 2 = \lim_{x \to 2^+} 6 - x^2 = 2$ $f(2) = 6 - x^2 = 2 = \lim_{x \to 2} \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

∴ **la función** $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$, es **continua** en $x = 2$

2) Analiza la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

1. Evaluamos la función en $x = 2$, entonces analizamos cuál función debemos de evaluar de las 2 propuestas, como en $f(x) = 6 - x^2$ el dominio es 2, en esa sustituimos el valor.	$f(2) = 6 - (2)^2$ $f(2) = 6 - 4$ $f(2) = 2$
2. Evaluamos el límite, recordando que una condición para que exista el límite es que existan sus laterales y estos tienen que ser iguales, entonces evaluamos por la izquierda y por la derecha:	$\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x$ a^- X: 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999 y: 1.159, 1.910, 1.991, 1.999 $\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x = 2$ $\lim_{x \to 2^+} 6 - x^2$ a^+ x: 2.0001, 2.001, 2.01, 2.1 y: 1.999, 1.995, 1.959, 1.590 $\lim_{x \to 2^+} 6 - x^2 = 2$ $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$
3. Comprobamos que ambos resultados sean iguales	$\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x = 2 = \lim_{x \to 2^+} 6 - x^2 = 2$ $f(2) = 6 - x^2 = 2 = \lim_{x \to 2} \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

∴ **la función** $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$, es **continua** en $x = 2$

2) Analiza la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

1. Evaluamos la función en $x = 2$, entonces analizamos cuál función debemos de evaluar de las 2 propuestas, como en $f(x) = 6 - x^2$ el dominio es 2, en esa sustituimos el valor.	$f(2) = 6 - (2)^2$ $f(2) = 6 - 4$ $f(2) = 2$
2. Evaluamos el límite, recordando que una condición para que exista el límite es que existan sus laterales y estos tienen que ser iguales, entonces evaluamos por la izquierda y por la derecha:	$\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x$ a^- X: 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999 y: 1.159, 1.910, 1.991, 1.999 $\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x = 2$ $\lim_{x \to 2^+} 6 - x^2$ a^+ x: 2.0001, 2.001, 2.01, 2.1 y: 1.999, 1.995, 1.959, 1.590 $\lim_{x \to 2^+} 6 - x^2 = 2$ $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$
3. Comprobamos que ambos resultados sean iguales	$\lim_{x \to 2^-} x^3 - 3x = 2 = \lim_{x \to 2^+} 6 - x^2 = 2$ $f(2) = 6 - x^2 = 2 = \lim_{x \to 2} \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

∴ **la función** $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & si\ x < 2 \\ 6 - x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$, es **continua** en $x = 2$



Actividad 6. Continuidad de una función en un punto

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 6.
Continuidad de una función en un punto

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 6.
Continuidad de una función en un punto

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 6.
Continuidad de una función en un punto

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 1.
Evaluación diagnóstica

Instrucciones: antes de iniciar la exploración de los contenidos del módulo I, responde este ejercicio, ello te permitirá saber qué conocimientos previos tienes sobre los temas; de igual manera, tu docente estará al tanto sobre las áreas de oportunidad y lo que sabes acerca de los temas que se abordarán.

Para iniciar, revisa en la plataforma SEDUCA el apartado de Actividades (estudiante) y responde a la nombrada: MI Evaluación Diagnóstica.





Actividad 6.
Continuidad de una función en un punto

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 6.
Continuidad de una función en un punto

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



2.4 Discontinuidad de una función en un punto

Como vimos en el último ejercicio de la **Actividad #. Continuidad de una función en un punto,** podemos tener funciones que no sean continuas, a esto se le llama discontinuidad, ejemplo: el caso del salario, el precio de las tortillas no es continuo, puede tener saltos, y esto depende de muchas situaciones, pero para determinarlo aplicamos las mismas tres condiciones de continuidad, y valoramos si la función es continua o discontinua.

Ejemplos:

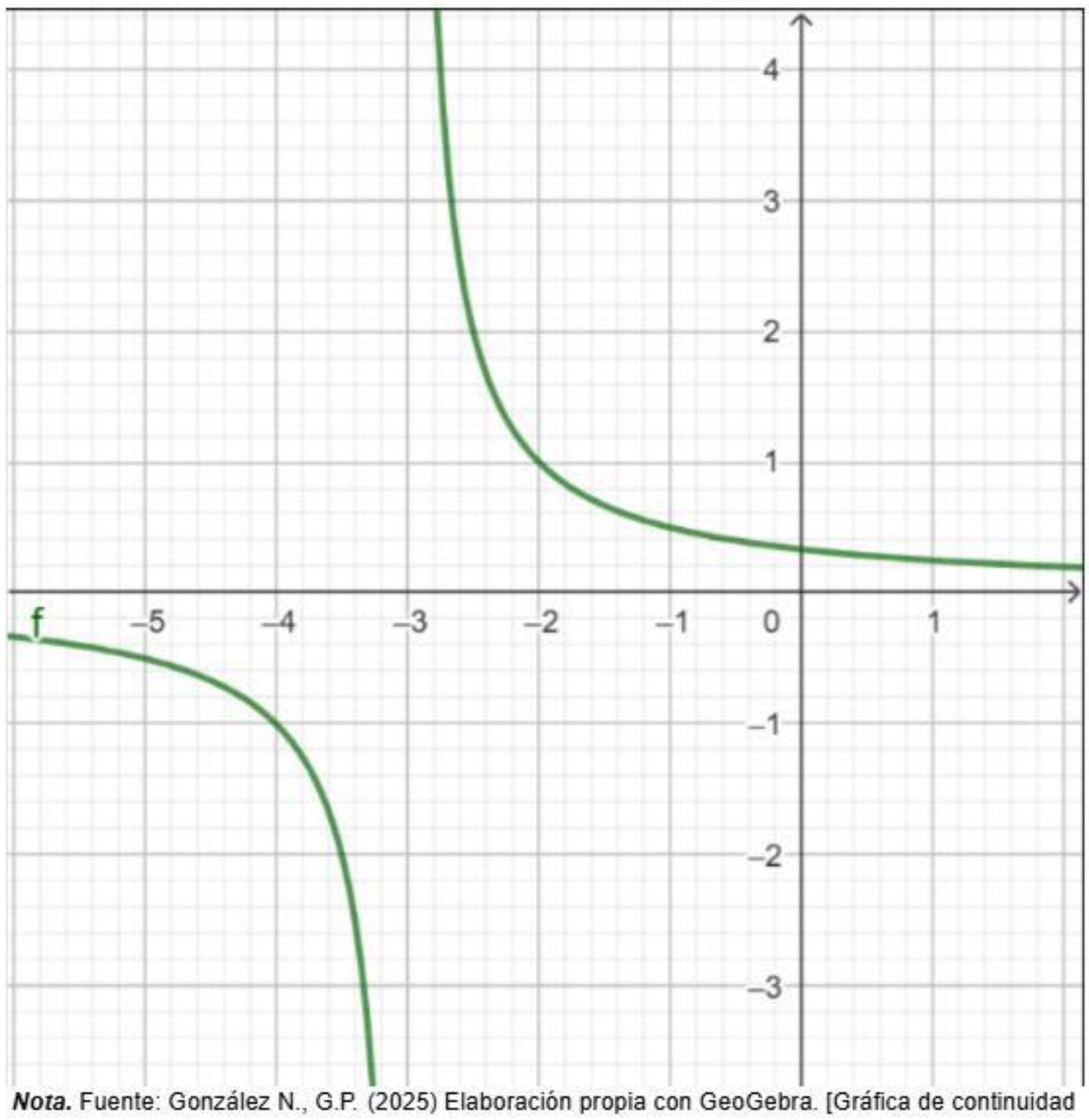
1. Analiza la discontinuidad de la función $f(x) = \frac{1}{x+3}$ en $x = -3$

1. Analizamos la función en x = -3, es decir f(-3)	$f(-3) = \frac{1}{-3+3}$ $f(-3) = \frac{1}{0}$ $f(-3) = no\ está\ definida$
2. Evaluamos el limite	$\lim_{x \to -3} \frac{1}{x+3}$ $\lim_{x \to -3} \frac{1}{-3+3}$ $= \frac{1}{0}$ No existe el límite, porque no está definido el límite ya que es una indeterminación.
3. Comprobamos que ambos resultados no sean iguales	No podemos asegurar que en x = –3 la función y el límite sean iguales, por lo cual diremos que la función es discontinua en x = -3

∴ **la función** $f(x) = \frac{1}{x+3}$, es **discontinua** en x = -3

Figura 12.

Gráfica de continuidad f (x) = $\frac{1}{x+3}$



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de continuidad $f(x) = \frac{1}{x+3}$].

2. Analiza la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & si\ x < -2 \\ x^2 - 6 & si\ x \geq -2 \end{cases}$

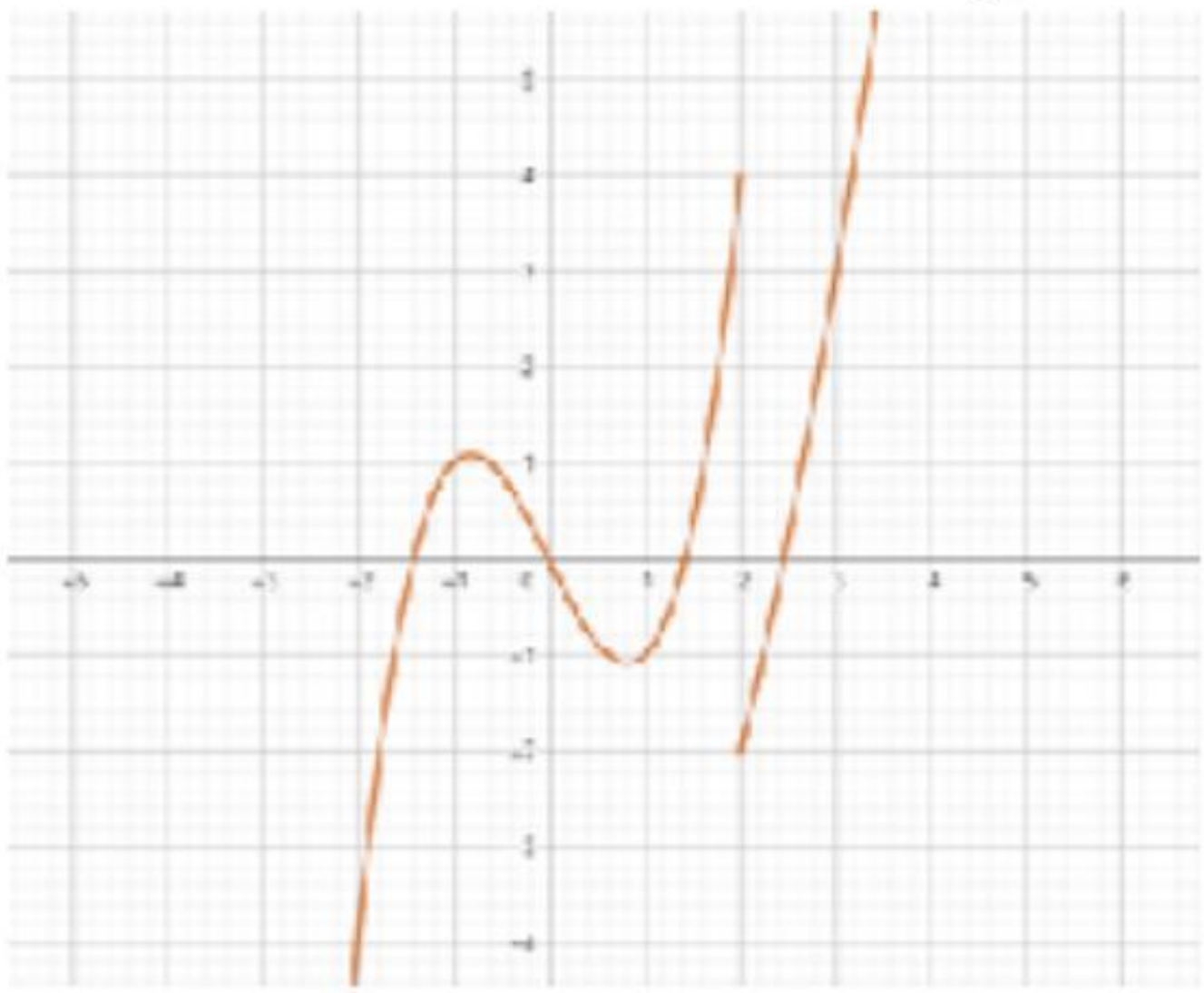
1. Evaluamos la función en $x = -2$, entonces analizamos cuál función debemos de evaluar de las 2 propuestas, como en $x^2 - 6$ el dominio es -2	$f(-2) = (-2)^2 - 6$ $f(-2) = 4 - 6$ $f(-2) = -2$
2. Evaluamos el límite, recordando que una condición para que exista el límite sus laterales deben de ser iguales, entonces evaluamos por la izquierda y por la derecha:	$\lim_{x \to -2^-} x^2 - 6$ a^- { *x*: -2.1, -2.01, -2.001, -2.0001 ; *y*: -1.59, -1.9599, -1.995999, -1.9996 } $\lim_{x \to -2^-} x^2 - 6 = -2$

	$\lim_{x\to -2^+} x^3 - 2x$ a^+ *x* | *y* *-1.9999* | *-3.99900006* *-1.999* | *-3.990006* *-1.99* | *-3.900599* *-1.9* | *-3.059* $\lim_{x\to -2^+} x^3 - 2x = -4$ $\lim_{x\to -2^-} x^2 - 6 = -2 \neq \lim_{x\to -2^+} x^3 - 2x = -4$
3. Comprobamos que ambos resultados no sean iguales	$\lim_{x\to -2^-} x^2 - 6 = -2 \neq \lim_{x\to -2^+} x^3 - 2x = -4$

∴ **la función** $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & si\ x < -2 \\ x^2 - 6 & si\ x \geq -2 \end{cases}$ es **discontinua** en $x = -2$

Figura 13.

Gráfica de continuidad $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & si\ x < -2 \\ x^2 - 6 & si\ x \geq -2 \end{cases}$



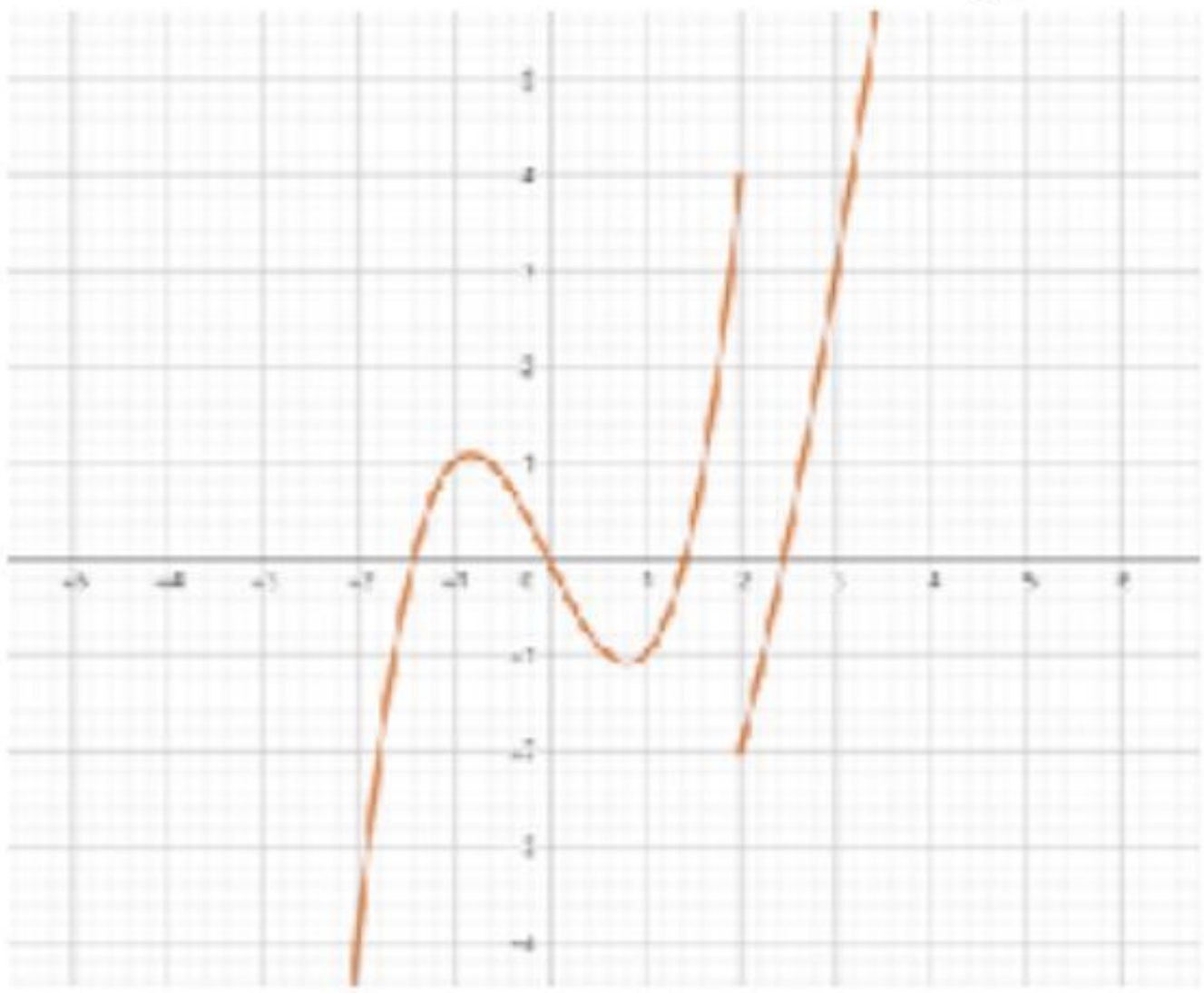
Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de continuidad $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & si\ x < -2 \\ x^2 - 6 & si\ x \geq -2 \end{cases}$].

	$\lim_{x\to -2^+} x^3 - 2x$ a^+ *x* | *y* *-1.9999* | *-3.99900006* *-1.999* | *-3.990006* *-1.99* | *-3.900599* *-1.9* | *-3.059* $\lim_{x\to -2^+} x^3 - 2x = -4$ $\lim_{x\to -2^-} x^2 - 6 = -2 \neq \lim_{x\to -2^+} x^3 - 2x = -4$
3. Comprobamos que ambos resultados no sean iguales	$\lim_{x\to -2^-} x^2 - 6 = -2 \neq \lim_{x\to -2^+} x^3 - 2x = -4$

∴ **la función** $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & si\ x < -2 \\ x^2 - 6 & si\ x \geq -2 \end{cases}$ es **discontinua** en $x = -2$

Figura 13.

Gráfica de continuidad $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & si\ x < -2 \\ x^2 - 6 & si\ x \geq -2 \end{cases}$



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de continuidad $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & si\ x < -2 \\ x^2 - 6 & si\ x \geq -2 \end{cases}$].

Actividad 7. Discontinuidad de una función en un punto

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.

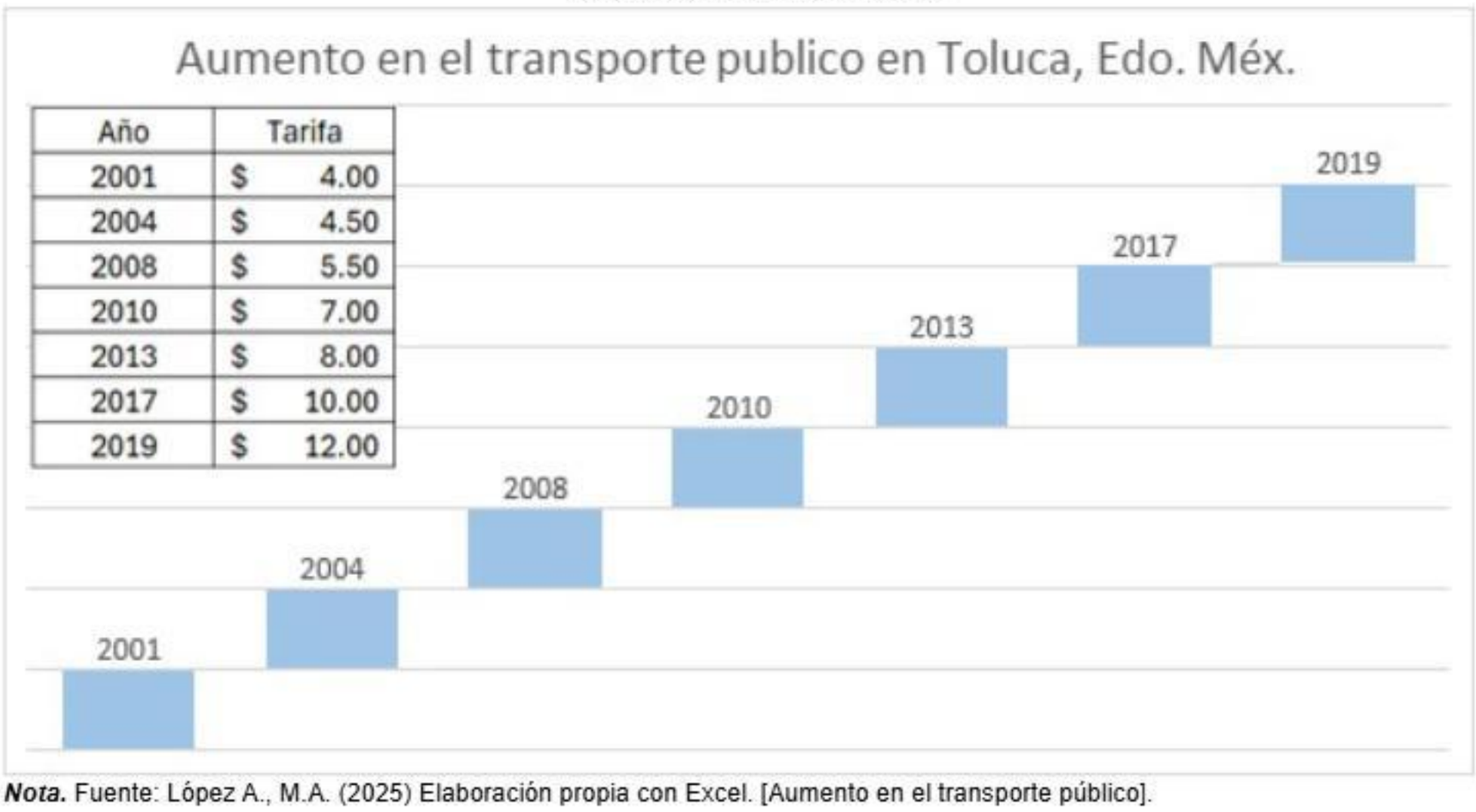


2.4.1 Tipos de discontinuidad

La continuidad de una función se fundamenta en el análisis de esta; sin embargo, encontraremos puntos donde la función no es continua, esto lleva a las **discontinuidades.**

Otro ejemplo de una función discontinua es el aumento de la tarifa del transporte público, en Toluca desde 2001 a la fecha ha tenido un incremento de $4.00 a $12.00. Estos cambios drásticos gráficamente representan un salto, son utilizados para modelar eventos específicos.

Figura 14.
Aumento en el transporte público



Nota. Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Excel. [Aumento en el transporte público].

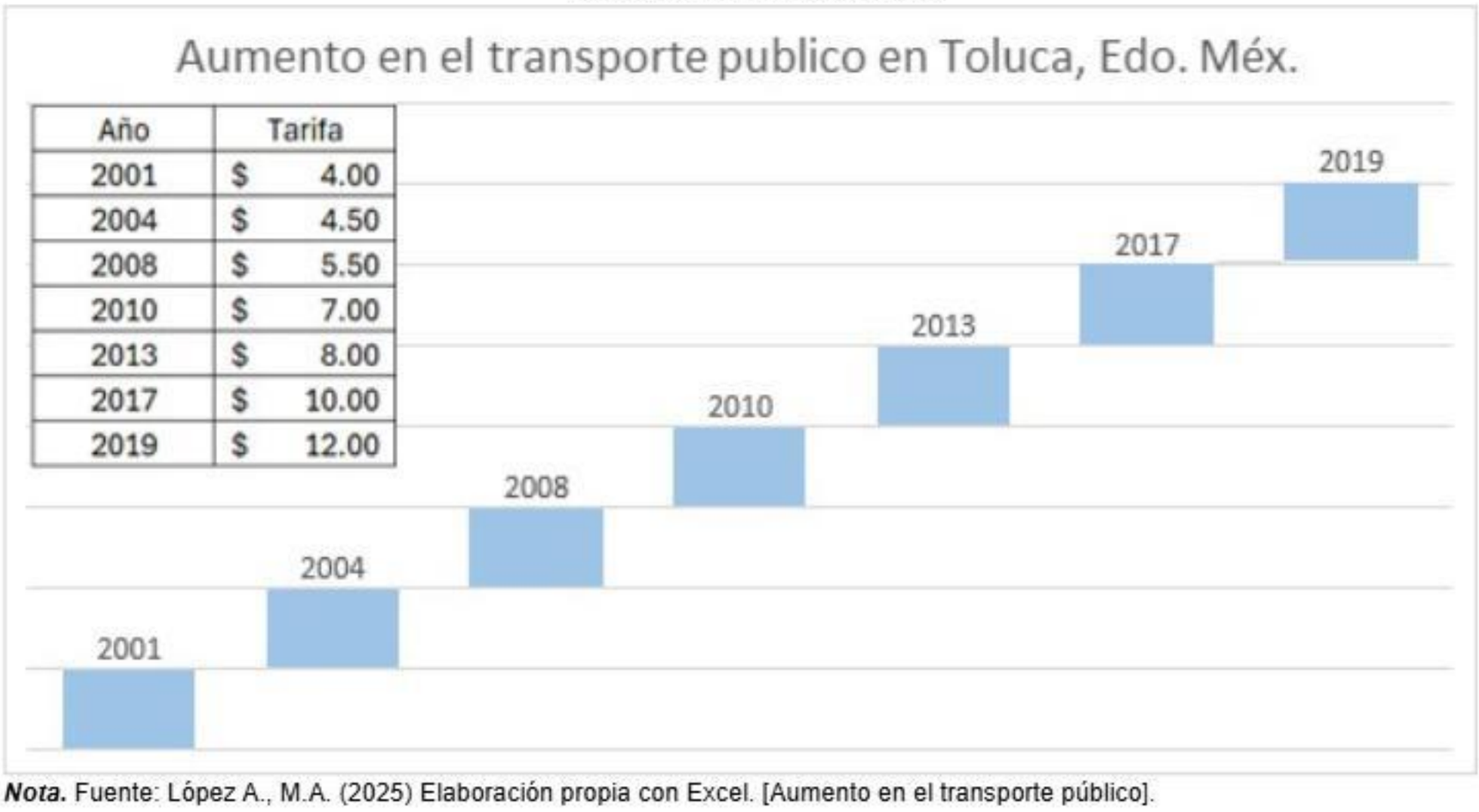


2.4.1 Tipos de discontinuidad

La continuidad de una función $y = f(x)$ se fundamenta en el análisis de esta; sin embargo, encontraremos puntos donde la función no es continua, esto lleva a las **discontinuidades.**

Otro ejemplo de una función discontinua es el aumento de la tarifa del transporte público, en Toluca desde 2001 a la fecha ha tenido un incremento de $4.00 a $12.00. Estos cambios drásticos gráficamente representan un salto, son utilizados para modelar eventos específicos.

Figura 14.
Aumento en el transporte público



Nota. Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Excel. [Aumento en el transporte público].



Una función presenta una discontinuidad cuando se interrumpe en un punto, porque su límite no existe, la función no está definida o el valor del límite es distinto al valor de la función. En la siguiente figura se muestran los tipos de discontinuidad con las condiciones que debe satisfacer para poder clasificarla.

Figura 15.
Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable

Condición

1. $lím_{x \to a} f(x) = k$

2. $\nexists\ f(a)$ o $f'(a) \neq k$

Discontinuidad de salto

Condición 1:

1. $lím_{x \to a^-} f(x) = L_I$

2. $lím_{x \to a^+} f(x) = L_D$

$L_I \neq L_D$

Condición 2:

1. $lím_{x \to a^-} f(x) = L_I$, $lím_{x \to a^+} f(x) = \infty$

2. $lím_{x \to a^-} f(x) = \infty$, $lím_{x \to a^+} f(x) = L_D$

Discontinuidad asintótica

Condición:

1. $lím_{x \to a^-} f(x) = lím_{x \to a^+} f(x) = \infty$

En este tema se analizarán los tipos de discontinuidad que puede tener una función en un punto especifico, $x = a$. Este análisis permite entender cómo se comporta la función cerca de este valor.

Analicemos cada tipo de discontinuidad definidas en el punto $x = a$:

1.1 Antecedentes del cálculo diferencial

El cálculo es una rama que ha tenido un papel fundamental en el crecimiento de la ciencia y la tecnología; todo esto debido a que nos ayuda a comprender y modelar fenómenos dinámicos y variables.

Para aprender y entender el cálculo, es importante que veamos algo de su historia, empezaremos por los principales personajes junto con sus aportaciones, lo cual nos ayudará a entender mejor la percepción y evaluación del cálculo a lo largo del tiempo. También hablaremos de los procesos infinitos, una definición base en el cálculo debido a que nos deja ver los fundamentos de límites; así podemos iniciar a entender cómo funcionan las magnitudes que se aproximan al infinito. Posteriormente exploraremos continuidad debido a que nos dejará entender las ideas básicas que son la base del concepto del cálculo.

Para ello es necesario comprender las variaciones promedio e instantáneas, y a través de ellas conocer el cambio en el tiempo y a la vez, entender el movimiento de partículas o la precisión de la trayectoria y velocidad de objetos en movimiento.

El cálculo diferencial se ha convertido en una herramienta fundamental de la ciencia, la ingeniería y otras áreas del conocimiento; a fin de conocer y comprender el mundo que nos rodea. Se encarga principalmente de estudiar el cambio.

Todo esto con la intención de lograr una conexión entre la historia del cálculo y su importancia actual, considerando la percepción y descripción de los fenómenos del mundo actual.

Para dar inicio al curso, es muy importante adentrarnos en los principios, sobre todo comprender cómo fue posible que personajes tan brillantes hicieran contribuciones para resolver diversos problemas con un alto grado de dificultad y, sobre todo, darnos cuenta de que esas mismas aportaciones son hoy las mismas con las que seguimos resolviendo problemas en la actualidad. Esto puede producir cierto interés para algunos al averiguar un poco más del mundo de las matemáticas, pero sobre todo del cálculo y de sus aplicaciones.

A fin de darnos cuenta que el cálculo nació en la antigua Grecia, retrocederemos un poco en el tiempo; podría pensarse que fue utilizado en la astronomía mediante la cuadratura de los polígonos, pero esto se refiere más al área de una figura plana; si habláramos de la cuadratura del círculo nos referimos a dibujarla con una regla no cuadrada y un compás; la duplicidad del cubo, la trisección de un ángulo y la inscripción de polígonos regulares en una circunferencia, son algunos problemas que fueron resueltos por diversos matemáticos en la antigüedad: Arquímedes, Eudoxo, Pitágoras y Tales de Mileto.

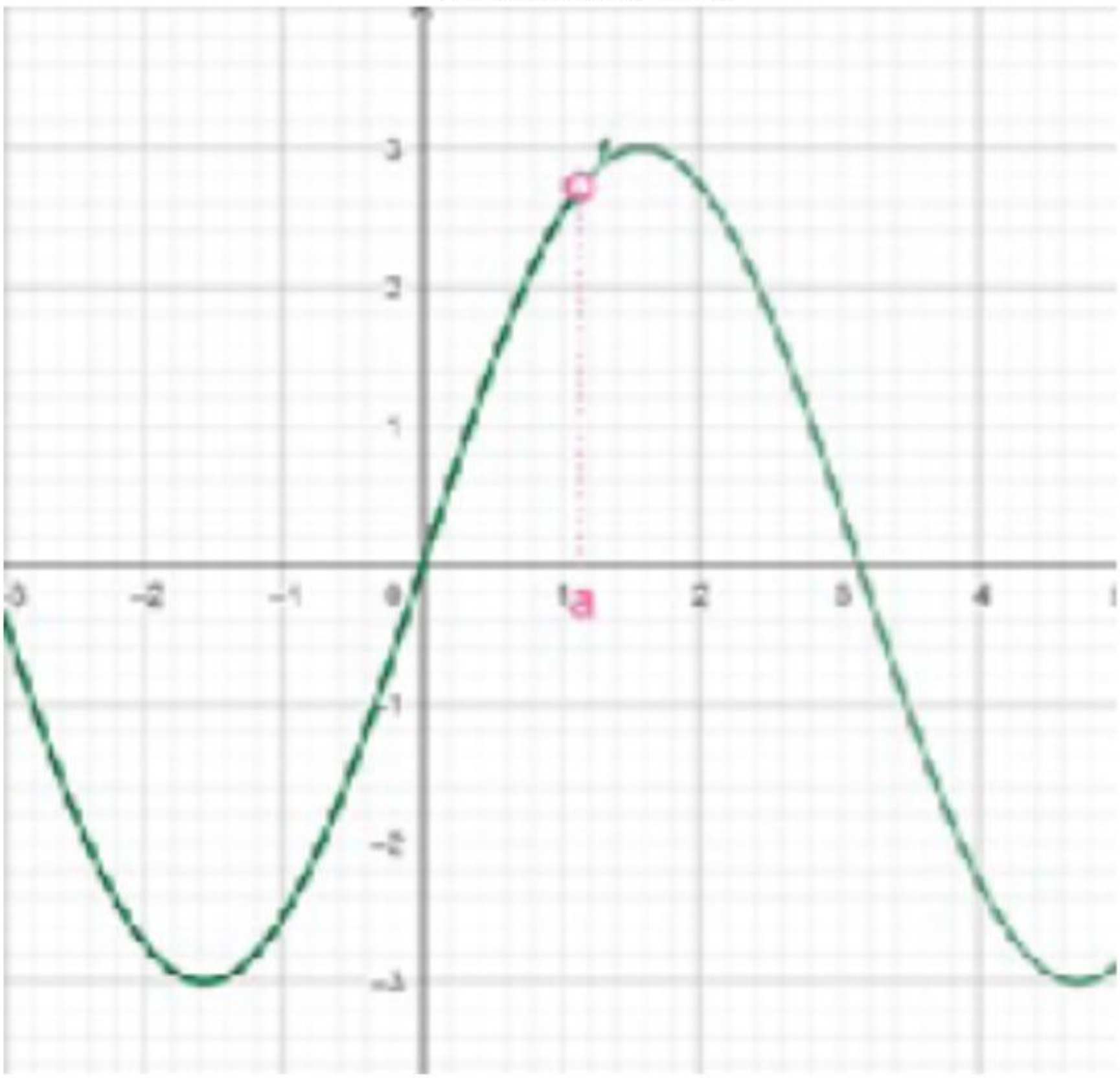
Acerca de las contribuciones de cada uno de ellos, hablaremos a continuación.

Discontinuidad evitable

Una función *f* tiene una **discontinuidad evitable** en *a* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- El límite de la función existe $\lim_{x \to a} f(x) = k$
- La función no está definida en *a* o tiene un valor diferente $\nexists f(a)$ o $f'(a) \neq k$

Figura 16.
Ejemplo de discontinuidad evitable



Nota. Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [Ejemplo de discontinuidad evitable].

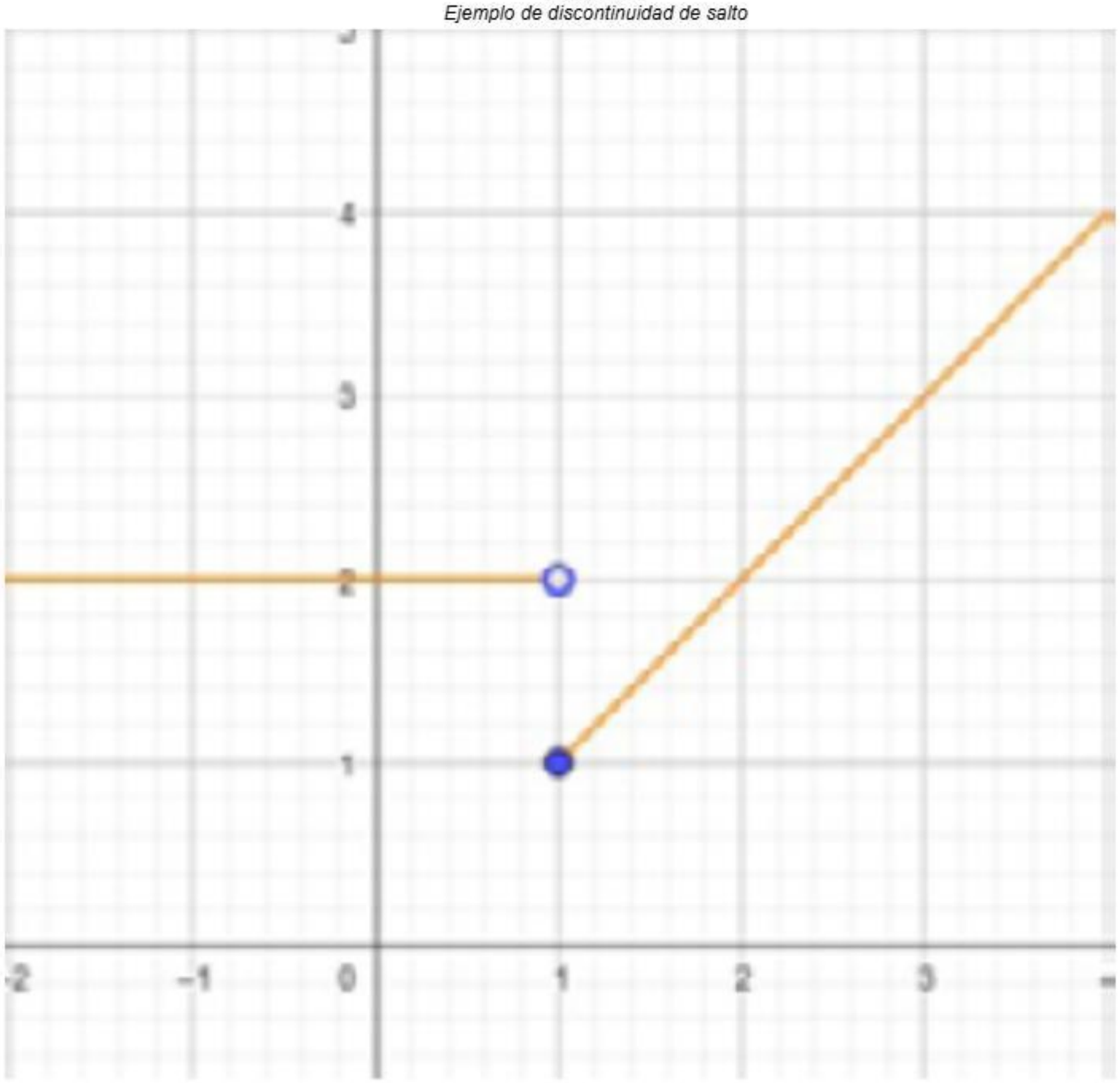
Discontinuidad inevitable de salto

Una función f tiene una **discontinuidad salto** en *a* si se cumplen las dos siguientes condiciones:

Los límites laterales existen, pero no coinciden

$lím_{x \to a^-} f(x) = L_I$
$lím_{x \to a^+} f(x) = L_D$
$L_I \neq L_D$

Figura 17.
Ejemplo de discontinuidad de salto



Nota. Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [Ejemplo de discontinuidad de salto]

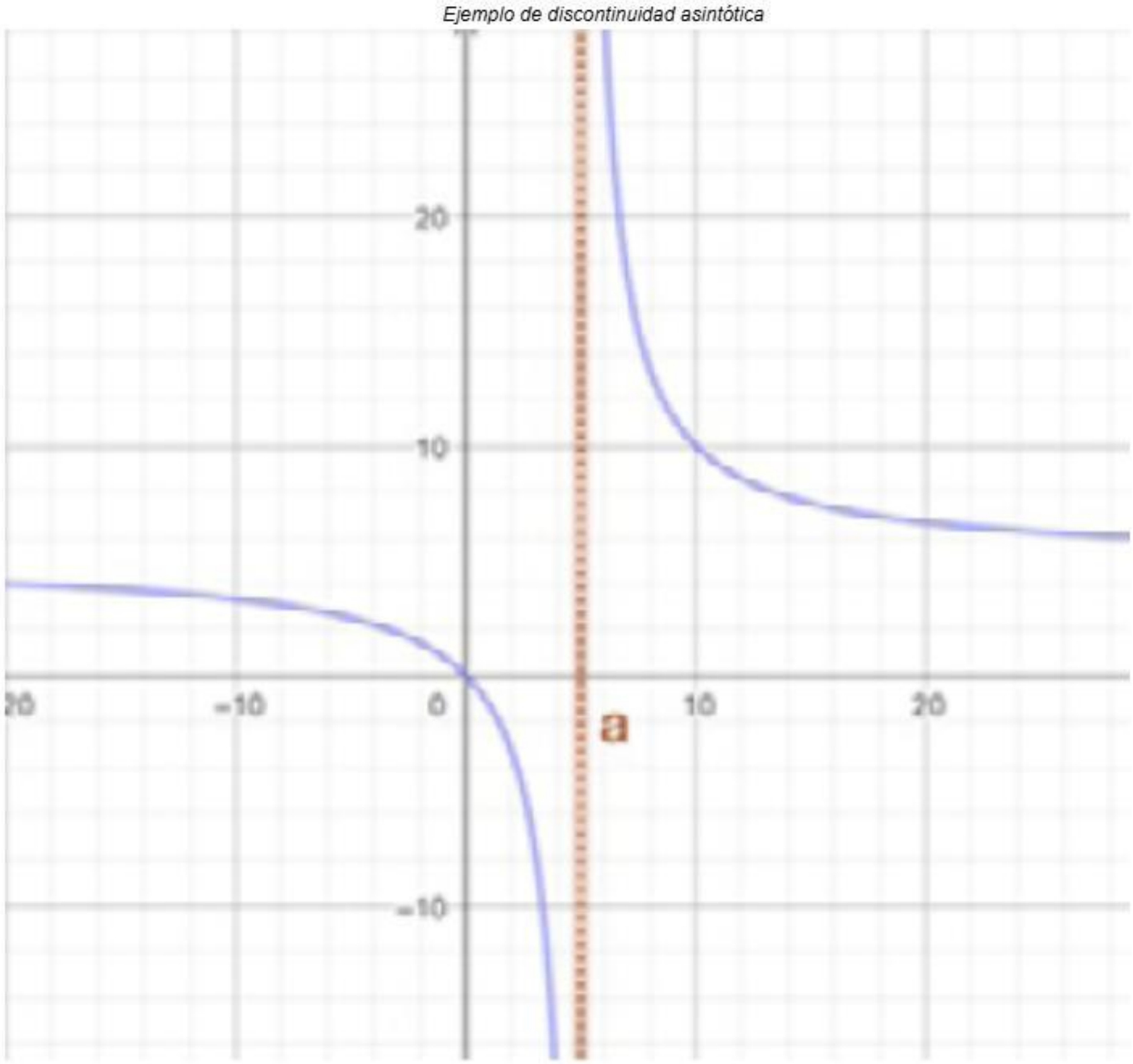
Discontinuidad asintótica

Una función *f* tiene una **discontinuidad asintótica** en *a* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- Los limites laterales de la función son infinitos

$lím_{x\to a^-} f(x) = lím_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

Figura 18.
Ejemplo de discontinuidad asintótica



Nota. Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [Ejemplo de discontinuidad de salto]

A fin de comprender las condiciones para clasificar el tipo de discontinuidad, vamos a realizar algunos ejemplos:

1. Determina el tipo de discontinuidad que presenta la función:

$a)\ f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ en $x = -1$

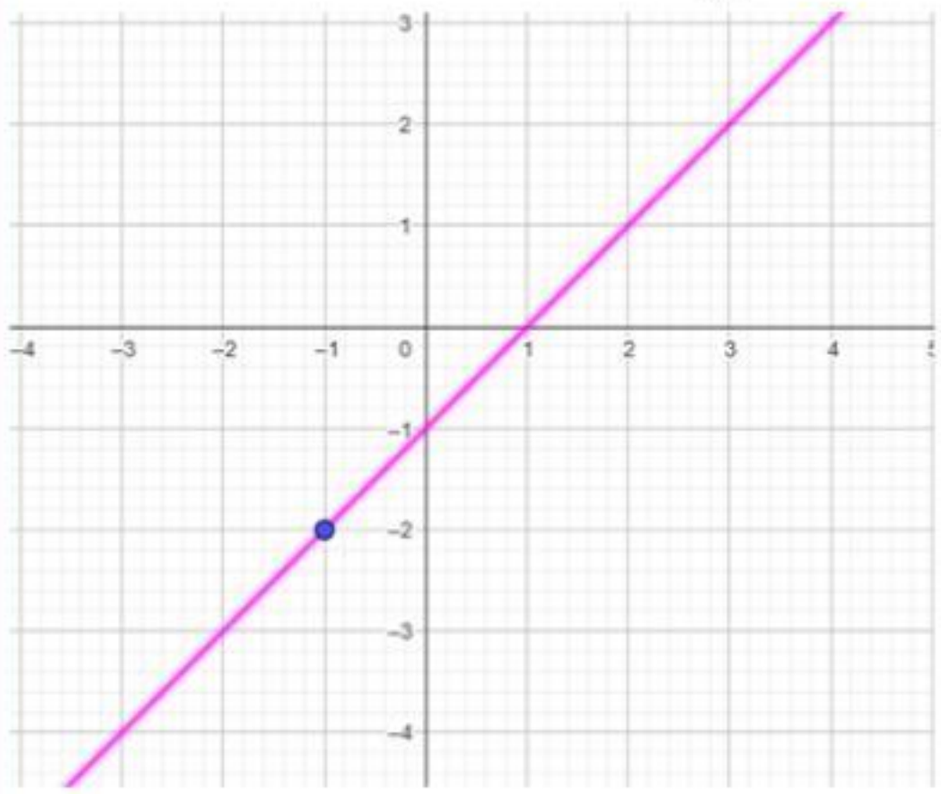
Evaluamos la función en x = -1	$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 1}{-1+1}$ $f(-1) = \frac{1-1}{-1+1}$ $f(-1) = \frac{0}{0}$ ∴ la función es indeterminada en $f(-1)$
Analizamos el límite de la función en x = -1	$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{-1+1}$ $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{0}{0}$ ∴ el límite es indeterminado
Como la función y el límite no están definidos analizamos los límites laterales.	$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-1}{x+1}$ $\lim_{x\to -1^+} \frac{1+x}{1-x}$ Entonces: $lím_{x\to a^-} f(x) = lím_{x\to a^+} f(x)$ $L_I = L_D$

x	$f(x)$
-0.9	-1.9
-0.99	-1.99
-0.999	-1.999
-0.9999	-1.9999
-0.99999	-1.99999

El Límite tiende a -2

x	$f(x)$
-1.1	-21.0
-1.01	-201.0
-1.001	-2001.0
-1.0001	-20001.0
-1.00001	-200001.0

El Límite tiende a -2

Conclusión	- La función no está definida $\nexists f(-1)$ - El límite existe $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$
Gráfica de la función	**Figura 19.** *Gráfica de la función* $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$  ***Nota.*** Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [Gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$]
Tipo de discontinuidad:	**Evitable**

2. Determina el tipo de discontinuidad que presenta la función en $x = 1$.

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{1-x} \; si \; x \neq 1 \\ 0 \; si \; x = 1\end{cases}$

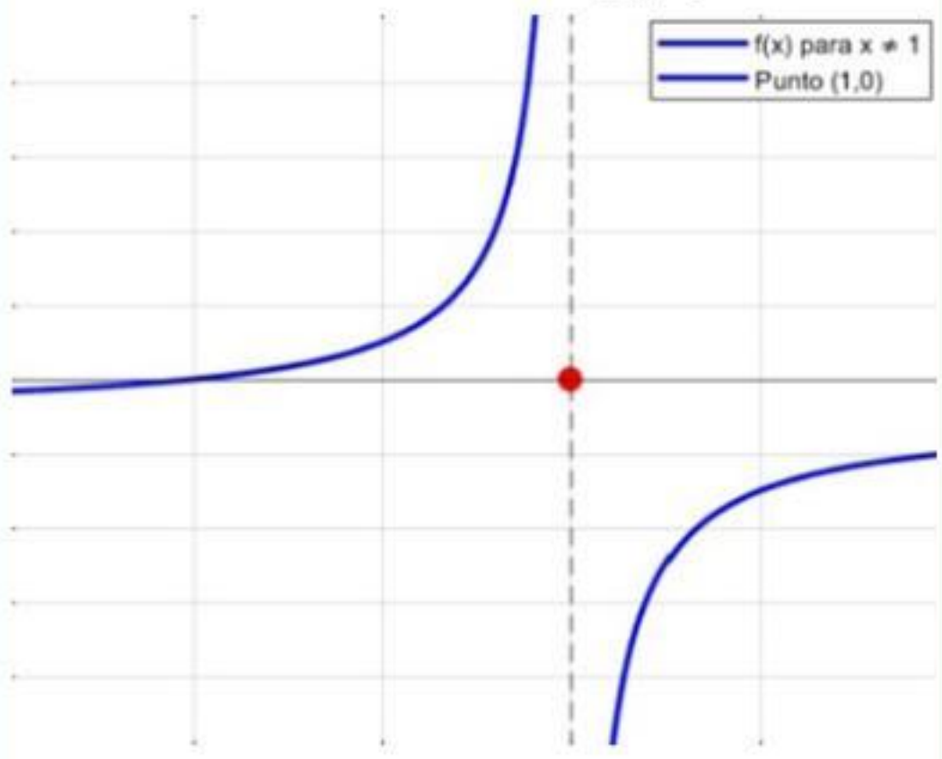
Evaluamos la función en $x = 1$	$f(1)=\frac{1+1}{1-1}$ $f(1)=\frac{2}{0}$ ∴ la función es indeterminada en $f(1)$
Analizamos el límite de la función en $x = 1$	$\lim_{x\to -1} \frac{1+x}{1-x}=\frac{1+1}{1-1}$ $=\frac{2}{0}$ ∴ el límite es indeterminado

<table>
<tr>
<td>Como la función y el límite no están definidos analizamos los límites laterales</td>
<td>
$\lim_{x\to 1^-} \frac{1+x}{1-x}$
<table>
<tr><th>x</th><th>f (x)</th></tr>
<tr><td>0.9</td><td>19.0</td></tr>
<tr><td>0.99</td><td>199.0</td></tr>
<tr><td>0.999</td><td>1999.0</td></tr>
<tr><td>0.9999</td><td>19999.0</td></tr>
<tr><td>0.99999</td><td>199999.0</td></tr>
</table>
El Límite tiende a ∞

$\lim_{x\to 1^+} \frac{1+x}{1-x}$
<table>
<tr><th>x</th><th>f (x)</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>-21.0</td></tr>
<tr><td>1.01</td><td>-201.0</td></tr>
<tr><td>1.001</td><td>-2001.0</td></tr>
<tr><td>1.0001</td><td>-20001.0</td></tr>
<tr><td>1.00001</td><td>-200001.0</td></tr>
</table>
El Límite tiende a _∞

Los limites laterales no son iguales.

$L_I \neq L_D$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Conclusión</td>
<td>Los límites laterales $L_I = \infty$ y $L_D = -\infty$ por lo que en x =1 existe una asintótica vertical.</td>
</tr>
<tr>
<td>Gráfica de la función</td>
<td>
Figura 20.
Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \; si \; x \neq 1 \\ 0 \; si \; x = 1 \end{cases}$



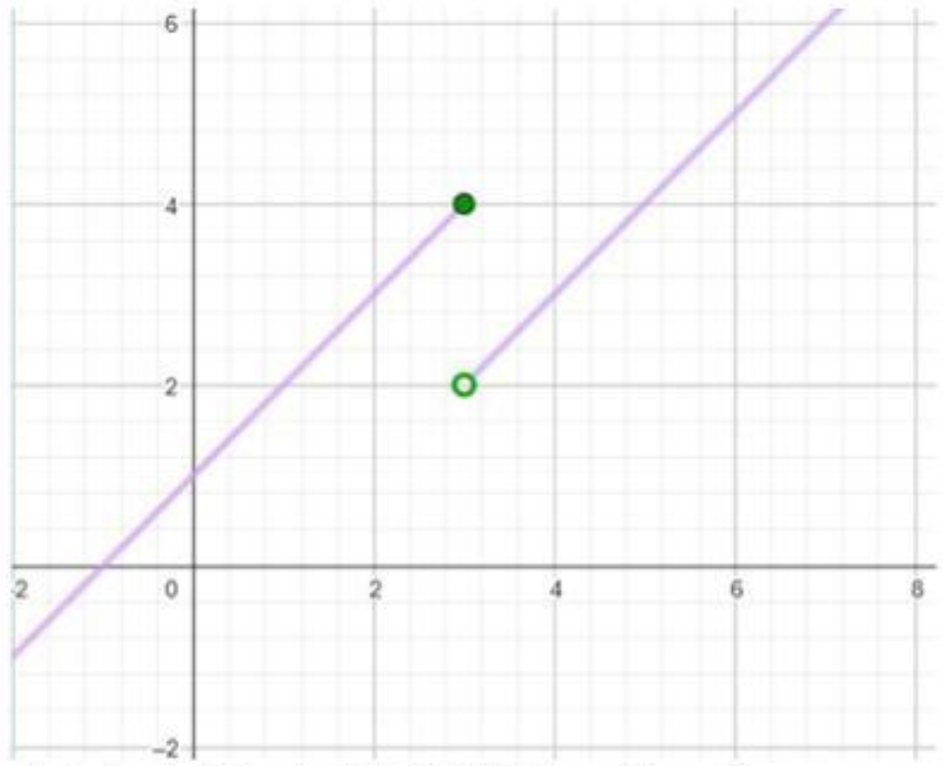
Nota. Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \; si \; x \neq 1 \\ 0 \; si \; x = 1 \end{cases}$]
</td>
</tr>
<tr>
<td>Tipo de discontinuidad:</td>
<td>Asintótica</td>
</tr>
</table>

3. Determina el tipo de discontinuidad que presenta la función en $x = 3$.

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 \; si \; x \leq 3 \\ x-1 \; si \; x > 3 \end{cases}$

Evaluamos la función $f(x) = x + 1$ en $x = 3$.	$f(x) = x + 1$ $f(3) = 3 + 1$ $f(3) = 3 + 1$ ∴ la función está definida en $f(3)$
Analiza los límites laterales en la función en $x = 3$	$\lim_{x \to 3^-} x + 1$ x | $f(x)$ 2.9 | 3.9 2.99 | 3.99 2.999 | 3.999 2.9999 | 3.9999 2.99999 | 3.99999 El límite tiende a 4 $\lim_{x \to 3^+} x - 1$ x | $f(x)$ 3.1 | 2.1 3.01 | 2.01 3.001 | 2.001 3.0001 | 2.0001 3.00001 | 2.00001 El límite tiende a 2
Clasificamos la discontinuidad	Los limites laterales existen, pero no son iguales. $L_I \neq L_D$ La función presenta una discontinuidad de salto

Figura 21.
Gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ si } x \leq 3 \\ x-1 \text{ si } x>3 \end{cases}$



Nota. Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [Gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ si } x \leq 3 \\ x-1 \text{ si } x>3 \end{cases}$]

Tipo de discontinuidad:	**De salto**



Actividad 8.
Tipos de discontinuidad

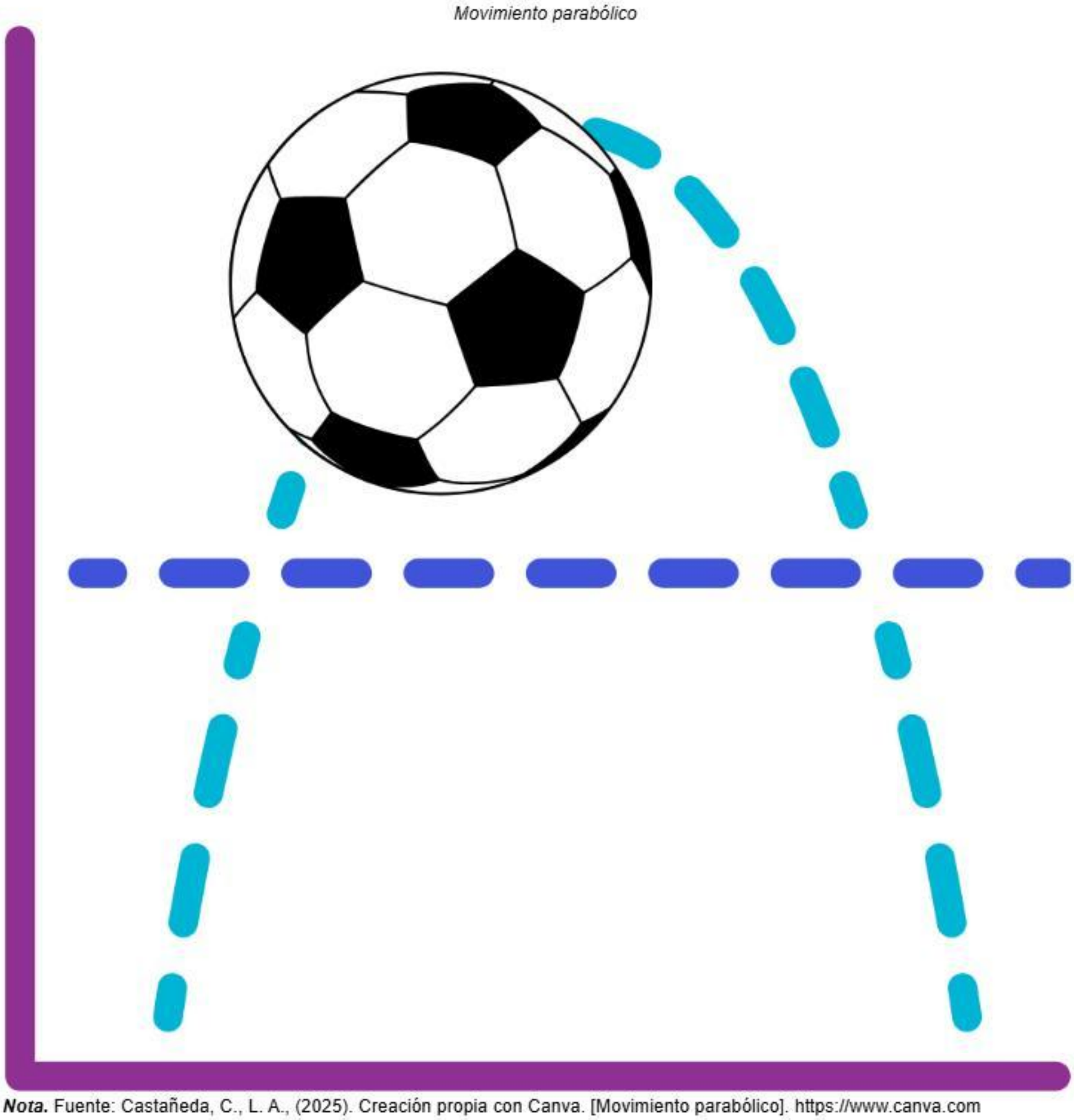
Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



2.4.2 Ecuación cuadrática: resolución por factorización y por fórmula general

En alguna ocasión, sin darte cuenta has realizado movimientos parabólicos: dar un salto hacia enfrente o hacia atrás, así como el lanzamiento de un balón, estos son más comunes de lo que crees.

Figura 23.
Movimiento parabólico



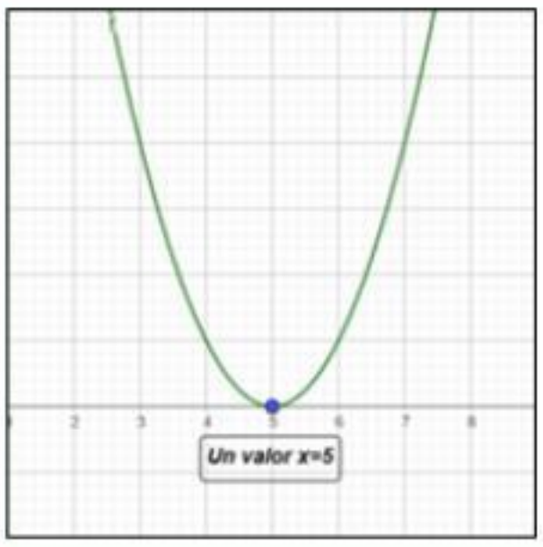
Nota. Fuente: Castañeda, C., L. A., (2025). Creación propia con Canva. [Movimiento parabólico]. https://www.canva.com

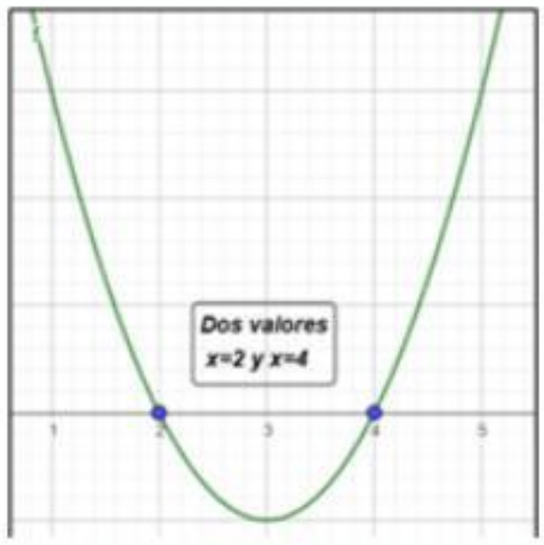
Este tipo de movimiento es representado gráficamente por medio de una parábola y analíticamente mediante una función cuadrática.

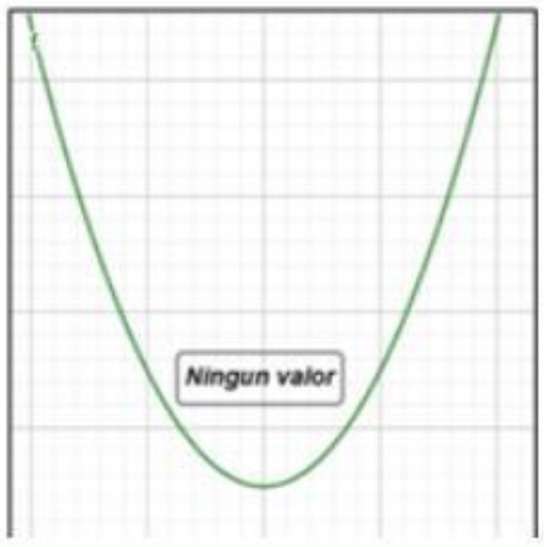
Es una parábola vertical que abre hacia arriba o hacia abajo que puede tocar en uno, dos o ningún valor al eje *x*, mediante el trazo podemos determinar esos puntos; sin embargo, nos enfocaremos a obtener estos mediante la solución de la ecuación cuadrática asociada.

Tabla 5.
Raíces de una ecuación cuadrática

Ecuación de segundo grado:	$ax^2 + bx + c = 0$







Nota. Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra [Raíces de una ecuación cuadrática].

Para efectos de este curso veremos los métodos de factorización y el uso de la fórmula general como herramientas fundamentales para la resolución de ecuaciones cuadráticas. Estos métodos permiten simplificar ecuaciones cuadráticas y encontrar las soluciones.

a. Factorización: Consiste en convertir la ecuación cuadrática en un producto de dos o más factores más simples, por ejemplo, para la expresión $x^2 - 3x = 0$ el término común es x por lo que la factorización es $x(x - 3) = 0$ y aquí despejar x de cada factor. Veamos los siguientes casos:

Factorización de la forma $x^2 + bx + c = 0$	
1. El trinomio se descompone en dos factores (binomios) cuyo primer término es la raíz cuadrada del primer término del trinomio.	$x^2 + 5x + 6 = 0$ $(x \quad)(x \quad) = 0$
2. Se buscan dos números cuya suma sea el valor del segundo término y cuyo producto sea el valor de tercer término, serán los segundos términos de los binomios.	$3 + 2 = 5$ $(3)(2) = 6$ $(x + 3)(x + 2) = 0$
3. Despejamos la incógnita en cada factor.	$x + 3 = 0$; $x = -3$ $x + 2 = 0$; $x = -2$

1.1.1 Personajes históricos y sus aportaciones asociadas al desarrollo del cálculo diferencial

Las contribuciones de los matemáticos griegos sentaron base para el posterior desarrollo del cálculo y la teoría de cuadraturas en la matemática actual, así como el concepto de límites y sumas infinitas, estos fueron esenciales para la conceptualización del cálculo diferencial y así pudieran retomarlo futuros matemáticos.

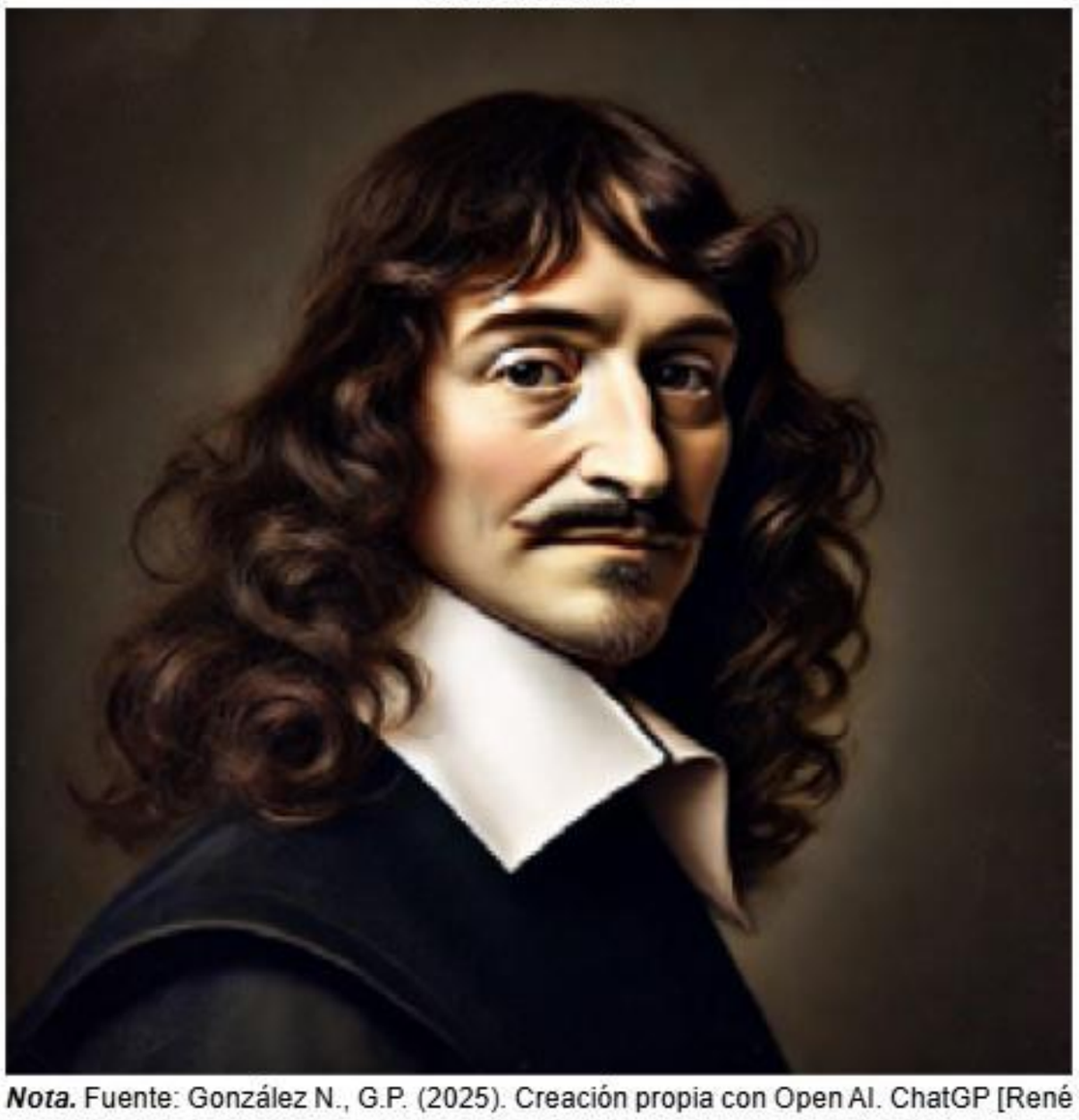
El siglo XVII fue uno de los siglos más importantes para la historia de las matemáticas. En este hubo aportaciones muy importantes para el cálculo iniciando desde el concepto y análisis de curvas y tangentes. Entre los matemáticos más importantes podemos considerar a Gottfried Whilhelm Leibniniz, Isaac Newton y René Descartes.

René Descartes

Filosofo matemático y científico francés que desempeñó un papel fundamental en la geometría analítica, ya que introdujo el sistema de coordenadas, permitiendo representar puntos como parejas ordenadas.

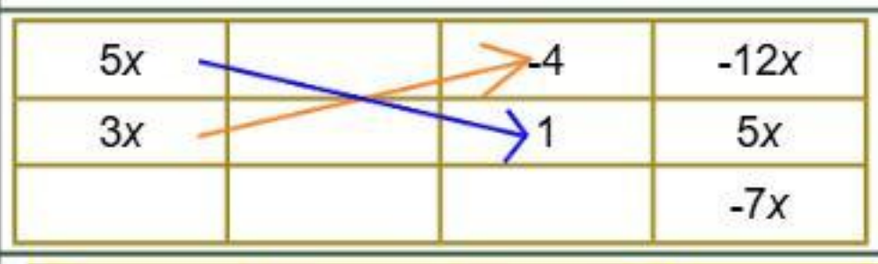
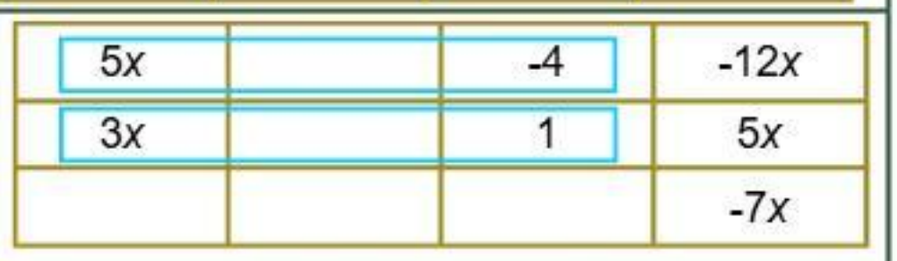
Su aportación más importante respecto a la descripción de curvas fue la habilidad de expresar ecuaciones algebraicas para representar formas geométricas (círculos, elipses y otras curvas). También le debemos el concepto de tangente de una curva en un punto dado (calcular la pendiente de una recta que toca a una curva en ese punto y se aproxima a ella).

Figura 1.
René Descartes



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025). Creación propia con Open AI. ChatGP [René Descartes] https://files.oaiusercontent.com/file-

Factorización de la forma $x^2 + bx + c = 0$	
Paso 1.	$x^2 - 2x - 15 = 0$ $(x \quad)(x \quad) = 0$
Paso 2.	$-5 + 3 = -2$ $(-5)(3) = -15$ $(x - 5)(x + 3) = 0$
Paso 3.	$x - 5 = 0$; $x + 3 = 0$ $x = 5$; $x = -3$

Factorización de la forma $ax^2 + bx + c = 0$	
1. El trinomio se descompone en dos factores (binomios).	$15x^2 - 7x - 4 = 0$
2.Se descompone el coeficiente $15x^2$ y el término independiente -4 en dos valores de tal manera que al realizar la multiplicación cruzada la suma sea el término central.	
3. Los binomios que factorizan el polinomio se escriben por fila.	 $(5x - 4)(3x + 1) = 0$
4. Despejamos la incógnita en cada factor.	$5x - 4 = 0$; $3x + 1 = 0$ $5x = 4$; $x = -1$ $x = \frac{4}{5}$; $x = \frac{-1}{3}$

<table>
<tr><td colspan="2">Factorización de la forma $ax^2 + bx + c = 0$</td></tr>
<tr><td>Paso 1.</td><td>$4x^2 - 12x + 9 = 0$</td></tr>
<tr><td>Paso 2.</td><td><table><tr><td>$2x$</td><td></td><td>-3</td><td>$-6x$</td></tr><tr><td>$2x$</td><td></td><td>-3</td><td>$-6x$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Paso 3.</td><td><table><tr><td>$2x$</td><td></td><td>-3</td><td>$-6x$</td></tr><tr><td>$2x$</td><td></td><td>-3</td><td>$-6x$</td></tr></table>
$(2x - 3)(2x - 3) = 0$</td></tr>
<tr><td>Paso 4.</td><td><table><tr><td>$2x - 3 = 0$
$2x = 3$
$x_1 = \frac{3}{2}$</td><td>$2x - 3 = 0$
$2x = 3$
$x_2 = \frac{3}{2}$</td></tr></table></td></tr>
</table>

b. Fórmula general: Se aplica cuando una ecuación cuadrática no se puede factorizar fácilmente usando métodos simples, la cual aplica con cualquier ecuación de segundo grado. Está representada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mediante los siguientes ejemplos veamos su aplicación:

Solución de una ecuación cuadrática por fórmula general $ax^2 + bx + c = 0$	
Paso 1. Identificamos los valores correspondientes de *a*, *b* y *c*.	$x^2 - 5 + 6 = 0$ $a = 1$ | $b = -5$ | $c = 6$
Paso 2. Sustituimos *a*, *b* y *c* por valores entre paréntesis.	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(6)}}{2(1)}$
Paso 3. Multiplicamos signos y valores que estén juntos en los paréntesis	$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2(1)}$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$
Paso 4. Obtenemos raíz cuadrada del número indicado	$x = \frac{5 \pm 1}{2}$
Paso 5. Los signos ± nos indican que vamos a encontrar dos valores para *x*	$x_1 = \frac{5+1}{2}$ $x_1 = \frac{6}{2}$ $x_1 = 3$ | $x_2 = \frac{5-1}{2}$ $x_2 = \frac{4}{2}$ $x_2 = 2$ **Nota:** Factoriza la ecuación para comprobar el resultado.

Solución de una ecuación cuadrática por fórmula general $ax^2 + bx + c = 0$

Paso 1.

$3x^2 - 11x + 6 = 0$

$a = 3$	$b = -11$	$c = 6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(3)(6)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{6}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{6}$$

$$x = \frac{11 \pm 7}{6}$$

$x_1 = \frac{11 + 7}{6}$	$x_2 = \frac{11 - 7}{6}$
$x_1 = \frac{18}{6}$	$x_2 = \frac{4}{6}$
$x_1 = 3$	$x_2 = \frac{2}{3}$

Solución de una ecuación cuadrática por fórmula general $ax^2 + bx + c = 0$

Paso 1.

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$a = 1$	$b = -3$	$c = -10$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{2}$$

$x_1 = \frac{3 + 7}{2}$	$x_2 = \frac{3 - 7}{2}$
$x_1 = \frac{10}{2}$	$x_2 = \frac{-4}{2}$
$x_1 = 5$	$x_2 = -2$



Actividad 9.
Ecuación cuadrática: resolución por factorización y por fórmula general

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 9.
Ecuación cuadrática: resolución por factorización y por fórmula general

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



2.4.3 Puntos de discontinuidad en funciones algebraicas racionales

Una función algebraica racional es el cociente de polinomios en donde el grado del polinomio del denominador es por lo menos 1.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

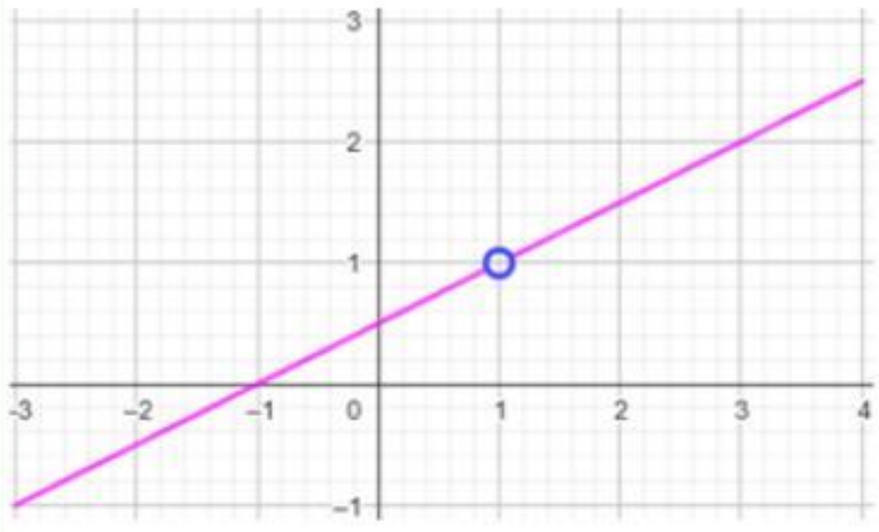
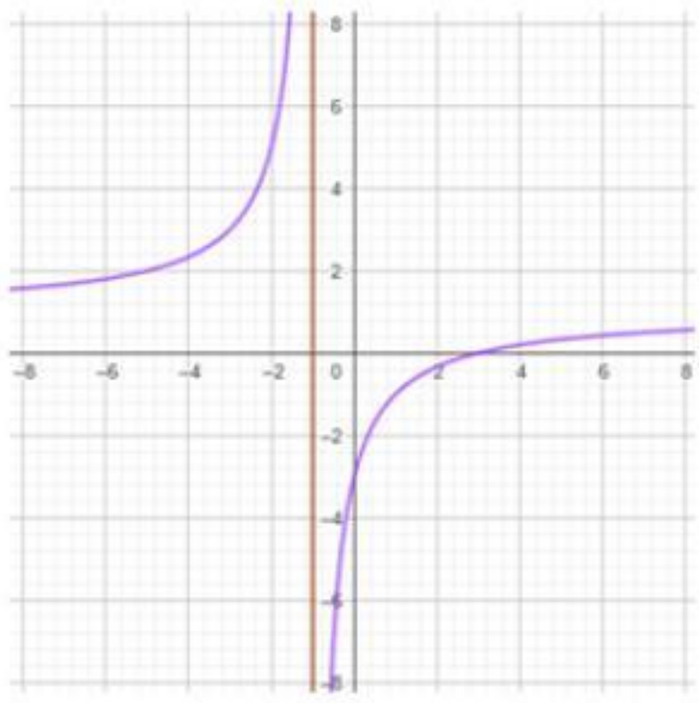
Algunos ejemplos de funciones racionales son:

$f(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{x + 1}$	$f(x) = \frac{x}{x^3 - 4}$
$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$	$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 5x - 8}$

En este tipo de funciones los puntos de discontinuidad ocurren cuando el denominador se anula, es decir: $Q(x) = 0$. Los tipos de discontinuidades principales son:

Tabla 6.

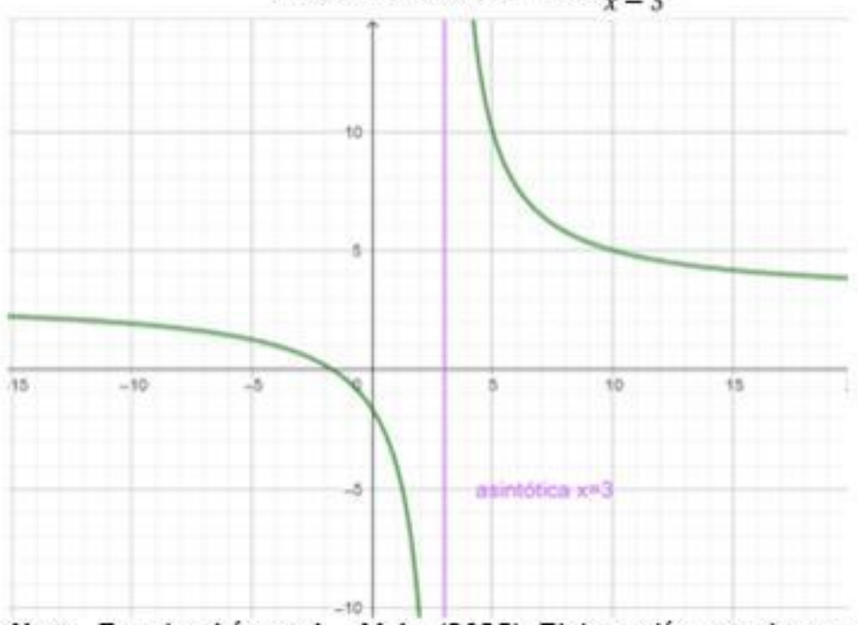
Tipos de discontinuidad en funciones algebraicas racionales

1. Discontinuidad evitable o removible	2. Discontinuidad infinita o asintótica
- Ocurre cuando el factor que anula el denominador también anula el numerador $\frac{0}{0}$. - La discontinuidad se puede corregir simplificando la función. - La gráfica muestra un hueco en ese punto. - El límite existe $lím_{x \to a} f(x) = L$ 	-Ocurre cuando el factor que anula el denominador no se cancela con el numerador $\frac{a}{0}$ - La gráfica muestra una asíntota vertical en ese punto. - Los limites laterales tienden a infinito $L_I = lím_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ $L_D = lím_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ 

Nota. Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [Tipos de discontinuidad en funciones algebraicas racionales].

Ejemplo 1. Determina los puntos donde la función no es continua y el tipo de discontinuidad que presenta la función $f(x) = \frac{3x+5}{x-3}$; si es removible, corrige la discontinuidad; si es infinita, obtén la ecuación de las asíntotas verticales. Traza la gráfica.

1. Igualamos a cero el denominador $Q(x) = 0$.	$x - 3 = 0$
2. Resolvemos la ecuación para obtener el valor de x.	$x - 3 = 0$ $x = 3$
3. Sustituimos $x = 3$ en $f(x)$	$f(x) = \frac{3x+5}{x-3}$ $f(3) = \frac{3(3)+5}{3-3}$ $f(3) = \frac{14}{0}$
4. Calculamos el límite de la función en $x = 3$.	$\lim_{x\to 3} \frac{3x+5}{x-3} = \frac{3(3)+5}{3-3}$ $= \frac{14}{0}$
5. Desarrollamos lo limites laterales	$\lim_{x\to 3^-} \frac{3x+5}{x-3}$ x | $f(x)$ 2.9 | -137 2.99 | -1397 2.999 | -13997 2.9999 | -139997 2.99999 | -1399997 El límite tiende a $-\infty$ $\lim_{x\to -3^+} \frac{3x+5}{x-3}$ x | $f(x)$ 3.1 | 143 3.01 | 1403 3.001 | 14003 3.0001 | 140003 3.00001 | 1400003 El límite tiende a ∞

6. Gráfica	**Figura 24.** *Gráfica de la función f(x)* $\frac{3x+5}{x-3}$  ***Nota.*** Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [*Gráfica de la función f (x) =* $\frac{3x+5}{x-3}$].
La función es discontinua en *x* = 3	
Tipo de discontinuidad: infinita	**Asíntota:** ***x* = 3**

Ejemplo 2. Determina los puntos donde la función no es continua y el tipo de discontinuidad que presenta la función $f(x) = \frac{x+2}{x^2+5x+6}$; si es removible, elimina la discontinuidad; si es infinita, obtén la ecuación de las asíntotas verticales. Traza la gráfica.

Igualamos a cero el denominador $Q(x) = 0$.	$x^2 + 5x + 6 = 0$
Resolvemos la ecuación para obtener el valor de *x*.	$3 + 2 = 5$ $(3)(2) = 6$ $(x + 3)(x + 2) = 0$ $x + 3 = 0$ → $x = -3$ $x + 2 = 0$ → $x = -2$
Como obtenemos dos valores de *x*, se debe realizar el análisis para cada uno. Sustituimos $x = -2$ en $f(x)$	$f(x) = \frac{x+2}{x^2+5x+6}$ $f(-2) = \frac{-2+2}{(-2)^2+5(-2)+6}$

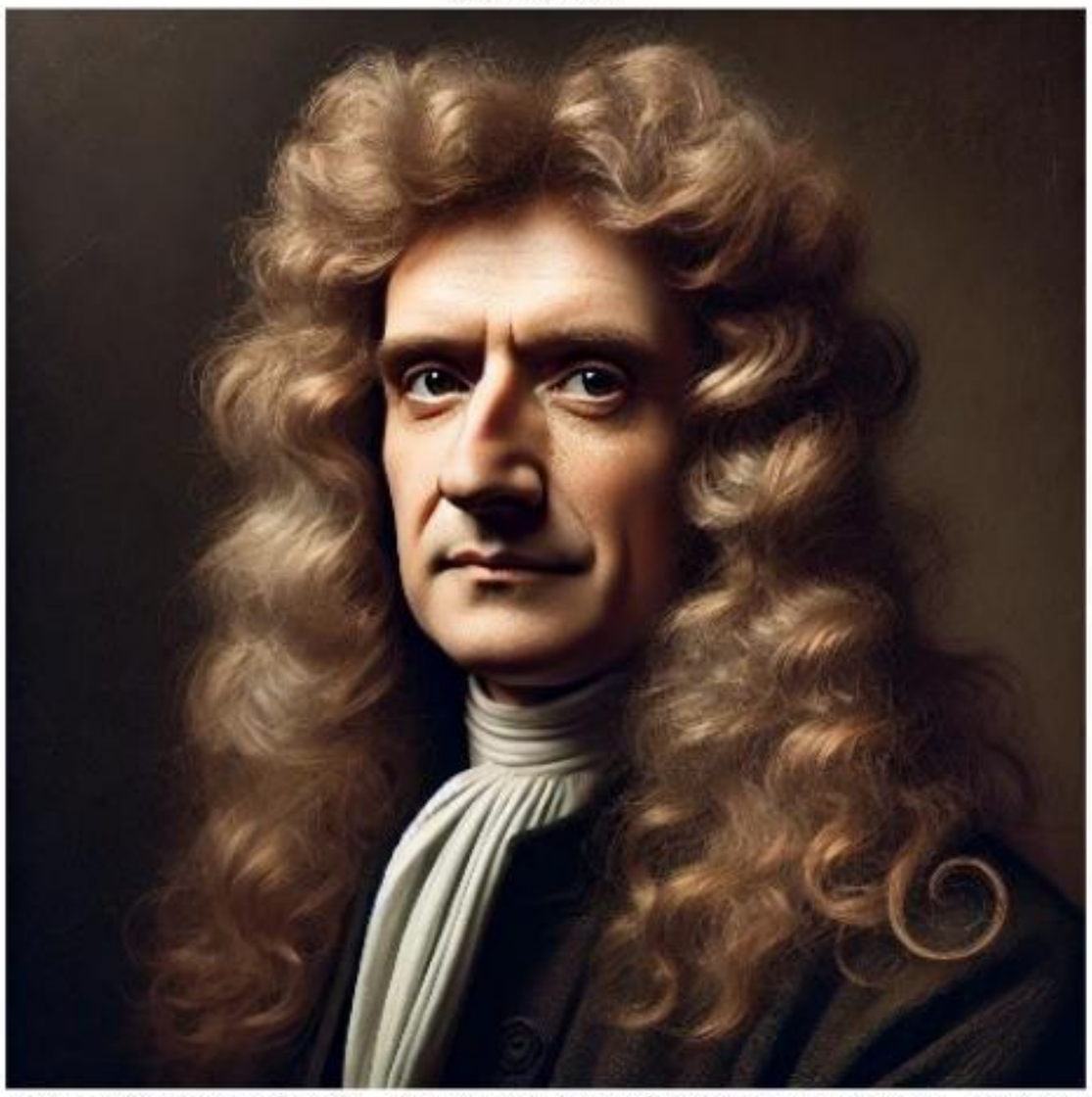
	$f(-2) = \frac{-2+2}{4-10+6}$ $f(-2) = \frac{0}{0}$ Por lo tanto, es indeterminado.
Sustituimos x = -3 en $f(x)$	$f(x) = \frac{x+2}{x^2+5x+6}$ $f(-3) = \frac{-3+2}{(-3)^2+5(-3)+6}$ $f(-3) = \frac{-1}{9-15+6}$ $f(-3) = \frac{-1}{0}$ ∴ la función no está definida
El resultado de la función f (-2) = $\frac{0}{0}$ es indeterminado, por lo cual resulta necesario factorizar para obtener el valor del límite. Calculamos el límite de la función en x = -2.	$\lim_{x\to-2} \frac{x+2}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to-2} \frac{x+2}{(x+3)(x+2)}$ $= \lim_{x\to-2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{-2+3}$ $= \frac{1}{1} = 1$ ∴ el límite existe
Analizamos el tipo de discontinuidad: - La función es indeterminada en x = -2, f (-2) = $\frac{0}{0}$ - El límite existe La función $f(x)$ presenta una **discontinuidad evitable** en el punto (-2, 1)	
El resultado de la función f (-3) = $\frac{-1}{0}$ es indeterminado, por lo cual resulta necesario factorizar para obtener el valor del límite. Calculamos el límite de la función en x = -3.	$\lim_{x\to-3} \frac{x+2}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to-3} \frac{x+2}{(x+3)(x+2)}$ $= \lim_{x\to-3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{-3+3}$ $= \frac{1}{0}$ ∴ el límite no está definido, por lo que procedemos a obtener los limites laterales.

Isaac Newton

Físico y astrónomo inglés, su mayor contribución fue la comprensión de las curvas y la tangente. Desarrolló el método de diferencias, forma inicial del cálculo, el cual servía para aproximar las tangentes a una curva, trabajando con diferencias finitas, para estimar la pendiente de una tangente en un punto.

Otro aporte muy valioso fue la creación del concepto fundamental de la derivada, herramienta más importante del cálculo. Enfocó sus esfuerzos en la física al hacer uso del cálculo para describir el movimiento y la gravitación.

Figura 2.
Isaac Newton



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025). Creación propia con Open AI. ChatGPT [Isaac Newton] https://files.oaiusercontent.com/file

Obtenemos los límites laterales

$\lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3}$

x	f (x)
-2.9	10
-2.99	100
-2.999	1000
-2.9999	10000
-2.99999	100000

El límite tiende a ∞

$L_I = \infty$

$\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3}$

x	f (x)
-3.1	-10
-3.01	-100
-3.001	-1000
-3.0001	-10000
-3.00001	-100000

El límite tiende a _∞

$L_D = -\infty$

Analizamos el tipo de discontinuidad:

-La función no está definida en x = -3, $f(-3) = \frac{-1}{0}$

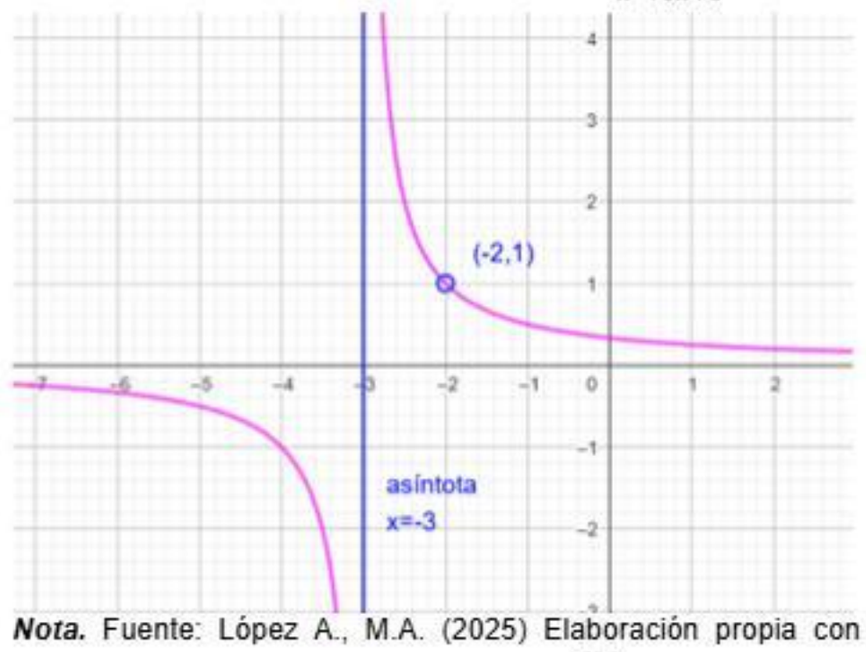
-Los limites laterales $L_I = \infty, L_D = -\infty$

La función $f(x)$ presenta una **discontinuidad infinita**

Tipo de discontinuidad: infinita

La gráfica tiene una asíntota vertical en

x = -3

Gráfica	**Figura 25.** *Gráfica de la función f (x)* $\frac{x+2}{x^2+5x+6}$  ***Nota.*** Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [*Gráfica de la función f (x)* = $\frac{x+2}{x^2+5x+6}$].
La función es discontinua en *x* = -2 y *x* = -3	
Tipo de discontinuidad:	***x* = -2 evitable** ***x* = -3 infinita**

Ejemplo 3. Determina los puntos donde la función no es continua y el tipo de discontinuidad que presenta la función $f(x) = \frac{x^3-7x^2+10x}{x^3-9x^2+20x}$; si es removible, elimina la discontinuidad; si es infinita, obtén la ecuación de las asíntotas verticales. Traza la gráfica

Igualamos a cero el denominador Q (*x*) = 0.	$x^3 - 9x^2 + 20x = 0$
Resolvemos la ecuación para obtener el valor de *x*.	$x^3 \_ 9x^2 + 20x = 0$ $x\ (x^2 \_ 9x + 20) = 0$ $\_5\ \_4 = -9$ $(-5)\ (-4) = 20$ **$x\ (x - 5)\ (x - 4) = 0$** *x = 0* | *x - 5 = 0, x = 5* | *x – 4 = 0, x = 4*

Como obtenemos dos valores de x, se debe realizar el análisis para cada uno. Sustituimos $x = 0$ en $f(x)$	$$f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{x^3 - 9x^2 + 20x}$$ $$f(0) = \frac{(0)^3 - 7(0)^2 + 10(0)}{(0)^3 - 9(0)^2 + 20(0)}$$ $$f(0) = \frac{0}{0}$$ Por lo tanto, es indeterminado
Sustituimos $x = 4$ en $f(x)$	$$f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{x^3 - 9x^2 + 20x}$$ $$f(4) = \frac{(4)^3 - 7(4)^2 + 10(4)}{(4)^3 - 9(4)^2 + 20(4)}$$ $$f(4) = \frac{64 - 112 + 40}{64 - 144 + 80}$$ $$f(4) = \frac{-8}{0}$$ Por lo tanto, la función no está definida.
Sustituimos $x = 5$ en $f(x)$	$$f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{x^3 - 9x^2 + 20x}$$ $$f(5) = \frac{(5)^3 - 7(5)^2 + 10(5)}{(5)^3 - 9(5)^2 + 20(5)}$$ $$f(5) = \frac{125 - 175 + 50}{125 - 225 + 100}$$ $$f(5) = \frac{0}{0}$$ Por lo tanto, es indeterminado
Factorizamos el numerador para simplificar la función y analizar el límite alrededor de los valores de x	$x^3 - 7x^2 + 10x$ $x(x^2 - 7x + 10)$ -5 - 2 = -7 (-5) (-2) = 10 **$x(x - 5)(x - 2)$**

El resultado de la función $f(0) = \frac{0}{0}$ es indeterminado, por lo cual resulta necesario factorizar para obtener el valor del límite.

Calculamos el límite de la función en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{x^3 - 9x^2 + 20x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-5)(x-2)}{x(\boldsymbol{x-5})(\boldsymbol{x-4})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x-2}{x-4} = \frac{0-2}{0-4}$$

$$= \frac{-2}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

∴ el límite existe

Analizamos el tipo de discontinuidad:

- La función es indeterminada en $x = 0$, $f(0) = \frac{0}{0}$

- El límite existe $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{x^3 - 9x^2 + 20x} = \frac{1}{2}$

La función f (*x*) presenta una discontinuidad evitable en el punto $(0, \frac{1}{2})$.

El resultado de la función $f(0) = \frac{-8}{0}$ es indeterminado, por lo cual resulta necesario factorizar para obtener el valor del límite.

Calculamos el límite de la función en $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{x^3 - 9x^2 + 20x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-5)(x-2)}{x(\boldsymbol{x-5})(\boldsymbol{x-4})}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x-2}{x-4}$$

$$= \frac{4-2}{4-4}$$

$$= \frac{2}{0}$$

∴ el límite no está definido, por lo que procedemos a obtener los limites laterales.

Obtenemos los límites laterales

$\lim_{x \to 4^-} \frac{x-2}{x-4}$

x	*f (x)*
3.9	-19
3.99	-199
3.999	-1999
3.9999	-19999
3.99999	-199999

El límite tiende a $-\infty$

$L_I = -\infty$

$\lim_{x\to 4^+} \frac{x-2}{x-4}$

x	$f(x)$
4.1	21
4.01	201
4.001	2001
4.0001	20001
4.00001	200001

El límite tiende a ∞

$L_D = \infty$

Analizamos el tipo de discontinuidad:

- La función no está definida en $x = 4$, $f(4) = \frac{-8}{0}$

- Los limites laterales $L_I = -\infty, L_D = \infty$

La función $f(x)$ presenta una **discontinuidad infinita**

Tipo de discontinuidad: infinita

La gráfica tiene una asíntota vertical en **$x = 4$**

El resultado de la función $f(5) = \frac{0}{0}$ es indeterminado, por lo cual resulta necesario factorizar para obtener el valor del límite.

Calculamos el límite de la función en $x = 5$.

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3-7x^2+10x}{x^3-9x^2+20x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-5)(x-2)}{x(\boldsymbol{x-5})(\boldsymbol{x-4})}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{x-2}{x-4}$$

$$= \frac{5-2}{5-4}$$

$$= \frac{3}{1} = 3$$

∴ el límite existe

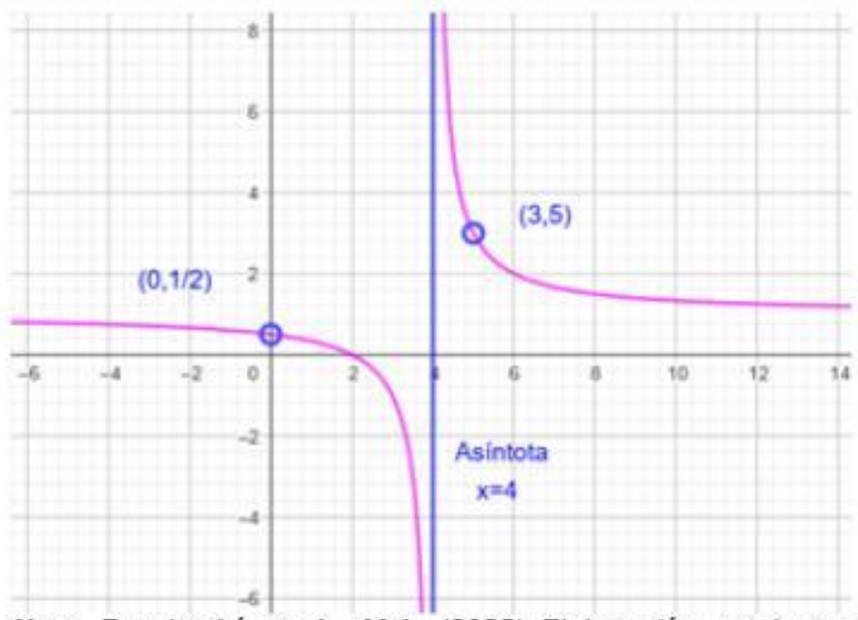
Analizamos el tipo de discontinuidad:

- La función no está definida en $x = 5$, $f(5) = \frac{0}{0}$

- El límite existe $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-7x^2+10x}{x^3-9x^2+20x} = 3$

La función $f(x)$ presenta una **discontinuidad infinita**

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en el punto (5,3).

Gráfica	**Figura 26.** *Gráfica de la función* $f(x)=\frac{x^3-7x^2+10x}{x^3-9x^2+20x}$  ***Nota.*** Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [*Gráfica de la función* $f(x)=\frac{x^3-7x^2+10x}{x^3-9x^2+20x}$].
Tipo de discontinuidad:	**x = 0 evitable** **x = 5 evitable** **x = 4 infinita**



Actividad 10. Puntos de discontinuidad en funciones algebraicas racionales

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



2.5 Continuidad de una función en un intervalo abierto y cerrado

La continuidad de una función en un intervalo describe el comportamiento de la función sin saltos o interrupciones Tenemos diferentes tipos de intervalos, el intervalo abierto que se representa con paréntesis (□) y el intervalo cerrado que se representa con corchetes [□] que son los que analizaremos.

Un intervalo abierto es un conjunto de números reales que comprende todos los valores entre dos extremos *a* y *b*, pero sin incluir dichos extremos. Se representa como (*a, b*). Un intervalo cerrado incluye también los extremos *a* y *b* Se representa como [*a, b*].

Veamos los casos de continuidad de una función para cada tipo de intervalo:

1. La función es continua en un intervalo abierto (a,b) si es continua en todos y cada uno de los puntos del intervalo.

$$\boldsymbol{lim_{x\to c} f(x) = f(c)}\ \textbf{para todo}\ \boldsymbol{c\epsilon\,(a,b)}$$

2. La función es continua en un intervalo cerrado [a,b] si es continua en todos y cada uno de los puntos del intervalo (a,b) y además si los límites laterales están definidos.

$$\boldsymbol{lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$$

$$\boldsymbol{lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)}$$

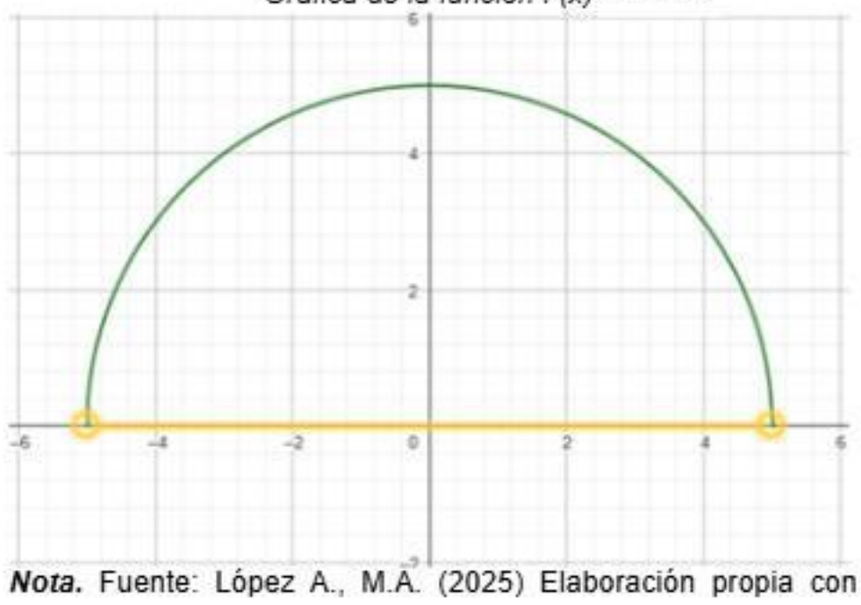
Ejemplo 1. Analiza la continuidad en el intervalo (-5,5) para la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Analizamos la continuidad en el intervalo abierto (-5,5), graficando la función.

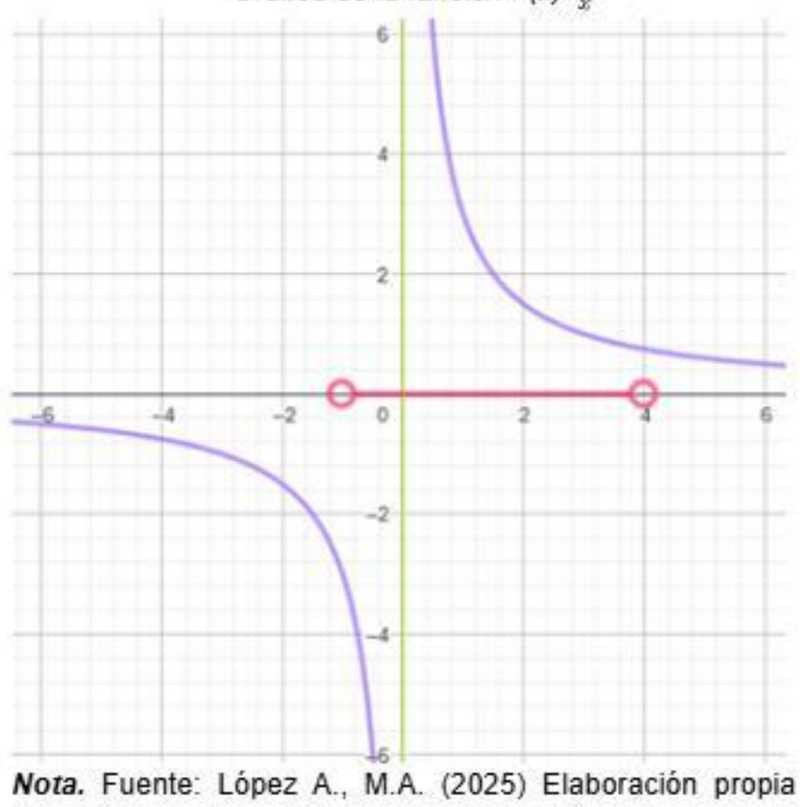
Tabulamos algunos puntos en el intervalo

x	*f (x)*
-5	0
-4	3
-3	4
-2	4.58
-1	4.89
0	5
1	4.89
2	4.58
3	4
4	3
5	0

$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ existe para todos los valores del intervalo

Gráfica de la función	**Figura 27.** *Gráfica de la función f (x)* $\sqrt{25-x^2}$  ***Nota.*** Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [*Gráfica de la función f (x)* = $\sqrt{25-x^2}$].
De acuerdo con la gráfica, la función no presenta puntos de discontinuidad en el intervalo (-5, 5)	

Ejemplo 2. ¿La función $f(x) = \frac{3}{x}$ es continua en el intervalo (-1, 4)?

Analizamos la continuidad en el intervalo abierto (-5, 5), graficando la función.	Tabulamos algunos puntos en el intervalo x | $f(x)$ -1 | -3 0 | ∄ 1 | 3 2 | 1.5 3 | 1 4 | 0.75
La función $f(x)$ no existe en $x = 0$, es discontinua tiene una asíntota vertical	
Gráfica de la función	**Figura 28.** *Gráfica de la función f (x)* $\frac{3}{x}$  ***Nota.*** Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [*Gráfica de la función f (x)* = $\frac{3}{x}$].
La función no es continua en el intervalo (-1, 4)	

Ejemplo 3. ¿La función $f(x) = 2x^2 - 3x$ es continua en el intervalo [-3,2]?

1. Analizamos la continuidad en el intervalo cerrado [-3,2]

Tabulamos algunos puntos en el intervalo

x	$f(x)$
-3	27
-2	14
-1	5
0	0
1	-1
2	2

Como es un intervalo cerrado analizamos los limites laterales.

$lim_{x\to -3^+} f(x) = 2x^2 - 3x$

x	$f(x)$
-3.1	28.52
-3.01	27.1502
-3.001	27.015002
-3.0001	27.0015
-3.00001	27.00015

$lim_{x\to -3^+} f(x) = 2x^2 - 3x$

x	$f(x)$
-2.9	25.52
-2.99	26.8502
-2.999	26.985002
-2.9999	26.9985
-2.99999	6

Por lo que el límite tiende a 27

$$lim_{x\to -3^+} f(x) = 27$$

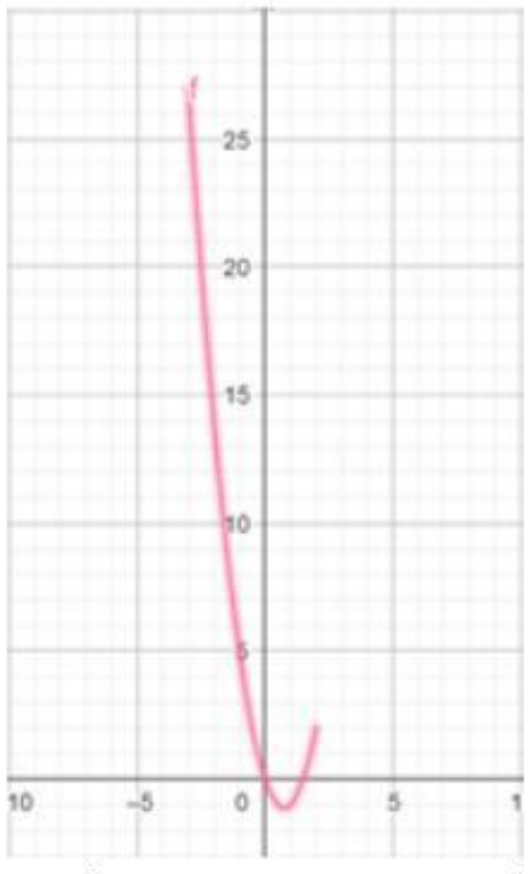
Por lo que el límite tiende a 27

$$lim_{x\to -3^+} f(x) = 27$$

$f(x)$ está definida en todo el intervalo y los límites laterales son igual $L_I = L_D$

Gráfica de la función

Figura 29.
Gráfica de la función f (x) = 2x² - 3x



Nota. Fuente: López A., M.A. (2025) Elaboración propia con Geogebra. [*Gráfica de la función f (x) = 2x² - 3x*].

∴ la función es continua en el intervalo [-3, 2]



Actividad 11. Continuidad de una función en un intervalo abierto y cerrado

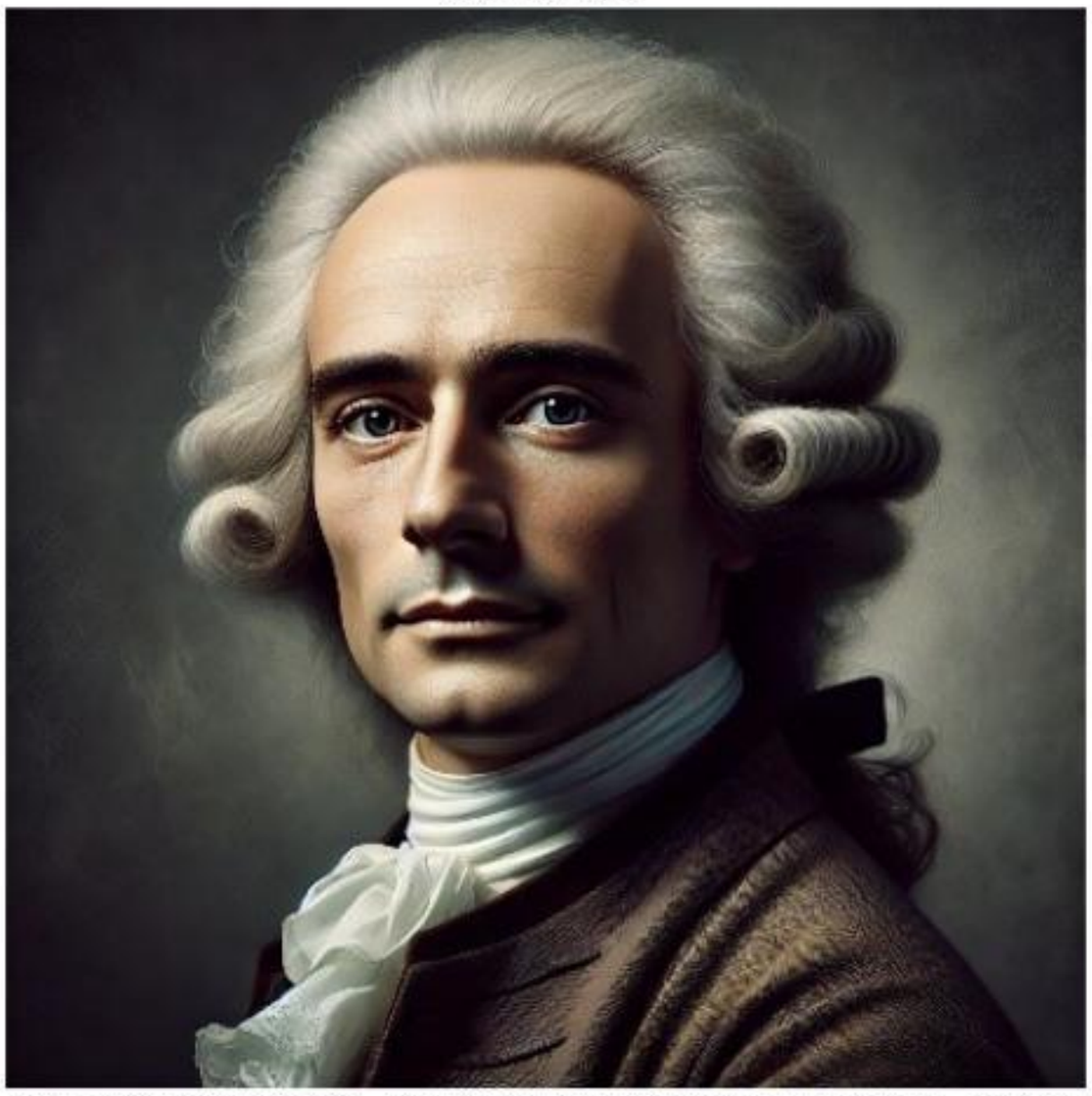
Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



Leonhard Euler

Introdujo la denotación de función que se utiliza actualmente $f(x)$; además, estudió las funciones exponenciales y logarítmicas a profundidad, así como las funciones exponenciales complejas.

Figura 3.
Leonhard Euler



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025). Creación propia con Open AI. ChatGPT [Leonhard Euler] https://files.oaiusercontent.com/file-

2.6 Problemas de aplicación

El uso de límites y continuidad es esencial para resolver problemas prácticos en áreas como la economía, física, ingeniería y biología. Mediante estos conceptos podemos predecir tendencias, optimizar procesos y comprender situaciones en variables de un modelo matemático. Veamos algunos ejemplos:

Caso 1. La población de una especie está dada por la función $P(t) = \frac{1500t^2+t}{t+5t^2}$, donde t representa el tiempo transcurrido en años. Calcula el límite cuando t para predecir el tamaño máximo poblacional.

Obteniendo el límite de la función	$lim_{t\to\infty}P(t) = lim_{t\to\infty}\frac{1500t^2+t}{t+5t^2}$ $lim_{t\to\infty}P(t) = lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1500t^2}{t^2}+\frac{t}{t^2}}{\frac{t}{t^2}+\frac{5t^2}{t^2}}$ $lim_{t\to\infty}P(t) = lim_{t\to\infty}\frac{1500+\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+5}$ Haciendo uso del siguiente teorema: $\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n} = 0\ para\ k\ \in \mathbb{R}\ y\ n \in \mathbb{N}$ $lim_{t\to\infty}P(t) = \frac{1500+0}{0+5}$ $lim_{t\to\infty}P(t) = \frac{1500}{5}$ $lim_{t\to\infty}P(t) = 300$
El tamaño máximo poblacional es de 300 individuos	

Caso 2. Una empresa produce artículos con un costo total expresado por la función $C(x) = 3x^2 - 15x + 100$, donde x representa la cantidad de artículos vendidos. Calcula el límite cuando la producción del costo promedio

Obteniendo el límite de la función	$lim_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} = lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-15x+100}{x}$ $lim_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} = lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x}-\frac{15x}{x}+\frac{100}{x}$ $lim_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} = lim_{x\to\infty}3x-15+\frac{100}{x}$ Haciendo uso del siguiente teorema:

	$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0\ para\ k\in\mathbb{R}\ y\ n\in\mathbf{N}$ $lim_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x}=3(\infty)-15+0$ $lim_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x}=\infty$
El costo promedio aumenta indefinidamente	

Caso 3. La velocidad del flujo de agua en una tubería está dada por la función: $v\,(t) = \begin{cases} 2t+5 \text{ si } t<3 \\ 6t+1 \text{ si } t\geq 3 \end{cases}$ donde t representa el tiempo en minutos. Se desea conocer si la función es continua en $t = 3$.

Para que una función sea continua deben cumplirse las siguientes condiciones:

a. Existe el límite de la función *f (x)* en *x* = a. *f* (a), esto es: $\lim_{x\to a} f(x) = L$

b. La función está definida en *x* = a, es decir, existe *f* (a), esto es: *f (a)* = *L*

c. Los dos valores anteriores coinciden, esto es: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Verificamos los criterios de continuidad de una función.

Sustituir $t = 3$ en la función $v\,(t)$	Utilizamos $v\,(t) = 6t + 1$ ya que la desigualdad incluye a $t = 3$ $v\,(t) = 6t+1$ $v\,(3) = 6\,(3) + 1$ $v\,(3) = 19$ La función está definida
Obtenemos los limites laterales	$lim_{t\to 3^-} v(t) = 2t + 5$ t | $v\,(t)$ 2.9 | -0.8 2.99 | -0.98 2.999 | -0.998 2.9999 | -0.9998 2.99999 | -0.99998 Por lo tanto L_I = -1 $lim_{t\to 3^-} v(t) = 6t + 1$ x | $f\,(t)$ 3.1 | 19.6 3.01 | 19.06 3.001 | 19.006

	3.0001 | 19.0006 3.00001 | 19.00006 Por lo tanto L_D = 19 Los límites laterales son distintos $L_I \neq L_D$
Conclusión:	La función está definida *v* (3) = 19 El límite no existe Por lo que la función no es continua, quiere decir que existe un cambio de forma brusca en la velocidad del flujo del agua



Actividad 12. Problemas de aplicación

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 13. Ejercicio autoevaluable

Instrucciones: para reforzar los temas vistos en este Módulo II se te pide realizar el siguiente ejercicio, para comenzar, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada MII Ejercicio Autoevaluable.

Resumen

En este módulo has aprendido más características de las funciones, sabes que si puedes sustituir a un valor de la variable independiente en una función obtendrás una imagen y que, cuando al hacer esta operación resulte una indeterminación, podrás aplicar las herramientas adquiridas para intentar encontrar ese valor cuando sea posible, todo esto con ayuda de los límites; ya sea aplicando la definición de límite, límites laterales o teoremas para el cálculo de límites. Descubriste también la existencia de la asíntota, que es característica de las funciones cuyas imágenes tienden al infinito.

Con estos conceptos te fue más fácil identificar el concepto continuidad, ya se había hablado de este de forma intuitiva en el módulo anterior, pero en esta ocasión, lo has podido estudiar desde un punto de vista analítico, descubriendo cómo los conceptos matemáticos describen muy bien el comportamiento de las funciones, y que a su vez, las funciones nos permiten explicar y comprender los fenómenos que nos rodean como el crecimiento de los seres humanos, el desplazamiento cuando caminamos hacia algún lugar o el realizado por los vehículos; hasta la armónica danza del sol y la luna en el firmamento que durante milenios maravilló a grandes científicos y pensadores, como puedes ver, el cálculo está plenamente inmerso en la física y la naturaleza.

El cálculo no se limita a tecnicismos matemáticos, por ejemplo, metafóricamente hablando podemos ser continuos o discontinuos cuando realizamos una actividad física o ejercicio, nosotros decidimos si tenemos disciplina y somos continuos o discontinuos, es decir, si la llevamos a cabo a veces si, a veces no, o si la interrumpimos. La misma situación aplica cuando estudias para alguna disciplina o para alguna asignatura como el cálculo, es decir, tú decides ser continuo en el aprendizaje, aplicando tus conocimientos para ser un estudiante de excelencia.

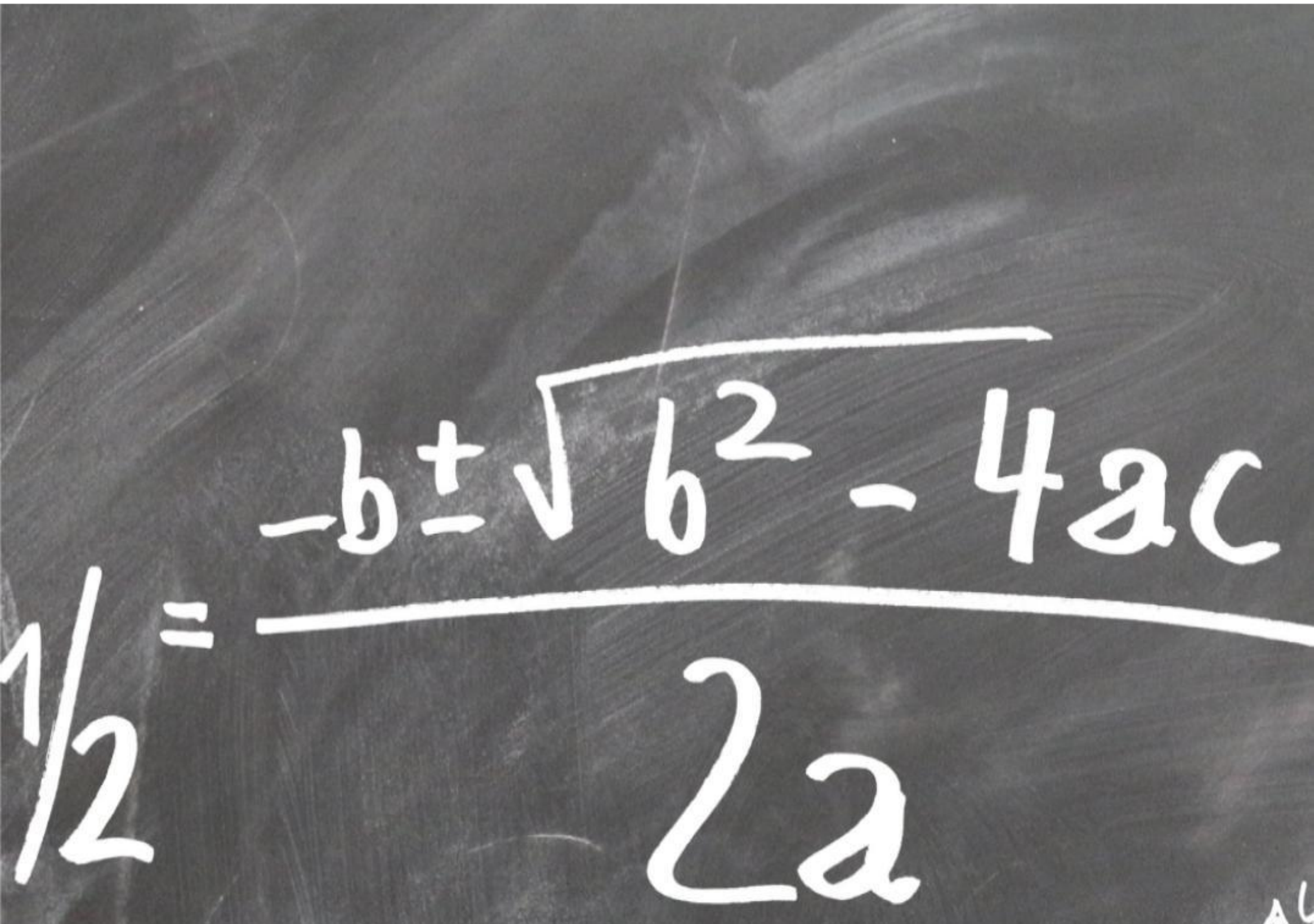


Glosario

- **Variable:** símbolo o letra que puede cambiar de valor.
- **Límite:** valor al que una función se aproxima conforme sus valores de entrada se acercan cada vez más a cierto número.
- **Límite lateral izquierdo:** valor al que se aproxima una función f (*x*) cuando nos aproximamos al valor de x por la parte izquierda.
- **Límite lateral derecho:** valor al que se aproxima una función *f* (*x*) cuando nos aproximamos al valor de x por la parte derecha.
- **Indeterminado:** operación cuyo resultado no está definido.
- **Infinito:** que no tiene ni puede tener fin.
- **Función a trozos:** función formada por varias reglas de correspondencia y gráficamente se generan varias secciones.
- **Intuitivo:** que se puede entender o aprender de modo rápido y evidente sin necesidad de razonar demasiado.
- **Función racional:** función fraccionaria, tanto el numerador como el denominador son polinomios.
- **Función irracional:** funciones que cuentan con un radical.
- **Radical:** expresión que contiene una raíz, puede ser cuadrada, cúbica, entre otras.
- **Teorema:** proposición demostrable como verdadera, mediante operaciones matemáticas y argumentos lógicos.
- **Continuidad:** no se despega el lápiz al momento de hacer la gráfica y a partir de aquí se puede evaluar en un punto o en un intervalo.
- **Punto:** ente fundamental que se utiliza para indicar una posición en el espacio.
- **Discontinuidad:** punto en el que una función presenta un cambio, puede ser un salto o un hueco.
- **Evitable:** tipo de discontinuidad en un punto en el que, el límite de la función no existe en ese punto, pero los límites laterales sí y con iguales, por lo tanto, el límite adquiere ese valor.
- **Intervalo:** conjunto de números reales comprendidos entre dos extremos.
- **Asíntota:** línea recta que se acerca indefinidamente a una curva, sin llegar nunca a encontrarla.
- **Factorizar:** proceso matemático en el que se descompone un número, un polinomio u otros entes matemáticos como producto de otros.
- **Ecuación:** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que hay al menos una incógnita cuyo valor se desconoce y se desea hallar.

Referencias

- Contreras, L., et al. (2015). Cálculo diferencial e integral. 3ª ed. 13ª reimpresión. UAEMEX
- Fernández, J. (s.f.) Límites laterales. FiSiCALAB. https://www.fisicalab.com/apartado/limites-laterales
- Hartman, G. et al. (s.f.). 1.2: Definición Épsilon-Delta de un límite. LibreTexts ESPANOL. https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Libro%3A_Calculo_(Apex)/01%3A_L%C3%ADmites/1.02%3A_Definici%C3%B3n_%C3%89psilon-Delta_de_un_l%C3%ADmite
- Ibáñez, P. (2023). Calculo Diferencial. CENGAGE
- Khan, S. (s.f.). Introducción a límites. Khan Academy. https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-limits-new/ab-1-2/v/introduction-to-limits-hd
- MatalasMates. Aula online de matemáticas. (2025, 2 de enero). Matemágicas 3. Truco: piensa un número. ¿Cómo diseñar este tipo de trucos?. Youtube https://www.youtube.com/watch?v=XhOyVSa0NuI
- RAE, Real Academia Española. (2025). Número. En Diccionario de la lengua española https://dle.rae.es/n%C3%BAmero?m=form
- UNAM. Universidad Nacional Autónoma de México (s.f.). Portal académico del CCH: Un espacio de consulta, difusión e intercambio académicos para la Educación Media Superior. https://portalacademico.cch.unam.mx/



Módulo III

Derivada de una función

Propósito del Módulo

Obtiene la derivada de una función mediante el uso de las reglas correspondientes para comprender su aplicabilidad.

Presentación

Has escuchado en alguna ocasión una de estas preguntas: ¿Qué tan rápido cambia de un punto a otro algún objeto? ¿Está aumentando o disminuyendo? ¿En qué punto alcanza un máximo o un mínimo? Estas situaciones tienen en común cambios que ocurren con el tiempo.

Para comprender cómo y cuánto cambian las cosas, las matemáticas nos brindan una herramienta precisa que es la derivada. En este módulo conocerás el concepto de incremento de una función, entendiendo cómo cambia su valor. A partir de esta idea, se genera el concepto de derivada.

La derivada permite interpretar fenómenos científicos y cotidianos. Primero estudiaremos a la derivada desde un concepto gráfico intuitivo, con la ayuda de simulaciones identificarás su comportamiento y aprenderás el sustento gráfico-algebraico que le da origen. Posteriormente aprenderás reglas de derivación, con las cuáles descubrirás que puedes deducir muchas reglas más, en este módulo habrá muchas derivadas, incluso ¡derivadas dentro de otras derivadas!

Veremos cómo, a través de ciertas reglas, podemos obtener la derivada de una suma, de un producto o de un cociente y que, con los teoremas para derivar funciones como las algebraicas, logarítmicas y exponenciales, nos es fácil aplicarlas con la regla de la cadena, la cual nos mostrará que hace uso una y otra vez de estas reglas. Ello nos llevará a obtener derivadas sucesivas de polinomios. En este tema tan interesante aplicarás todo lo aprendido en el módulo, y pondrás en práctica tu dominio sobre reglas de las derivadas.



Actividad 1.
Evaluación diagnóstica

Instrucciones: antes de iniciar con la revisión de los contenidos del módulo III, te invitamos a responder a la evaluación diagnóstica.

Esto te ayudará a descubrir los conocimientos previos que tienes sobre los temas a abordar y, al mismo tiempo, le permitirá a tu docente conocer tus fortalezas y debilidades.

Para comenzar con el ejercicio, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada: MIII Evaluación Diagnóstica.



3.1 Incremento de una función

En el módulo 1 se abordó el tema de **incremento de una función**, es fundamental comprender cómo cambian sus valores ante variaciones en la variable independiente dada por x, definimos el incremento de una función como Δx que representa un aumento que experimenta la variable independiente en un valor inicial x_0.

Con ambos valores, un valor inicial $x = x_0$ y el incremento de este valor $x = x_0 + \Delta x$ obtenemos los valores en la función, es decir, $f(x_0)$ y $f(x_0 + \Delta x)$.

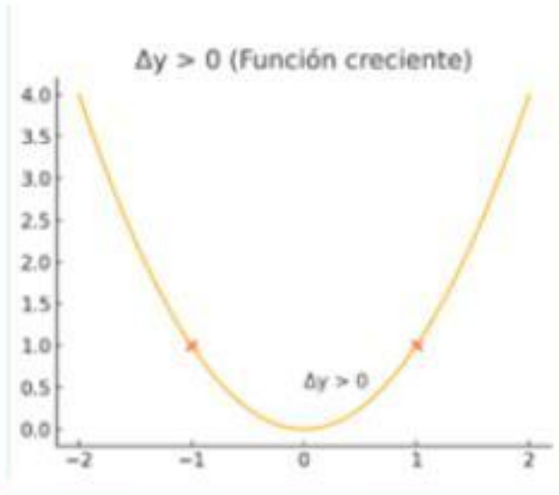
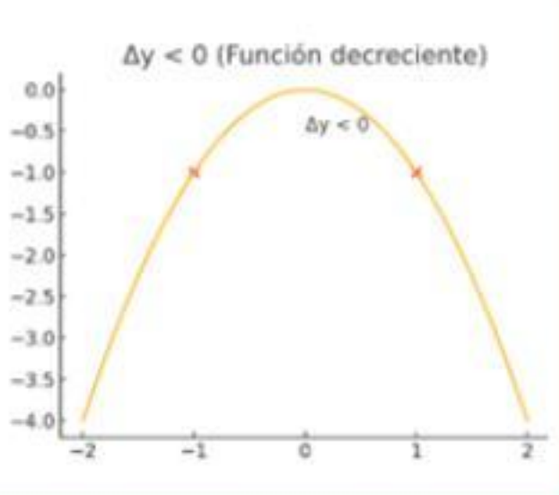
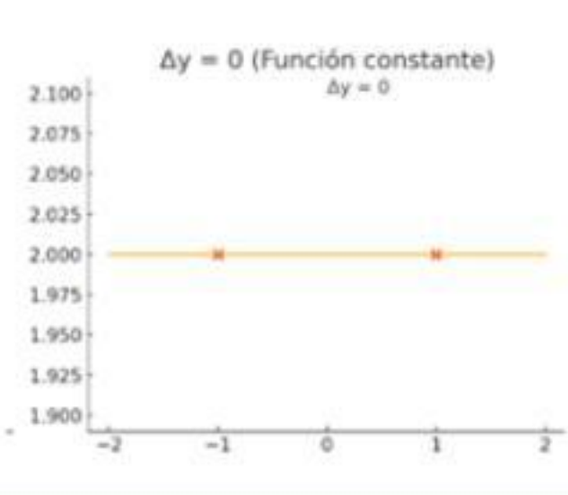
El incremento de la función ***y = f (x)*** está dado por la diferencia de la función en el nuevo valor y el valor original, es decir:$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Generalizando para cualquier valor de la variable independiente, nuestra expresión estará definida como:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Su interpretación depende del valor obtenido, o sea que:
Si $\Delta y > 0$: la función aumenta en el intervalo $f(x + \Delta x) > f(x)$.
Si $\Delta y < 0$: la función disminuye en el intervalo $f(x + \Delta x) < f(x)$.
Si $\Delta y = 0$: la función no cambia $f(x + \Delta x) = f(x)$.

Para los casos anteriores su interpretación gráfica es:

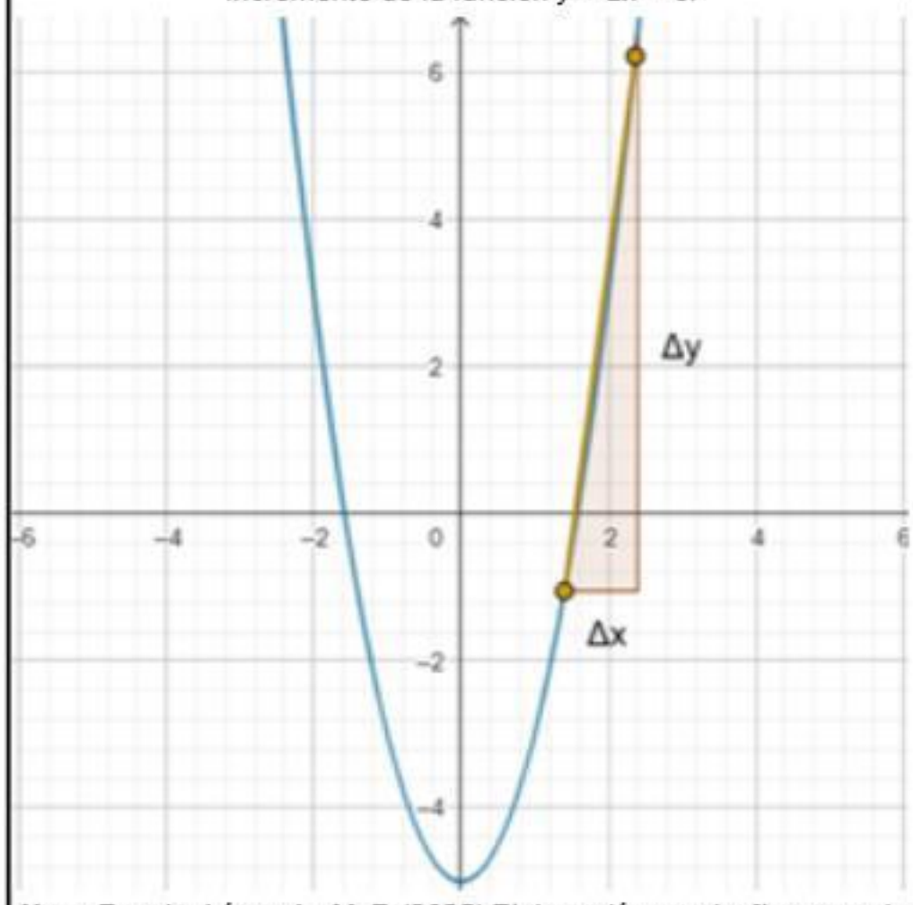
Tabla 1.
Incremento de una función

$\Delta y > 0$	$\Delta y < 0$	$\Delta y = 0$
		

Nota. Fuente: : López A., M. F. (2025) Elaboración con ChatGPT4. [Incremento de una función]

Ejemplo 1.
Para la función $y = 2x^2 - 5$ encuentra el incremento Δy.

Fórmula:	$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
Obtenemos $f(x)$ y $f(x + \Delta x)$	$f(x) = 2x^2 - 5$ $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 - 5$

Sustituimos, desarrollamos y simplificamos:	$\Delta \boldsymbol{y} = 2(x + \Delta \boldsymbol{x})^2 - 5 - 2x^2 + 5$ $\Delta \boldsymbol{y} = 2(x^2 + 2x\Delta \boldsymbol{x} + (\Delta \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{2}}) - 5 - 2x^2 + 5$ $\Delta \boldsymbol{y} = 2x^2 + 4x\Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{2}(\Delta \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{2}} - 5 - 2x^2 + 5$ $\Delta \boldsymbol{y} = 2x^2 + 4x\Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{2}(\Delta \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{2}} - 5 - 2x^2 + 5$ $\Delta \boldsymbol{y} = 4x\Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{2}(\Delta \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{2}}$ $\Delta \boldsymbol{y} = (4x + \boldsymbol{2}\Delta \boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x}$
Gráfica:	$\Delta y = (4x + 2\Delta x)\ \Delta x$ **Figura 1.** *Incremento de la función $y = 2x^2 - 5$.*  ***Nota.*** Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia. [Incremento de la función $y = 2x^2 - 5$]. Obtener Δy representa el cambio en el valor de la función cuando x aumenta.

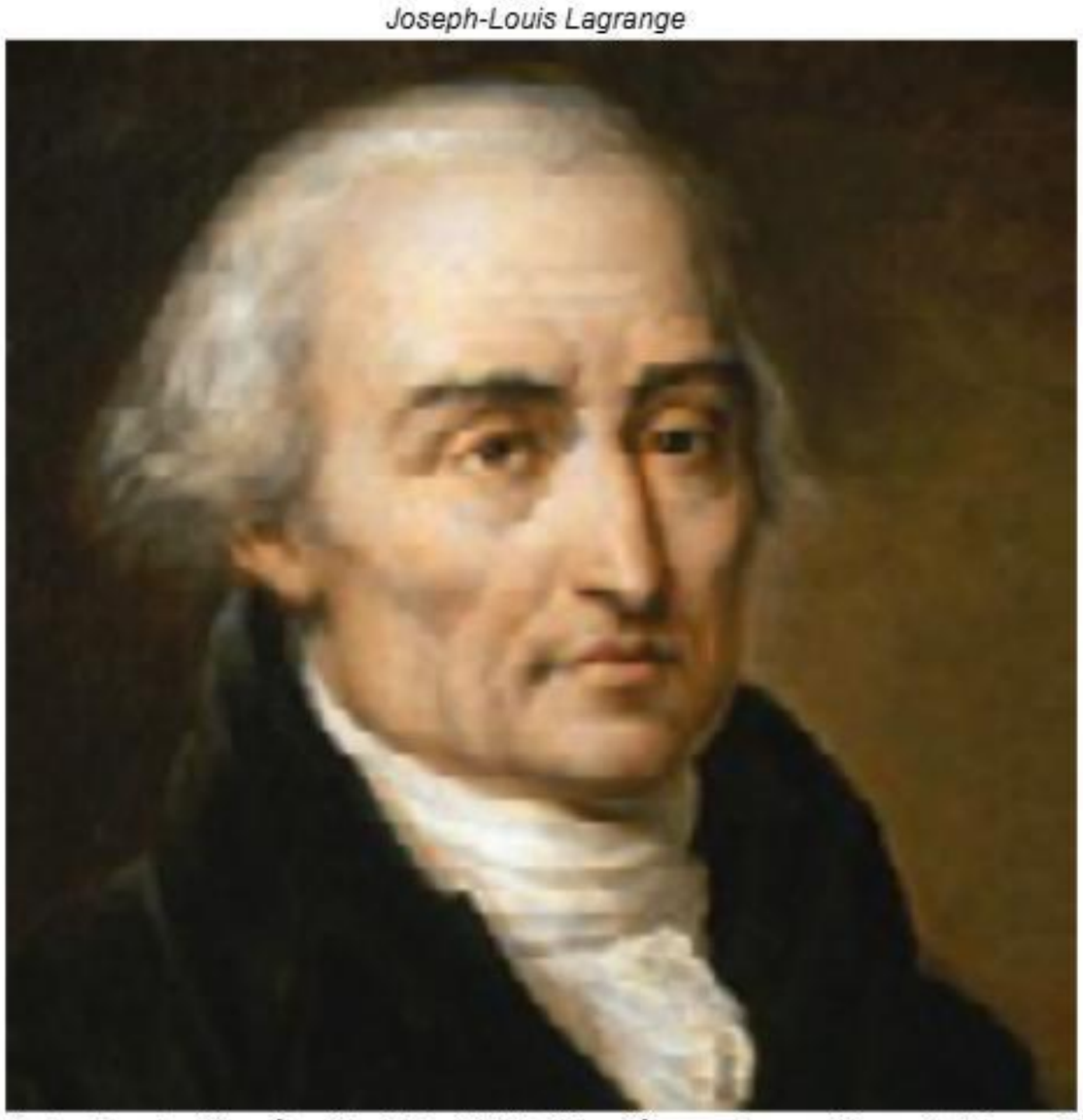
Ejemplo 2.
Para la función $y = x^3 - x - 6$ encuentra el incremento Δy.

Fórmula:	$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
Obtenemos $f(x)$ y $f(x + \Delta x)$	$f(x) = x^3 - x - 6$ $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x) - 6$

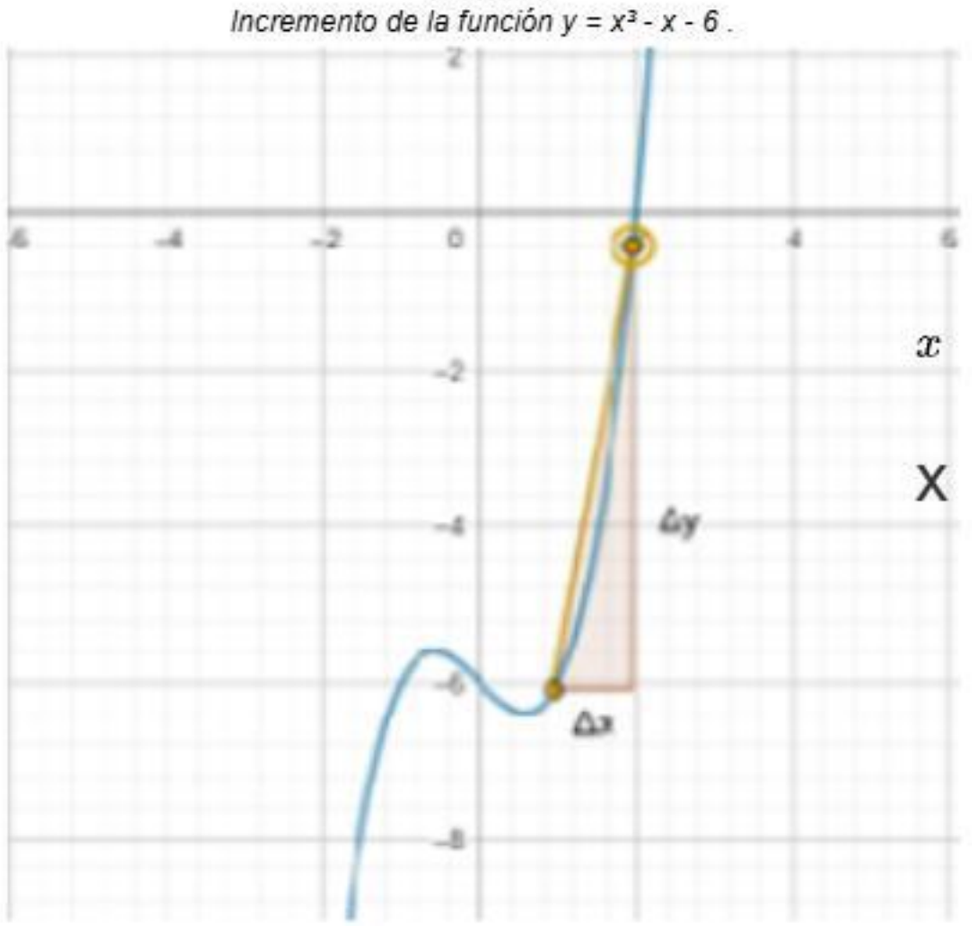
Joseph-Louis Lagrange

Matemático y físico italiano-francés, revolucionó las leyes del movimiento de Newton usando el cálculo variacional. Planteó varios teoremas matemáticos importantes, como el teorema de los valores extremos, que es fundamental en el análisis y la optimización.

Figura 4.
Joseph-Louis Lagrange



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025). Creación propia con Open AI. Microsoft Bing [Joseph-Louis Lagrange] https://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/fotos/lagrange.jpg

Sustituimos, desarrollamos y simplificamos:	$\Delta y = [(x+\Delta x)^3 - (x+\Delta x) - 6] - [x^3 - x - 6\,]$ $\Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x - \Delta x - 6 - x^3 + x + 6$ $\Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + \Delta x^3 - x - \Delta x - 6 - x^3 + x + 6$ $\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \Delta x$ $\Delta y = (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 1)\Delta x$
Gráfica:	$\Delta y = (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 1)\,\Delta x$ **Figura 2.** *Incremento de la función $y = x^3 - x - 6$.*  ***Nota.*** Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia. [Incremento de la función $y = x^3 - x - 6$]. Obtener Δy representa el cambio en el valor de la función cuando x aumenta

Ejemplo 3.

Para la función $y = 3x^2 - 2x + 1$ encuentra el incremento $\frac{\Delta y}{\Delta X}$

Fórmula:	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
Obtenemos $f(x)$ y $f(x + \Delta x)$	$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ $f(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 1$

Sustituimos, desarrollamos y simplificamos:	$\Delta y = [3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 1\ ] - [3x^2 - 2x + 1\ ]$ $\Delta y = 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 2x - 2\Delta x + 1 - 3x^2 + 2x - 1$ $\Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x + 1 - 3x^2 + 2x - 1$ $\Delta y = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2\Delta x$ $\Delta y = (6x + 3\Delta x - 2)\Delta x$
Obtenemos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(6x + 3\Delta x - 2)\Delta x}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x - 2 + 3\Delta x$ Este cociente representa la tasa de cambio promedio de la función entre x y $x + \Delta x$



Actividad 2. Incremento de una función

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para comenzar el ejercicio .



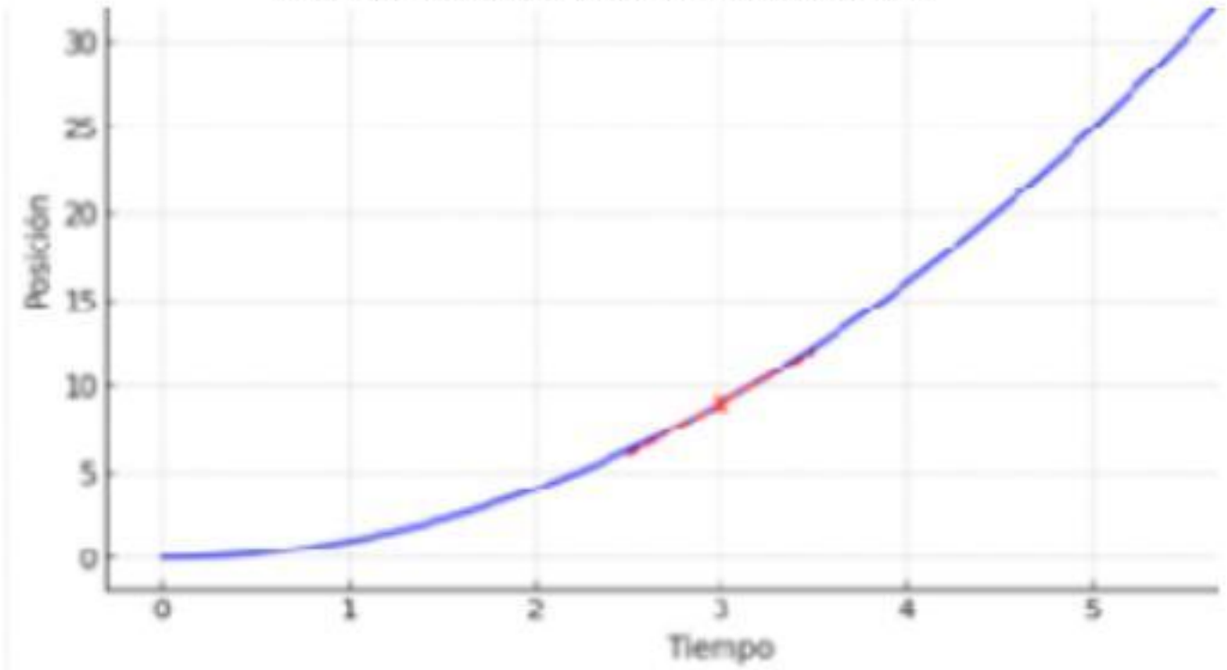
3.2 Derivada de una función

En nuestra vida diaria estamos rodeados de cambios: el crecimiento de una planta, el cambio de temperatura a lo largo del día, la velocidad con la que se mueve un objeto, etc. Estas variaciones pueden analizarse matemáticamente por medio de **la derivada.**

La derivada es un concepto fundamental del cálculo diferencial, una rama de las matemáticas que estudia el comportamiento de las funciones.

Aplicar la derivada es usarla para tomar decisiones o hacer predicciones en ciertas situaciones, por ejemplo, imagina que tenemos un autobús que recorre una carretera su posición respecto al tiempo se puede representar por una función en donde el tiempo es la variable independiente y la distancia la variable dependiente. Si la función es cuadrática, gráficamente puede representar un aumento.

Figura 3.
Representación de la posición respecto del tiempo

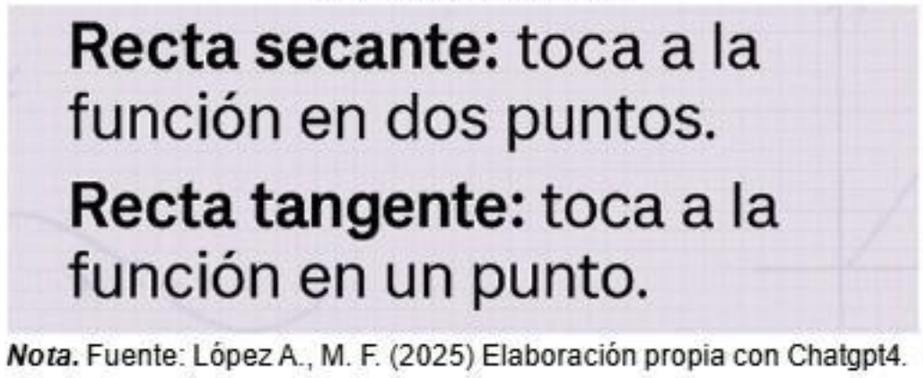


Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Chatgpt4. [Representación de la posición respecto del tiempo.]

La **derivada de una función** nos permite analizar cómo cambia una función respecto a su variable independiente; es decir, **la velocidad de cambio** o **la pendiente de la recta tangente** a la curva de la función en un punto dado.

Antes de definir la derivada de una función, primero conozcamos dos tipos de recta que son la base para construir la expresión, que son la recta tangente y la recta secante como podemos ver en la imagen.

Figura 4.
Recta tangente y secante



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia con Chatgpt4. [Recta tangente y secante]

Partimos de una función ***f*** **(*x*)** que es continua en un intervalo cerrado [***a, b***], en donde, de acuerdo con lo visto en el módulo 1, para poder obtener la pendiente de una recta tangente partimos de la pendiente de una recta secante.

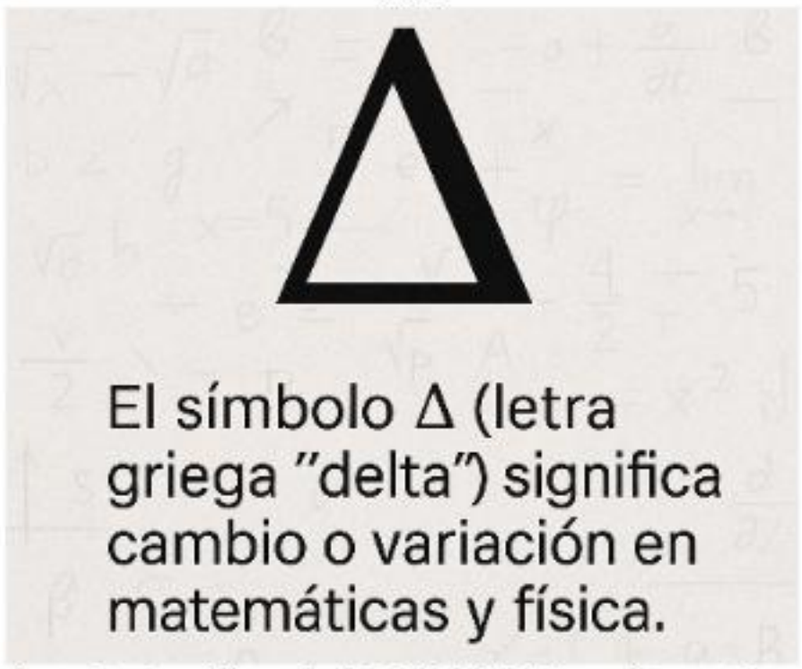
$$m_{sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definimos el punto fijo R y el punto móvil S que pertenecen a la función ***f*** (*x*), al unirlos se genera una recta secante, hacemos que el punto S se acerque cada vez más a R, es decir, $\Delta x \rightarrow 0$ "delta *x* tiende a cero"

Esto representa la obtención del límite, que es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto R. Es decir:

$$m_{tan} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Figura 5.
Delta



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia con Chatgpt4. [Delta]

La derivada de una función en un punto denotada por ***f*** ' (*x*) de acuerdo por la definición de derivada es la pendiente de la recta tangente en ese punto. Se obtiene mediante el límite del cociente del incremento de la función Δy entre el incremento de la variable independiente Δx cuando el incremento tiende a cero. O sea:

$$f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Algunas maneras de denotar la derivada de acuerdo con diferentes autores son:

Leibinz	Lagrange	Newton	Euler
$\frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$	$y' = f'(x)$	$\dot{y}$	$D_x y, D_x f(x)$



Actividad 3.
Derivada de una función

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para comenzar el ejercicio .



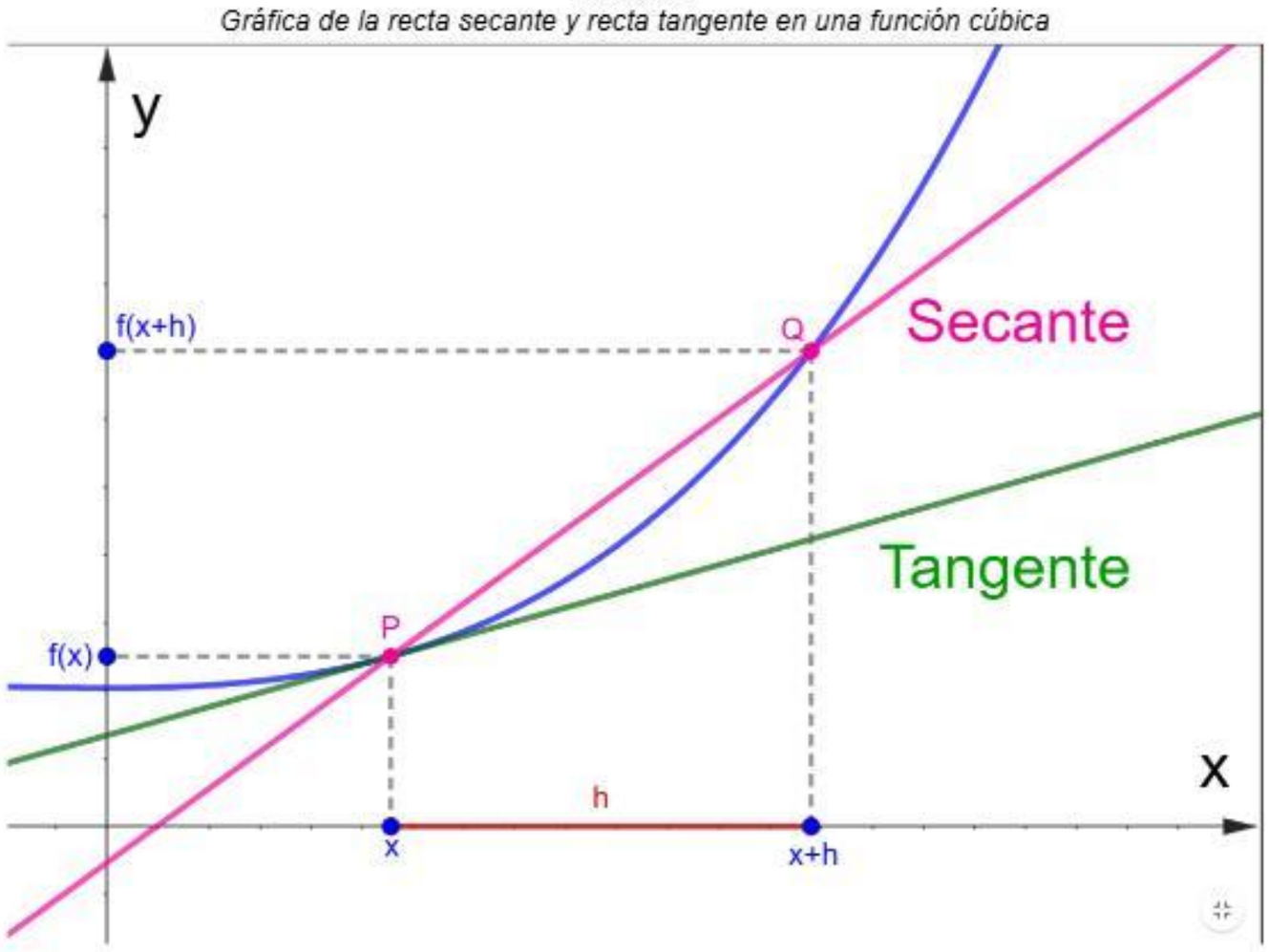
3.2.1 Interpretación geométrica

Consideremos las siguientes afirmaciones:

a) Una **recta secante** es aquella que corta a una función en dos puntos de esta.
b) La **pendiente de una recta** se puede determinar con la expresión: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
c) La ordenada de *x* en una función dada es *f* (*x*).
d) El **incremento** de *x* en un valor *h* es *x* + *h*.
e) La ordenada de *x* + *h* en una función dada es *f* (*x* + *h*).
f) Una **recta tangente** a una gráfica puede ser aquella que, en el intervalo definido por *x* y *h*, la corta en un solo punto.

Comparemos la información anterior con la siguiente imagen:

Figura 6.
Gráfica de la recta secante y recta tangente en una función cúbica



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra.[Gráfica de la recta secante y recta tangente en una función cúbica].

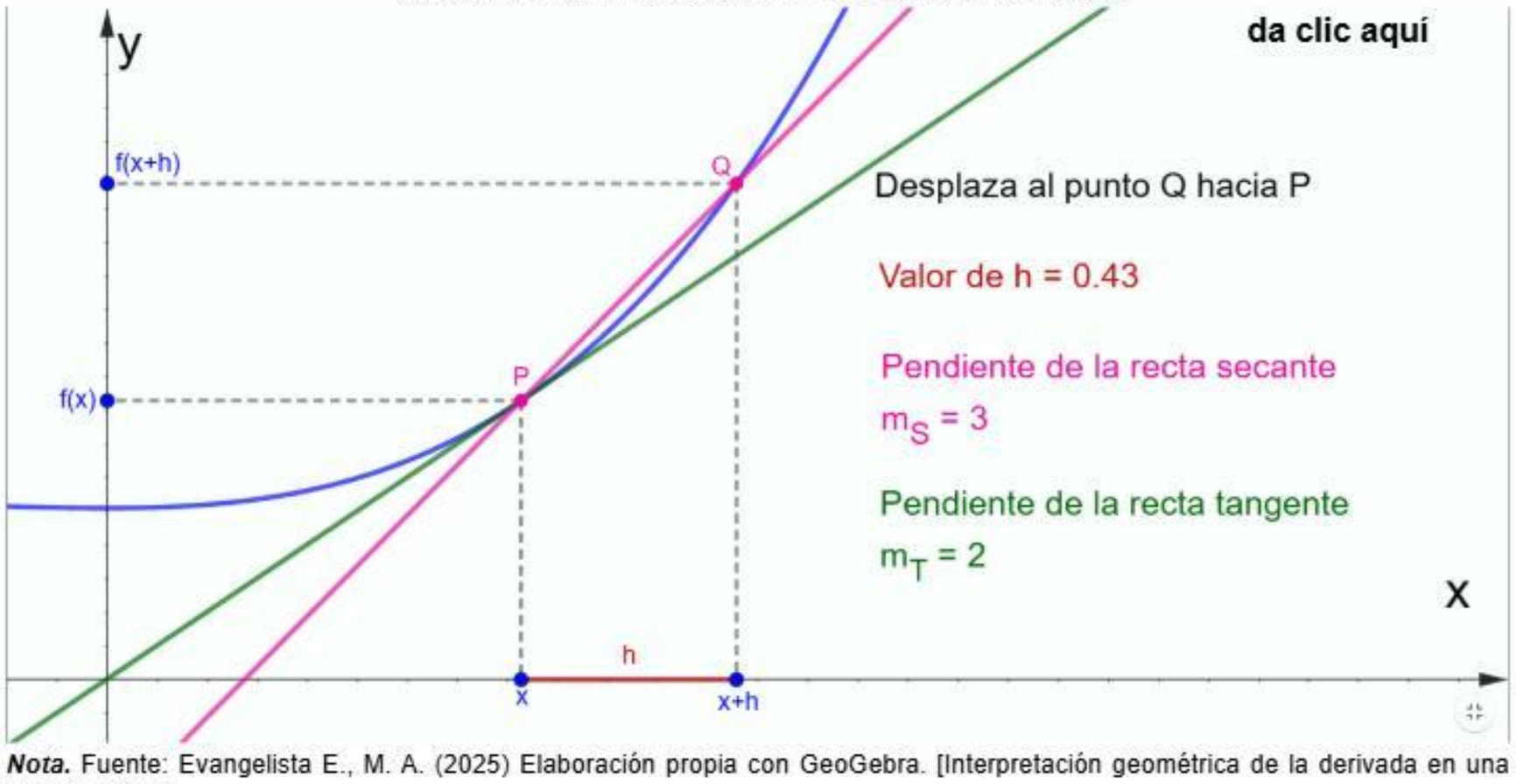
Con la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ podemos calcular la pendiente de la recta secante, porque se tienen dos puntos sobre la gráfica de *f* (*x*), pero no así de la recta tangente, ya que por definición la corta en un solo punto, en este caso dentro del intervalo definido por *x* y *h*; sin embargo, cuando el valor h se hace muy pequeño, los puntos P y Q están muy cerca, tanto, que las rectas secante y tangente son prácticamente las mismas (Haeussler, 2003).

¡Da clic sobre la siguiente gráfica para que lo compruebes!

Pon atención en los siguientes aspectos cuando acerques al punto Q sobre *f* (*x*) hacia P:

- El valor de h se hace muy pequeño con la tendencia a ser cero.
- Las pendientes de las rectas tangente y secante son las mismas cuando Q está sobre P.
- Recuerda que se puede calcular la pendiente de la recta secante con la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. pero no podemos hacer lo mismo con la recta tangente.

Figura 7.
Interpretación geométrica de la derivada en una función cúbica



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Interpretación geométrica de la derivada en una función cúbica].

Con esta información y lo visto en temas pasados podemos concluir lo siguiente:

1) Se puede calcular la pendiente de la recta secante m_S con la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ porque se tienen dos puntos sobre la gráfica, obteniendo lo siguiente:

$$m_S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2) En el módulo 1 se explicó que la derivada de una función en un punto representa a la pendiente de la recta tangente m_T a la función en ese punto:

$$f'(x) = m_T$$

3) Cuando h es 0, las pendientes de las rectas tangente y normal son prácticamente las mismas, no obstante, esto genera una indeterminación:

$$f'(x) = m_T = m_S = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+0) - f(x)}{0} = \frac{f(x) - f(x)}{0} = \frac{0}{0}$$

4) En el módulo 2 se analizó el concepto límite para estudiar este tipo de indeterminaciones, para ello se calcula su límite correspondiente con la expresión:

$$f'(x) = m_T = m_S = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h)] - [f(x)]}{h}$$

Esta última expresión, la cual será estudiada en el siguiente apartado, es conocida como **derivada por definición** (Contreras et al., 2015).

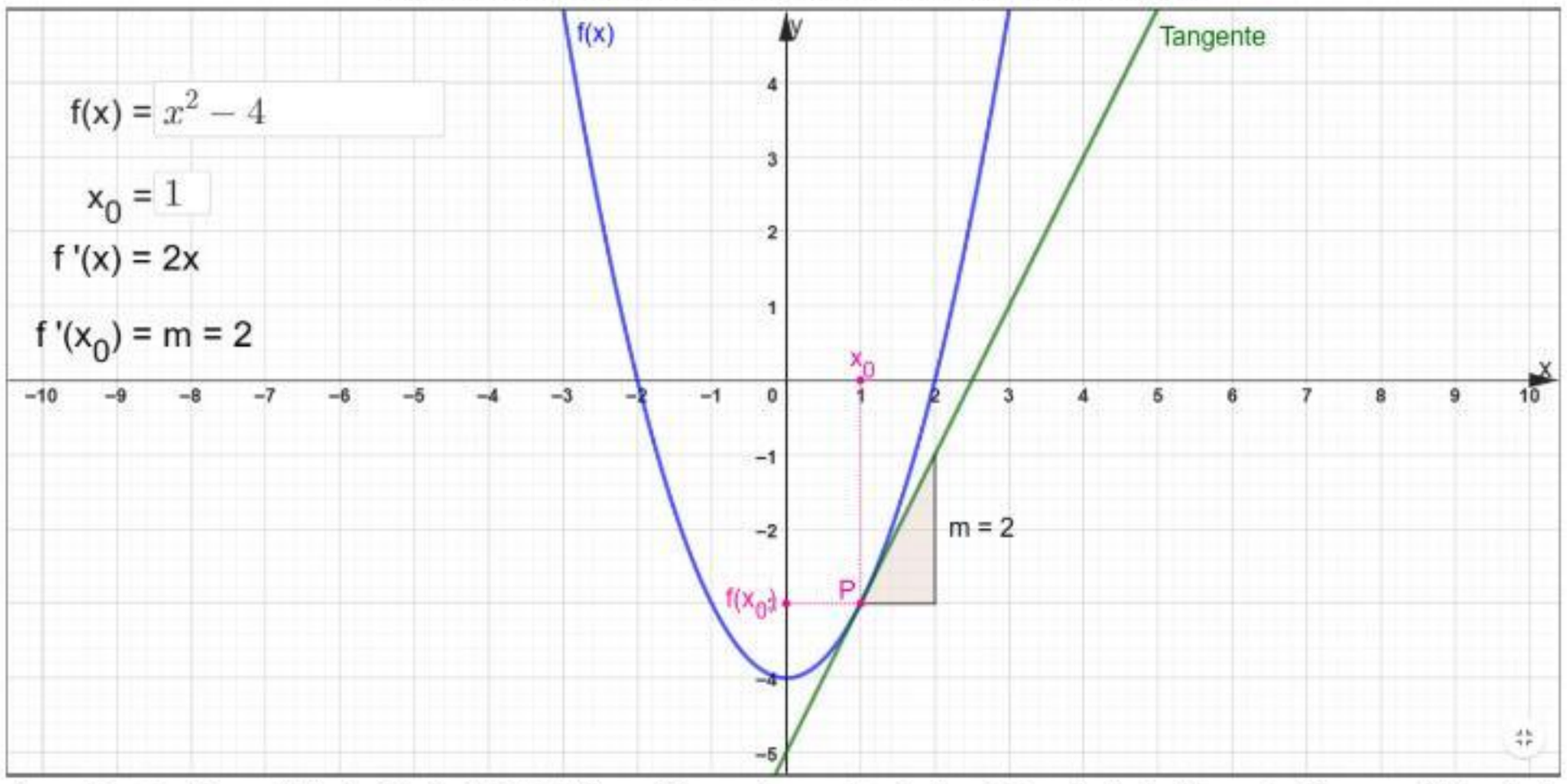
Para comprender mejor la interpretación geométrica de la derivada de una función, da clic sobre la siguiente imagen e interactúa con la simulación, ya se te ha facilitado el cálculo de la derivada de la función en la que, al sustituir el valor de x_0 se obtiene el valor de la pendiente *m*. Recuerda atender los siguientes detalles:

1) Puedes cambiar el valor de la función en la casilla *f* (*x*).

2) x_0 representa a la abscisa del punto $P\,(x_0\,,\,f\,(x_0))$ en el que la recta tangente toca a la función $f\,(x)$.
3) Puedes cambiar el valor de x_0 en la casilla con ese título.
4) La derivada de la función en el punto indicado es *m*.

Figura 8.

Ejemplo de la interpretación geométrica de la derivada por definición



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Ejemplo de la interpretación geométrica de la derivada por definición].

Es importante aclarar que, derivar solo una función, NO significa calcular la pendiente de ninguna recta tangente a la función, es necesario sustituir un valor x_0 en esa derivada para realmente obtener el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa establecido. Algunas reglas y técnicas para el cálculo de derivadas serán estudiadas en los siguientes temas.



Actividad 4. Interpretación geométrica

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para comenzar el ejercicio .



3.2.2 Por definición (constante, lineal y polinomiales)

La derivada de una función se puede calcular con el siguiente límite, conocido como **derivada por definición:**

$$f'(x) = D_x f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A continuación, se mostrarán algunos ejemplos de cómo emplear esta derivada por definición para funciones constantes, lineales y polinomiales. Además de calcular las derivadas correspondientes, podrás deducir formas simplificadas de realizar el proceso de la derivada, estos procedimientos suelen ser llamados reglas de derivación.

Derivada por definición de funciones constantes:

Ejemplo 1:

Función: $f(x) = 4$

De donde: $f(x+h) = 4$

Derivando: $Dx\, f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{4-4}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{0}$

Aunque esto parece una indeterminación, el numerador tiene un valor fijo de 0, mientras que el denominador sí que se aproxima a cero, por lo que, aplicando límites laterales, el valor de este límite es 0. Analiza esta idea con tus compañeros y docente.

$= \lim_{h \to 0} 0$

$= 0$

Por lo tanto:

La derivada de la función $f(x) = 4$ es $f'(x) = Dx\,(4) = 0$

Ejemplo 2:

Función: $f(x) = \sqrt{5}$

De donde: $f(x+h) = \sqrt{5}$

Derivando: $D_x f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} 0$

$= 0$

Por lo tanto:

$$f'(x) = D_x(\sqrt{5}) = 0$$

Ejemplo 3:

Función: $f(x) = -\frac{1}{2}$

De donde: $f(x+h) = -\frac{1}{2}$

Derivando: $D_x f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{2}-\left[-\frac{1}{2}\right]}{h}$

En este caso es necesario agregar el signo de agrupación para evitar confusión con el signo negativo. En los siguientes ejercicios cuando sea oportuno se emplearán los corchetes para facilitar la compresión de la agrupación de términos.

$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} 0$

$= 0$

Por lo tanto:

$$f'(x) = D_x\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Como puedes observar, la derivada de funciones constantes es cero:

Función:		**Derivada**
$f(x) = k$	⟶	$D_x f(x) = 0$

Augustin Louis Cauchy

Introdujo conceptos fundamentales como: límite, continuidad y derivación. Trabajó en la teoría de series de Taylor, expansión de serie de una función en términos de sus derivadas en un punto dado. La cual tiene aplicaciones en matemáticas, física, ingeniería y otras ciencias. Se utilizan en análisis de datos, teléfonos móviles, ecuaciones diferenciales, entre otros.

Figura 5.
Augustin Louis Cauchy



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025). Creación propia con Open AI. ChatGPT [Augustin Louis Cauchy] https://files.oaiusercontent.com/file-

Derivada por definición de funciones lineales:

Ejemplo 4:

Función: $f(x) = 6x$

De donde: $f(x+h) = 6(x+h)$

$= 6x + 6h$

Derivando: $D_x f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[6x+6h]-[6x]}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{6x}+6h-\cancel{6x}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{6h}{h}$

$= \lim_{h\to 0} 6$

$= 6$

Por lo tanto:

$f'(x) = D_x(6x) = 6$

Ejemplo 5:

Función: $f(x) = -4x$

De donde: $f(x+h) = -4(x+h)$

$= -4x - 4h$

Derivando: $D_x f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[-4x-4h]-[-4x]}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{4x}-4h+\cancel{4x}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h}$

$= \lim_{h\to 0} -4$

$= -4$

Por lo tanto:

$f'(x) = D_x(-4x) = -4$

Ejemplo 6:

Función: $f(x) = \frac{3}{5}x$

De donde: $f(x+h) = \frac{3}{5}(x+h)$

$= \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}h$

Derivando: $D_x f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}h\right] - \left[\frac{3}{5}x\right]}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}h - \frac{3}{5}x}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{5}h}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{3}{5}$

$= \frac{3}{5}$

Por lo tanto:

$$f'(x) = D_x\left(\frac{3}{5}x\right) = \frac{3}{5}$$

Como puedes observar, la derivada de funciones lineales es el valor de su coeficiente:

Función:		**Derivada**
$f(x) = k\,x$	⟶	$D_x f(x) = k$

Derivada por definición de funciones polinomiales:

Ejemplo 7:

Función: $f(x) = 2x + 1$

De donde: $f(x+h) = 2(x+h) + 1$

$= 2x + 2h + 1$

Derivando: $D_x f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[2x+2h+1] - [2x+1]}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2x + 2h + 1 - 2x - 1}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h}$

$= \lim_{h\to 0} 2$

$= 2$

Por lo tanto:

$$f'(x) = D_x(2x + 1) = 2$$

Ejemplo 8:

Función: $f(x) = 4 - 7x$

De donde: $f(x + h) = 4 - 7(x + h)$

$= 4 - 7x - 7h$

Derivando: $D_x f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[4 - 7x - 7h] - [4 - 7x]}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{4 - 7x - 7h - 4 + 7x}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-7h}{h}$

$= \lim_{h \to 0} -7$

$= -7$

Por lo tanto:

$f'(x) = D_x (4 - 7x) = -7$

Ejemplo 9:

Función: $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

De donde: $f(x + h) = 3(x + h)^2 - 2(x + h) + 5$

$= 3(x^2 + 2xh + h^2) - 2(x + h) + 5$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2x - 2h + 5$

Derivando: $D_x f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2x - 2h + 5] - [3x^2 - 2x + 5]}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2x - 2h + 5 - 3x^2 + 2x - 5}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 2h}{h}$ Factorizamos *h* del numerador

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h - 2)}{h}$ Simplificamos

$= \lim_{h \to 0} (6x + 3h - 2)$ Sustituimos *h*

$= 6x + 3(0) - 2$

$= 6x - 2$

Por lo tanto:

$f'(x) = D_x (3x^2 - 2x + 5) = 6x - 2$

Ejemplo 10:

Función: $f(x) = 5x - 4x^2 - 2x^3$

De donde: $f(x+h) = 5(x+h) - 4(x+h)^2 - 2(x+h)^3$

$= 5(x+h) - 4(x^2 + 2xh + h^2) - 2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)$

$= 5x + 5h - 4x^2 - 8xh - 4h^2 - 2x^3 - 6x^2h - 6xh^2 - 2h^3$

Derivando: $D_x f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[5x + 5h - 4x^2 - 8xh - 4h^2 - 2x^3 - 6x^2h - 6xh^2 - 2h^3] - [5x - 4x^2 - 2x^3]}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{5x} + 5h - \cancel{4x^2} - 8xh - 4h^2 - \cancel{2x^3} - 6x^2h - 6xh^2 - 2h^3 - \cancel{5x} + \cancel{4x^2} + \cancel{2x^3}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{5h - 8xh - 4h^2 - 6x^2h - 6xh^2 - 2h^3}{h}$ Factorizamos *h* del numerador

$= \lim_{h\to 0} \frac{h(5 - 8x - 4h - 6x^2 - 6xh - 2h^2)}{h}$ Simplificamos

$= \lim_{h\to 0} (5 - 8x - 4h - 6x^2 - 6xh - 2h^2)$ Sustituimos *h*

$= 5 - 8x - 4(0) - 6x^2 - 6x(0) - 2(0)^2$

$= 5 - 8x - 6x^2$

Por lo tanto:

$$f'(x) = D_x(5x - 4x^2 - 2x^3) = 5 - 8x - 6x^2$$

Como puedes observar, la derivada de funciones polinomiales es de la siguiente forma:

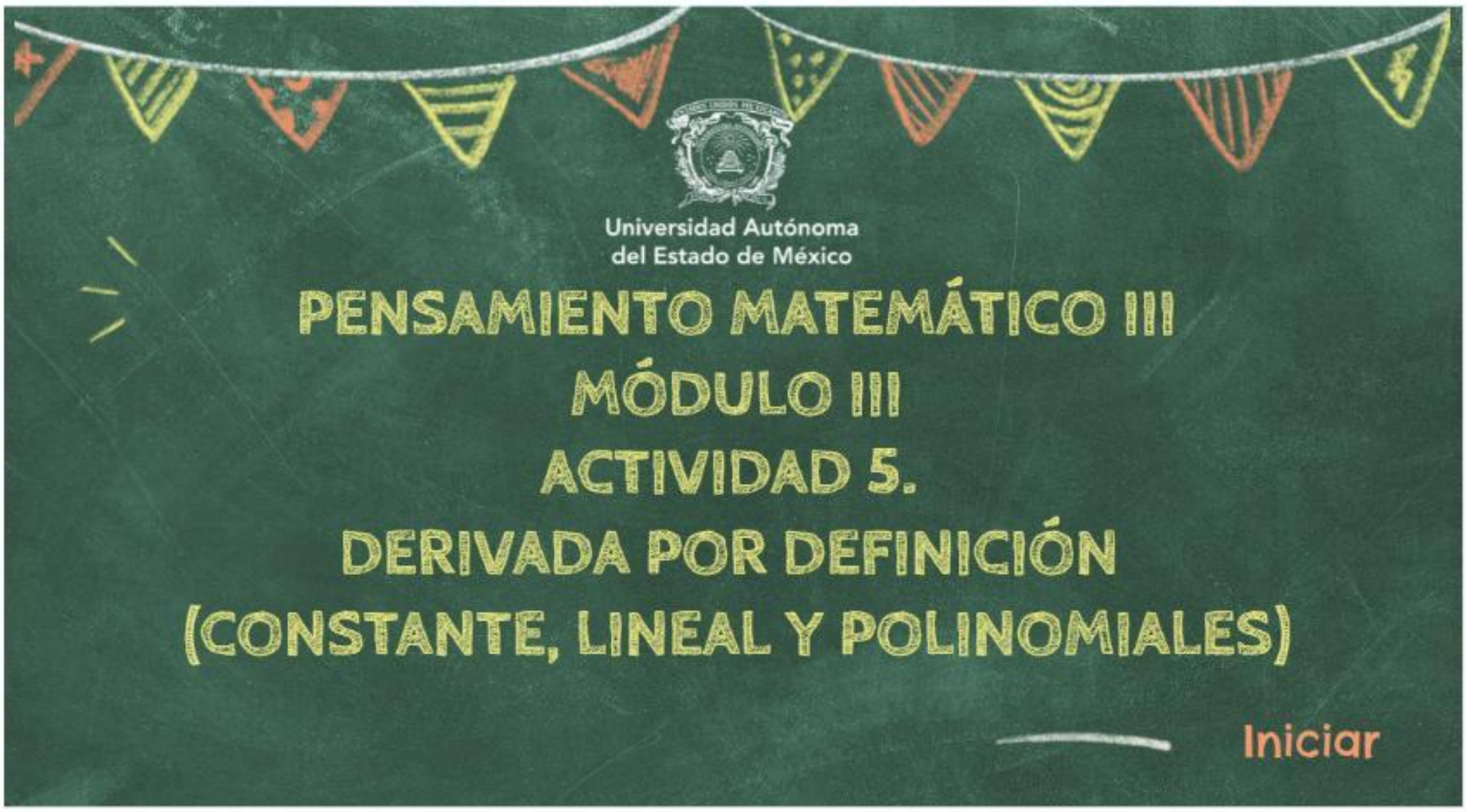
Función:		**Derivada**
$f(x) = kx^n$	⟶	$D_x f(x) = knx^{n-1}$

En este apartado hemos logrado deducir tres reglas de derivación, para funciones constantes, lineales y polinomiales. De igual forma, existen procedimientos para deducir reglas de derivación para otros tipos de funciones, por ello, debes mostrar tu interés por el cálculo e investigar en diversas fuentes estos procedimientos con la finalidad de que los conozcas.



Actividad 5. Derivada por definición (constante, lineal y polinomiales)

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para comenzar el ejercicio .



3.3 Reglas de derivación para funciones algebraicas, exponenciales y logarítmicas

Como se ha mencionado, la derivada por definición permite conocer el valor de la pendiente de la recta tangente de una función en un punto dado, este procedimiento se puede simplificar en reglas de derivación, de las cuales, tres ya se han demostrado en el apartado anterior; asimismo, se pueden encontrar más reglas de derivación, por simplicidad; de este punto en adelante, solo se describirán estas reglas.

Algunas reglas de derivación son:

Derivadas de funciones algebraicas

Funciones constantes	Función: $f(x) = k$	→	Derivada $D_x f(x) = 0$
Funciones lineales	Función: $f(x) = kx$	→	Derivada $D_x f(x) = k$
Funciones polinomiales	Función: $f(x) = kx^n$	→	Derivada $D_x f(x) = knx^{n-1}$

Derivadas de funciones exponenciales

Funciones exponenciales (base *e*)	Función: $f(x) = e^{g(x)}$	→	Derivada $D_x f(x) = e^{g(x)} \cdot D_x g(x)$
Funciones exponenciales (base *a*)	Función: $f(x) = a^{g(x)}$	→	Derivada $D_x f(x) = \ln a \cdot a^{g(x)} \cdot D_x g(x)$

Derivadas de funciones logarítmicas

Funciones logarítmicas (base *e*)	Función: $f(x) = \ln\ [g(x)]$	→	Derivada $D_x f(x) = \frac{D_x g(x)}{g(x)}$
Funciones logarítmicas (base *e*)	Función: $f(x) = \log_a\ [g(x)]$	→	Derivada $D_x f(x) = \frac{\log_a e\ D_x g(x)}{g(x)}$

En estos casos D*x*g (*x*) significa calcular la derivada de *g* (*x*), es decir, es una derivada dentro de otra derivada.

Analicemos algunos ejemplos de cada caso para comprender cómo se emplean las fórmulas.

Derivadas de funciones algebraicas

Ejemplo 1:

Función: $f(x) = 8x^4$

Regla de derivación: Función: $f(x) = kx^n$ → Derivada $D_x f(x) = knx^{n-1}$

Derivando: $D_x f(x) = 8(4)x^{4-1}$

$= 32x^3$

Por lo tanto:

$$D_x(8x^4) = 32x^3$$

Ejemplo 2:

Función: $f(x) = \frac{3}{4}x^2$

Regla de derivación: Función: $f(x) = kx^n$ → Derivada $D_x f(x) = knx^{n-1}$

Derivando: $D_x f(x) = \frac{3}{4}(2)x^{2-1}$

$= \frac{3}{2}x$

Por lo tanto:

$$D_x\left(\frac{3}{4}x^2\right) = \frac{3}{2}x$$

Ejemplo 3:

Función: $f(x) = 7x^{-3}$

Regla de derivación: Función: $f(x) = kx^n$ → Derivada $D_x f(x) = knx^{n-1}$

Derivando: $D_x f(x) = 7(-3)x^{-3-1}$

$= -21x^{-4}$

En este caso, es preferible que el exponente de la variable sea positivo, por lo que, aplicando leyes de los exponentes (Peters, 2022), el exponente cuatro se puede volver positivo al pasarlo dividiendo:

Ley de los exponentes:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Aplicando la ley a la variable del ejercicio:

$$D_x f(x) = -21x^{-4} = -\frac{21}{x^4}$$

Por lo tanto:

$$D_x(7x^{-3}) = -\frac{21}{x^4}$$

De forma similar, cuando la variable de una función está dividiendo, podemos aplicar esta ley de los exponentes para que la variable y su exponente pasen al numerador y se pueda aplicar la regla de derivación.

Ejemplo 4:

Función: $f(x) = \frac{8}{x^4}$

Aplicando la ley de los exponentes: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

$f(x) = 8x^{-4}$

Regla de derivación:

Función: $f(x) = kx^n$ → Derivada $D_x f(x) = knx^{n-1}$

Derivando: $D_x f(x) = 8(-4)x^{-4-1}$

= $-32x^{-5}$

Por lo tanto:

$$D_x\left(\frac{8}{x^4}\right) = -\frac{32}{x^5}$$

Ejemplo 5:

Función: $f(x) = 4x^{\frac{3}{5}}$

Regla de derivación:

Función: $f(x) = kx^n$ → Derivada $D_x f(x) = knx^{n-1}$

Derivando: $D_x f(x) = 4\left(\frac{3}{5}\right)x^{\frac{3}{5}-1}$

$= \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

$= \frac{12}{5\,x^{\frac{2}{5}}}$

En este caso, vamos a preferir que el exponente de la variable no sea fracción, por lo que, aplicando leyes de los exponentes, el exponente se puede volver una raíz como se muestra a continuación:

Ley de los exponentes:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Aplicando la ley a la variable del ejercicio:

$$D_x f(x) = \frac{12}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

Por lo tanto:

$$D_x\left(4x^{\frac{3}{5}}\right) = \frac{12}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

De forma similar, cuando la variable de una función está en una raíz, podemos aplicar esta ley de los exponentes para que la variable tenga exponente fraccionario y se pueda aplicar la regla de derivación.

Ejemplo 6:

Función: $f(x) = \sqrt{x^7}$

Aplicando la ley de los exponentes: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$f(x) = x^{\frac{7}{2}}$

Regla de derivación:

Función: $f(x) = kx^n$ → Derivada $D_x f(x) = knx^{n-1}$

Derivando: $D_x f(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1}$

$= \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}$

Por lo tanto:

$$D_x\left(\sqrt{x^7}\right) = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$$

Puede darse el caso en que la función tenga a la variable tanto en el numerador como en el denominador, por lo que también se aplica una ley de los exponentes para simplificarla:

Ley de los exponentes:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^2}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{2-\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$$

Ejemplo 7:

Función: $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}} \quad con\ x > 0$

Aplicando la ley de los exponentes: $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

$f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

Regla de derivación:

Función: $f(x) = kx^n$ → Derivada $D_x f(x) = knx^{n-1}$

Derivando: $D_x f(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}-1}$

$= \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$

Por lo tanto:

$$D_x\left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

Derivadas de funciones exponenciales

Ejemplo 8:

Función: $f(x) = e^{2x}$

Regla de derivación:

Derivada $D_x f(x) = e^{g(x)} \cdot D_x g(x)$ → Elementos $e^{g(x)} = e^{2x} \wedge g(x) = 2x$

Derivando: $D_x f(x) = e^{2x}\, D_x(2x)$

$= e^{2x}\,(2)$

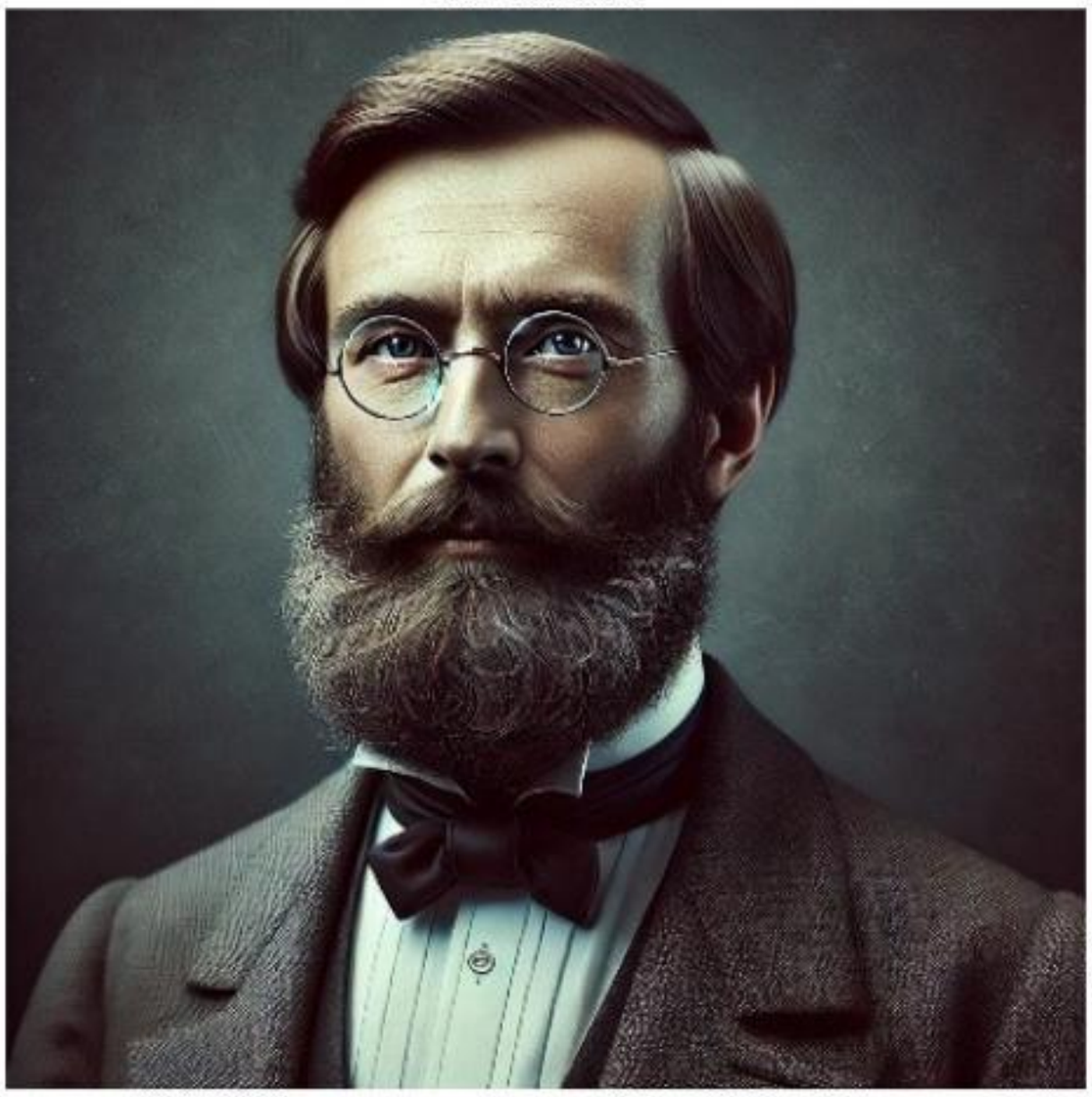
Por lo tanto:

$$D_x(e^{2x}) = 2e^{2x}$$

Karl Weierstrass

Formulación de definiciones precisas de límites y continuidad aceptadas en la actualidad. Demostró un resultado importante conocido como el Teorema de Weierstrass (establece que toda función continua en un intervalo cerrado es acotada y alcanza sus valores máximos y mínimos en ese intervalo). Definió la función continua pero no diferenciable en ningún punto, conocida como la "función de Weierstrass".

Figura 6.
Karl Weierstrass



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025). Creación propia con Open AI. ChatGPT [Karl Weierstrass] https://files.oaiusercontent.com/file-

Ejemplo 9:

Función: $f(x) = e^{4x^3}$

Regla de derivación:

Derivada: $D_x f(x) = e^{g(x)} \cdot D_x g(x)$ → Elementos: $e^{g(x)} = e^{4x^3} \wedge g(x) = 4x^3$

Derivando: $D_x f(x) = e^{4x^3} D_x(4x^3)$

$= e^{4x^3}(12x^2)$

Por lo tanto:

$$D_x\left(e^{4x^3}\right) = 12\,x^2\,e^{4x^3}$$

Ejemplo 10:

Función: $f(x) = 6^{x^2}$

Regla de derivación:

Derivada: $D_x f(x) = \ln a \cdot a^{g(x)} \cdot D_x g(x)$ → Elementos: $a = 6 \quad \wedge \quad g(x) = x^2$

Derivando: $D_x f(x) = \ln 6 \cdot 6^{x^2} \cdot D_x(x^2)$

$= \ln 6 \cdot 6^{x^2} \cdot (2x)$

Por lo tanto:

$$D_x\left(6^{x^2}\right) = \ln 6 \cdot 2x \cdot 6^{x^2}$$

Ejemplo 11:

Función: $f(x) = 5^{2x^4}$

Regla de derivación:

Derivada: $D_x f(x) = \ln a \cdot a^{g(x)} \cdot D_x g(x)$ → Elementos: $a = 5 \quad \wedge \quad g(x) = 2x^4$

Derivando: $D_x f(x) = \ln 5 \cdot 5^{2x^4} \cdot D_x(2x^4)$

$= \ln 5 \cdot 5^{2x^4} \cdot (8x^3)$

Por lo tanto:

$$D_x\left(5^{2x^4}\right) = \ln 5 \cdot 8x^3 \cdot 5^{2x^4}$$

Derivadas de funciones logarítmicas

Ejemplo 12:

Función: $f(x) = \ln(3x^5)$

Regla de derivación: Derivada $D_x f(x) = \frac{D_x g(x)}{g(x)}$ → Elementos $g(x) = 3x^5$

Derivando: $D_x f(x) = \frac{D_x(3x^5)}{3x^5}$

$= \frac{15x^4}{3x^5}$

Por lo tanto:

$$D_x[\ln(3x^5)] = \frac{5}{x}$$

Ejemplo 13:

Función: $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x^3}\right)$

Regla de derivación: Derivada $D_x f(x) = \frac{D_x g(x)}{g(x)}$ → Elementos $g(x) = \frac{2}{x^3} = 2\,x^{-3}$

Derivando: $D_x f(x) = \frac{D_x(2\,x^{-3})}{\frac{2}{x^3}}$

$= \frac{-6x^{-4}}{\frac{2}{x^3}}$

$= -\frac{6x^{-4}\,(x^3)}{1\,(2)}$ Aplicando la ley de los exponentes $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ se tiene $x^{-4}(x^3) = x^{-4+3} = x^{-1}$

$= -\frac{6\,x^{-1}}{2}$

Por lo tanto:

$$D_x\left[\ln\left(\frac{2}{x^3}\right)\right] = -\frac{3}{x}$$

Ejemplo 14:

Función: $f(x) = \log_7(4\,x^6)$

Regla de derivación: $D_x f(x) = \dfrac{\log_a e\ D_x g(x)}{g(x)}$ (Derivada) $\longrightarrow$ $a = 7 \ \wedge \ g(x) = 4\,x^6$ (Elementos)

Derivando: $D_x f(x) = \dfrac{\log_7 e\, D_x(4\,x^6)}{4\,x^6}$

$= \dfrac{\log_7 e\,(24\,x^5)}{4\,x^6}$

$= \dfrac{\log_7 e\ 6}{x}$

Aplicando la propiedad de logaritmos $\log_a e = \dfrac{\ln e}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a}$ se tiene que $\dfrac{\log_7 e\,6}{x} = \dfrac{6}{x \ln 7}$.

Por lo tanto:

$$D_x[\log_7(4\,x^6)] = \frac{\log_7 e\ 6}{x} = \frac{6}{x\ \ln 7}$$

Ejemplo 15:

Función: $f(x) = \log_3(8\sqrt{x})$

Regla de derivación: $D_x f(x) = \dfrac{\log_a e\ D_x g(x)}{g(x)}$ (Derivada) $\longrightarrow$ $a = 3 \ \wedge \ g(x) = 8\sqrt{x} = 8\,x^{\frac{1}{2}}$ (Elementos)

Derivando: $D_x f(x) = \dfrac{\log_3 e\, D_x\left(8\,x^{\frac{1}{2}}\right)}{8\,x^{\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{\log_3 e\left(\cancel{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}\right)}{\cancel{8}\,x^{\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{\log_3 e\ x^{-\frac{1}{2}}}{2\,x^{\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{\log_3 e}{2\,x}$

Aplicando la propiedad de logaritmos $\log_a e = \dfrac{\ln e}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a}$ se tiene que $\dfrac{\log_3 e}{2\,x} = \dfrac{1}{2\,x \ln 3}$.

Por lo tanto:

$$D_x[\log_3(8\sqrt{x})] = \frac{\log_3 e}{2\,x} = \frac{1}{2\,x\ \ln 3}$$

Como has podido observar, se han empleado derivadas dentro de otras derivadas, esto se conoce como regla de la cadena y sirve para derivar funciones más complejas o que incluso involucren más de una operación, en el siguiente apartado aprenderás más sobre este y otros procedimientos para el cálculo de derivadas.



Actividad 6. Reglas de derivación para funciones algebraicas, exponenciales y logarítmicas

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para comenzar el ejercicio .

Pensamiento Matemático II
Módulo III

Actividad 6.

REGLAS DE DERIVACIÓN PARA FUNCIONES ALGEBRÁICAS, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Universidad Autónoma del Estado de México

Iniciar

3.4 Regla para derivar suma, productos, cociente y regla de la cadena

Con base en lo aprendido en el punto anterior ahora se derivarán suma, producto, cociente y la regla de la cadena, para ello tendremos dos funciones reales de variable real, y veremos cómo se desglosa su derivación.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales de variable real, tendremos:

Operación	Regla
Suma	$D_x[f(x)+g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$
Producto	$D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$
Cociente	$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2} \; g(x) \neq 0$
Cadena	$D_x[f(x)]^n = n\,[f(x)]^{n-1} D_x f(x)$

Esto es, para el caso de la suma, se derivaran ambas funciones (sumandos) de forma separada, respetando la operación, si hablamos del producto aquí el resultado será: la primera función multiplicada por la derivada de la segunda más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función; y de ser el cociente deberemos derivarlo colocando en el numerador la función del denominador multiplicada por la derivada del numerador menos la función del numerador multiplicada por la derivada del denominador y todo ello entre el denominador elevado al cuadrado.

Para el caso de la regla de la cadena tenemos que es una función elevada a un exponente, y la cual su derivada se obtiene colocando el exponente multiplicado por la función elevada al mismo exponente restándole una unidad multiplicado por la derivada de la propia función y esto hace que se vuelvan como eslabones de una cadena, por eso adquiere ese nombre; es decir, como su nombre lo dice: vamos derivando poco a poco, pero se hace cada vez más grande.

Esta regla la podemos utilizar para todas las derivadas vistas en el punto 3.3, es decir suma, producto y/o cociente y es donde le daremos una aplicación, ya que esta regla se puede aplicar en funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas. Y es por ello que se va haciendo cada vez más grande como eslabones.

Ahora realizaremos una serie de ejercicios en donde haremos uso de estas reglas para derivar suma, producto y cociente y terminaremos con diversos tipos de ejercicios para la regla de la cadena.

Ejemplos:

1. Calcula la derivada de la función $f(x) = 5x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 8$

Ejercicio	Procedimiento	Regla utilizada	Resultado obtenido
$f(x) = 5x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 8$	Solo derivamos cada término del polinomio de forma separada respetando el operador.	$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$	$D_x f(x) = 20x^3 + 6x^2 + 2x + 1$

2. Obtenga la derivada de la función $f(x) = 7x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 6x + 1$

Ejercicio	Procedimiento	Regla utilizada	Resultado obtenido
$f(x) = 7x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 6x + 1$	Solo derivamos cada término del polinomio de forma separada respetando el operador.	$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$	$D_x f(x) = 35x^4 + 12x^2 + 4x + 6$

3. Calcula la derivada de la función $f(x) = (4x^3 + 2x)(5x^2 + x)$

Ejercicio	Procedimiento	Regla utilizada	Resultado obtenido
$f(x) = (4x^3 + 2x)(5x^2 + x)$	Colocamos el primer término multiplicado por la derivada del segundo término más el segundo término multiplicado por el primer término.	$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$	$D_x f(x) = 100x^4 + 16x^3 + 30x^2 + 4x$

Derivamos con base en la regla del producto:	$D_x f(x) = (4x^3 + 2x)\, D_x (5x^2 + x) + (5x^2 + x)\, D_x (4x^3 + 2x)$
Ahora calculamos las derivadas que están indicadas y simplificamos	$D_x f(x) = (4x^3 + 2x)(10x + 1) + (5x^2 + x)(12x^2 + 2)$ $D_x f(x) = (40x^4 + 4x^3 + 20x^2 + 2x) + (60x^4 + 10x^2 + 12x^3 + 2x)$ $D_x f(x) = 100x^4 + 16x^3 + 30x^2 + 4x$

4. Calcula la derivada de la función $f(x) = (x^3 + 2x + 6)(1 + x)$

Ejercicio	Procedimiento	Regla utilizada	Resultado obtenido
$f(x) = (4x^3 + 2x)(5x^2 + x)$	Colocamos el primer término multiplicado por la derivada del segundo término más el segundo término multiplicado por el primer término.	$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$	$D_x f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 8$

Derivamos con base en la regla del producto:	$D_x f(x) = (x^3 + 2x + 6)D_x(1 + x) + (1 + x)D_x(x^3 + 2x + 6)$
Ahora calculamos las derivadas que están indicadas y simplificamos	$D_x f(x) = (x^3 + 2x + 6)(1) + (1 + x)(3x^2 + 2)$ $D_x f(x) = (x^3 + 2x + 6) + (3x^2 + 2 + 3x^3 + 2x)$ $D_x f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 8$

5. Calcula la derivada de la función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^3+2x}{3x}$

Ejercicio	Procedimiento	Regla utilizada	Resultado obtenido
$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{3x}$	En el numerador la función del denominador multiplicada por la derivada del numerador menos la función del numerador multiplicada por la derivada del denominador y todo ello dividido entre el denominador elevado al cuadrado.	$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ $= \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}$ $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$D_x f(x) = \frac{2x}{3}$

Derivamos con base en la regla del producto:	$D_x f(x) = \frac{(3x)D_x(x^3 + 2x) - (x^3 + 2x)D_x(3x)}{(3x)^2}$
Ahora calculamos las derivadas que están indicadas y simplificamos	$D_x f(x) = \frac{(3x)(3x^2 + 2) - (x^3 + 2x)(3)}{9x^2}$ $D_x f(x) = \frac{(9x^3 + 6x) - (3x^3 + 6x)}{9x^2}$ $D_x f(x) = \frac{9x^3 + 6x - 3x^3 - 6x}{9x^2}$ $D_x f(x) = \frac{6x^3}{9x^2}$ $D_x f(x) = \frac{2x}{3}$

6. Obtener la derivada de la función $f(x)=\frac{(x+2)}{3x}$

Ejercicio	Procedimiento	Regla utilizada	Resultado obtenido
$f(x)=\frac{(x+2)}{3x}$	En el numerador la función del denominador multiplicada por la derivada del numerador menos la función del numerador multiplicada por la derivada del denominador y todo ello dividido entre el denominador elevado al cuadrado.	$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ $=\frac{g(x)D_xf(x)\ -\ f(x)D_xg(x)}{[g(x)]^2}$ $\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$	$D_x f(x)=\frac{-x^2-1}{3x}$

Derivamos con base en la regla del producto:	$D_x f(x)=\frac{(3x)D_x(x+2)-(x2x)D_x(3x)}{(3x)^2}$
Ahora calculamos las derivadas que están indicadas y simplificamos	$D_x f(x)=\frac{(3x)(1)-(x^3+2x)(3)}{9x^2}$ $D_x f(x)=\frac{3x-(3x^3+6x)}{9x^2}$ $D_x f(x)=\frac{3x-3x^3-6x}{9x^2}$ $D_x f(x)=\frac{-3x^3-3x}{9x^2}$ $D_x f(x)=\frac{3x(-x^2-1)}{(3x)(3x)}$ $D_x f(x)=\frac{-x^2-1}{3x}$

Ahora veremos diferentes tipos de ejercicios aplicando la regla de la cadena en la que podremos notar que esta nos ayuda a resolver ejercicios de todo tipo.

7. Obtener la derivada de la función $f(x)=(2x^3-4x)^5$

Ejercicio	Procedimiento	Regla utilizada	Resultado obtenido
$f(x)=(2x^3-4x)^5$	Se coloca el exponente multiplicado por la función elevada al mismo exponente restándole una unidad multiplicado por la derivada de la propia función	$D_x[f(x)]^n$ $=n\,[f(x)]^{n-1}D_xf(x)$	$D_x f(x)$ $=(2x^3-4x)^4(30x^2-20)$

Derivamos con base en la regla del producto:	$D_x f(x) = 5(2x^3 - 4x)^4 D_x (2x^3 - 4x)$
Ahora calculamos las derivadas que están indicadas y simplificamos	$D_x f(x) = 5(2x^3 - 4x)^4(6x^2 - 4)$ $D_x f(x) = (2x^3 - 4x)^4(30x^2 - 20)$

8. Obtener la derivada de la función $f(x) = (4x^2 + 6x)^3(5x^3 - 2x)^2$

Ejercicio	Procedimiento	Regla utilizada	Resultado obtenido
$f(x) = (4x^2 + 6x)^3(5x^3 - 2x)^2$	Se coloca el exponente multiplicado por la función elevada al mismo exponente restándole una unidad multiplicado por la derivada de la propia función	$D_x[f(x)]^n = n\,[f(x)]^{n-1} D_x f(x)$ $D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x\,g(x) + g(x)D_x f(x)$	$D_x f(x) = (4x^2 + 6x)^3(10x^3 - 4x)(15x^2 - 2) + (5x^3 - 2x)^2(4x^2 + 6x)^2(24x + 18)$

Derivamos con base en la regla del producto:	$D_x f(x) = (4x^2 + 6x)^3 D_x (5x^3 - 2x)^2 + (5x^3 - 2x)^2 D_x (4x^2 + 6x)^3$
Ahora calculamos las derivadas que están indicadas y simplificamos	$D_x f(x) = (4x^2 + 6x)^3(2)(5x^3 - 2x)D_x (5x^3 - 2x) + (5x^3 - 2x)^2(3)(4x^2 + 6x)^2 D_x (4x^2 + 6x)$ $D_x f(x) = (4x^2 + 6x)^3(2)(5x^3 - 2x)(15x^2 - 2) + (5x^3 - 2x)^2(3)(4x^2 + 6x)^2(8x + 6)$ $D_x f(x) = (4x^2 + 6x)^3(10x^3 - 4x)(15x^2 - 2) + (5x^3 - 2x)^2(4x^2 + 6x)^2(24x + 18)$

9. Obtener la derivada de la función $f(x)=\frac{(2x+3)^5}{(3x-2)^3}$

Ejercicio	Procedimiento	Regla utilizada	Resultado obtenido
$f(x)=\frac{(2x+3)^5}{(3x-2)^3}$	En el numerador la función del denominador multiplicada por la derivada del numerador menos la función del numerador multiplicada por la derivada del denominador y todo ello dividido entre el denominador elevado al cuadrado.	$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ $=\frac{g(x)D_xf(x)\ -\ f(x)D_xg(x)}{[g(x)]^2}$ $D_x[f(x)]^n=n\,[f(x)]^{n-1}D_xf(x)$ $\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$	$D_xf(x)$ $=\frac{(10)(2x+3)^4-9(2x+3)^5]}{(3x-2)^4}$

Derivamos con base en la regla de la cadena y regla del cociente:	$D_xf(x)=\frac{(3x-2)^3D_x(2x+3)^5-(2x+3)^5D_x(3x-2)^3}{((3x-2)^3)^2}$
Ahora calculamos las derivadas que están indicadas y simplificamos	$D_xf(x)$ $=\frac{(3x-2)^3(5)(2x+3)^4(2)-(2x+3)^5(3)(3x-2)^2(3)}{(3x-2)^6}$ $D_xf(x)=\frac{(10)(2x+3)^4-9(2x+3)^5\|}{(3x-2)^4}$

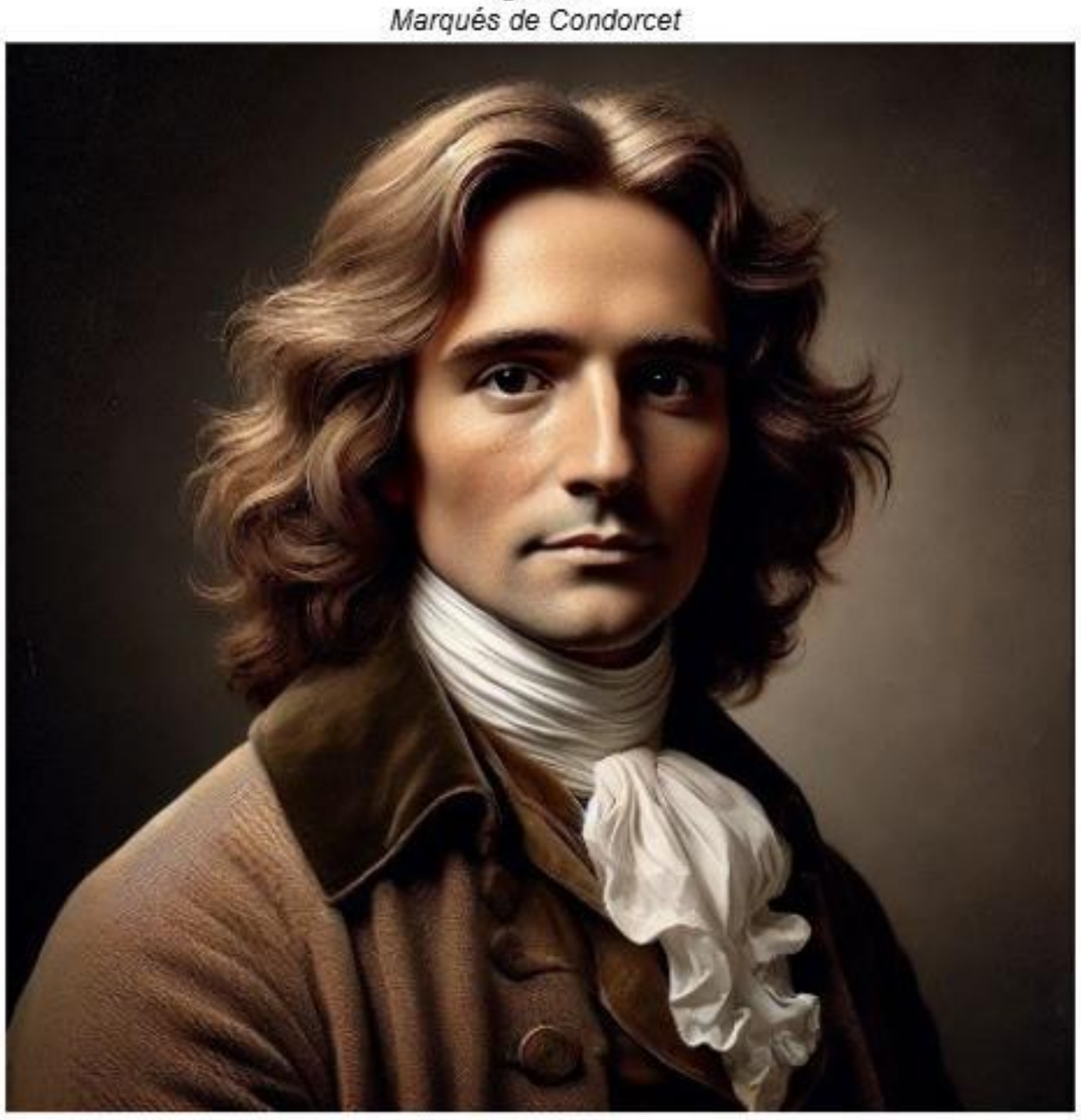
10. Obtener la derivada de la función $f(x)=e^{(2x-3)^5}$

Ejercicio	Procedimiento	Regla utilizada	Resultado obtenido
$f(x)=e^{(2x-3)^5}$	Derivamos con base en regla de funciones exponenciales y la regla de la cadena y aplicamos leyes de los radicales.	$D_xe^{g(x)}=e^{g(x)}\cdot D_xg(x)$ $D_x[f(x)]^n=n\,[f(x)]^{n-1}D_xf(x)$	$D_xf(x)$ $=\ 10e^{(2x-3)^5}(2x-3)^4$

Marqués de Condorcet

Marie Jean Antoine de Caritat fue un matemático, filósofo y político francés, contribuyó en el área de límites y continuidad, así como al desarrollo de la teoría de funciones. En el siglo XIX trabajó con Agustin-Louis Cauchy y Karl Weierstrass al revolucionar la forma de comprender y enseñar temas respecto al campo del cálculo.

Figura 7.
Marqués de Condorcet



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025). Creación propia con Open AI. ChatGPT [Marqués de Condorcet] https://files.oaiusercontent.com/file-

Derivamos con base en regla de funciones exponenciales y la regla de la cadena y:	$D_x f(x) = e^{(2x-3)^5} D_x(2x-3)^5$
Ahora calculamos las derivadas que están indicadas y simplificamos	$D_x f(x) = e^{(2x-3)^5} 5(2x-3)^4 D_x(2x-3)$ $D_x f(x) = e^{(2x-3)^5}(5)(2x-3)^4(2)$ $D_x f(x) = 10e^{(2x-3)^5}(2x-3)^4$

11. Obtener la derivada de la función $\boldsymbol{f(x)} = \ln\sqrt{1+x^2}$

Ejercicio	Procedimiento	Regla utilizada	Resultado obtenido
$\boldsymbol{f(x)} = \ln\sqrt{1+x^2}$	Derivamos con base en regla de funciones logarítmicas y la regla de la cadena y aplicamos leyes de los radicales.	$D_x \ln f(x) = \frac{D_x f(x)}{f(x)}$ $D_x[f(x)]^n = n\,[f(x)]^{n-1} D_x f(x)$ $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$D_x f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Derivamos con base en regla de funciones logarítmicas y la regla de la cadena y aplicamos leyes de los radicales:	$D_x f(x) = \frac{D_x(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$
Ahora calculamos las derivadas que están indicadas y simplificamos	$D_x f(x) = \frac{D_x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+x^2}}$ $D_x f(x) = \frac{\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)}{\sqrt{1+x^2}}$ $D_x f(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}}$ $D_x f(x) = \frac{x}{1+x^2}$



Actividad 7. Regla para derivar suma, productos, cociente y regla de la cadena

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para comenzar el ejercicio .



3.5 Derivadas sucesivas

Conforme hemos ido a avanzando nos damos cuenta de que existen teoremas que al derivar una función se necesita volver a derivar una parte de ella, algo similar sucede en la derivación sucesiva. Esta consiste en derivar una función y luego derivar su derivada y así sucesivamente, hasta el momento que el propio ejercicio te lo solicita o en su defecto cuando se llega a derivar una constante y su resultado sería cero ahí termina la derivación sucesiva.

Para ello tenemos formas de denotar esas derivadas sucesivas

$$f'(x) es\ la\ primera\ derivada$$
$$f''(x) es\ la\ segunda\ derivada$$
$$f'''(x) es\ la\ tercer\ derivada$$

Así continuamos, pero también podemos denotarlas de la siguiente manera:

$$D^2xf(x)\ es\ la\ segunda\ derivada$$
$$D^3xf(x)\ es\ la\ tercera\ derivada$$
$$D^4xf(x)\ es\ la\ cuarta\ derivada$$

Ejemplo:

1. Calcula la quinta derivada de la función: $f(x) = 6x^7 + 4x^6 - x^4 + \frac{2}{x^3} - 5x - 8$

   Obteniendo la primera derivada $f'(x) = 42x^6 + 24x^5 - 4x^3 + \frac{6}{x^4} - 5$

   Obteniendo la segunda derivada $f''(x) = 252x^5 + 120x^4 - 12x^2 - \frac{24}{x^5}$

   Obteniendo la tercera derivada $f'''(x) = 1260x^4 + 480x^3 - 24x - \frac{120}{x^6}$

   Obteniendo la cuarta derivada $f^{IV}(x) = 5040x^3 + 1440x^2 - 24 + \frac{720}{x^7}$

   Terminamos con la quinta derivada $f^{V}(x) = 15120x^2 + 2880x - \frac{5040}{x^8}$

2. Obtén las derivadas sucesivas de la función $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 3$

$$D_x f(x) = 12x^2 - 18x + 6$$

$$D_x{}^2 f(x) = 24x - 18$$

Concluimos con la tercera derivada: $D_x{}^3 f(x) = 24$

Concluimos con la tercera derivada debido a que llegamos a una constante y su deriva es cero, y si seguimos derivando ahora el cero estaremos obteniendo por resultado siempre cero.

Actividad 8. Derivadas sucesivas

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para comenzar el ejercicio .



Actividad 9. Ejercicio autoevaluable

Instrucciones: para reforzar los temas vistos en este Módulo III se te pide realizar el siguiente ejercicio, para comenzar, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividad (Estudiante) y responde a la actividad denominada MIII Ejercicio Autoevaluable.

Resumen

Este módulo te ha facilitado comprender el comportamiento de una función a partir de los cambios que experimenta. Partimos del incremento de una función que nos permite calcular cuánto ha aumentado o disminuido el valor de la variable independiente de la función al recorrer una distancia. A partir del análisis del incremento, profundizamos en la definición de derivada, definida como el límite del cociente del incremento en la variable dependiente Δy entre el incremento de la variable independiente Δx. También vimos distintas formas de representar la derivada, tanto desde la derivada por definición y sus diferentes notaciones.

Ya hemos concluido el módulo 3 por ello ya aprendimos a través de todo lo visto en este módulo que la derivada no solo es una herramienta de cálculo, también es una forma de analizar y predecir el comportamiento de diversos fenómenos que involucran cambio y esto lo vimos conforme avanzamos en cada uno de los temas.

Ahora que hemos concluido con las reglas para derivar, observaste que no es complicado derivar y que mientras más practiques más lo dominarás, empezaste por conocer la derivada por definición, de una forma gráfica, con lo cual pudiste deducir a la derivada por definición que permite inferir reglas de derivación. Después, viste derivadas algebraicas, logarítmicas y exponenciales, con ellas empezaste a dominar cada vez más los ejercicios, hasta llegar a la derivación sucesiva donde ahora sí, pusiste en práctica lo aprendido en el módulo, y comprendiste que es necesario la práctica de los ejercicios y así se comprende mejor el tema o los temas, que no necesitarás ver las reglas de derivación, pues ya las aprendiste de memoria, sobre todo porque las razonaste.

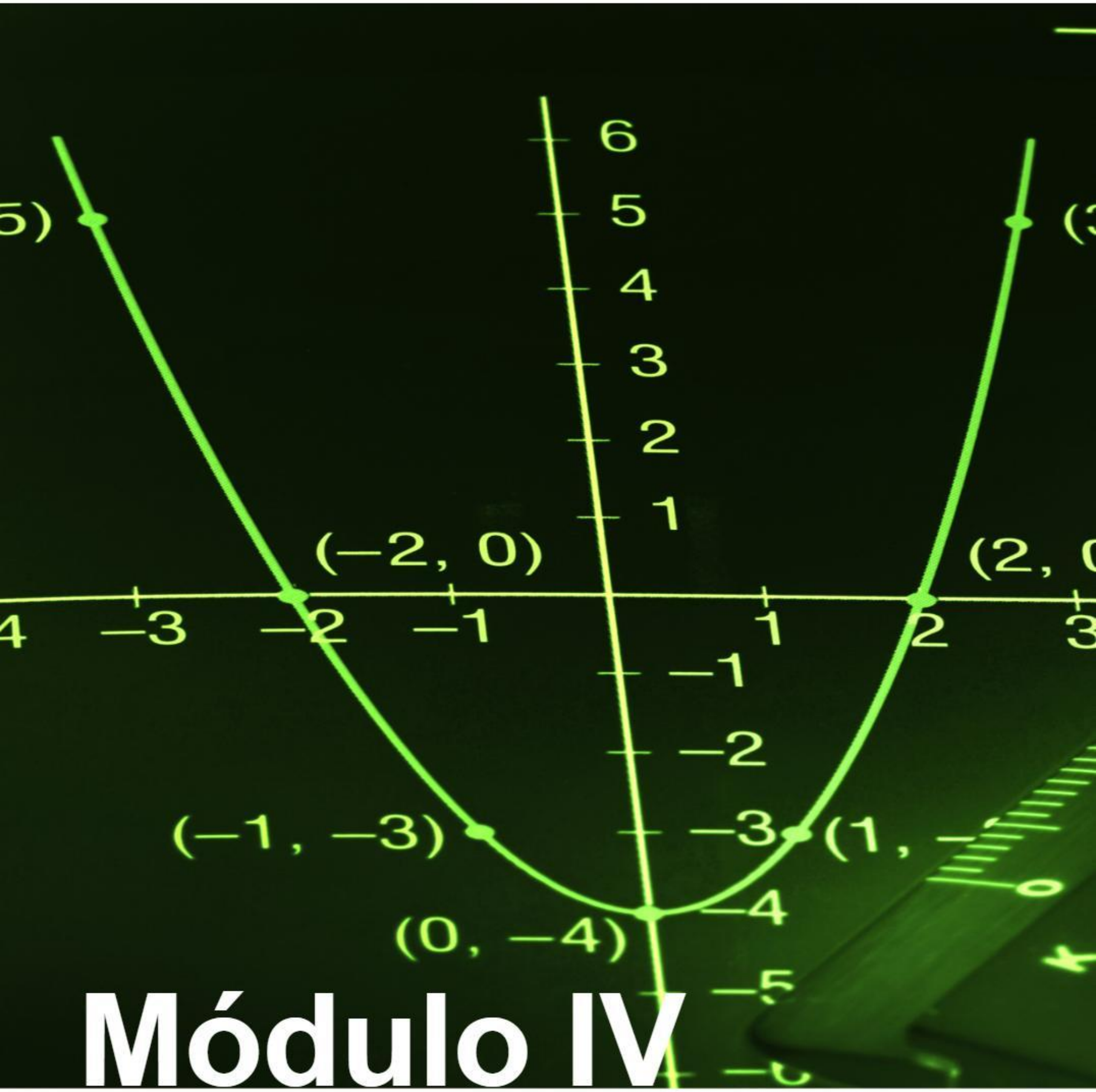


Glosario

- **Abscisa:** que pertenece al eje que conocemos como *x*, y se posicionan horizontalmente.
- **Adición:** una de las operaciones básicas de la aritmética y consiste en agregar dos o más números para obtener una cantidad total, llamado suma o resultado.
- **Cociente:** nombre utilizado para referirse al resultado de la división.
- **Derivada:** es la razón de cambio instantánea con la que varía el valor de una función matemática, según se modifique el valor de su variable independiente.
- **Función algebraica:** modela relaciones entre variables mediante operaciones algebraicas como suma, resta, multiplicación, división y potencias.
- **Función constante:** es la que siempre toma la misma imagen para cualquier valor de la variable independiente.
- **Función exponencial:** tiene una constante como base y el exponente es una expresión que posee a la variable independiente.
- **Función lineal:** función polinomial de grado uno.
- **Función logarítmica:** en estas, la variable independiente es la base o argumento de un logaritmo.
- **Función polinomial:** se define como una suma de términos con potencias de la variable *x* , y su grado depende del exponente más alto.
- **Indeterminación:** división $\frac{a}{b}$ cuyo resultado no está definido pues tanto a como b tienden a 0.
- **Incremento:** aumento en el valor de una variable.
- **Ordenada:** pertenece al eje que conocemos como *y*, y se posicionan verticalmente.
- **Pendiente:** indica la cantidad en que se incrementa o disminuye el valor de la variable dependiente, cuando la variable independiente aumenta una unidad.
- **Potencia:** relación existente entre una base y un exponente, cuando el exponente es entero positivo, indica el número de veces que multiplicamos la base por sí misma.
- **Producto:** término utilizado para referirse al resultado de la multiplicación.
- **Recta secante:** recta que corta una curva en dos puntos.
- **Recta tangente:** es la línea que toca una curva en un punto y sigue su misma dirección en ese lugar.
- **Regla:** norma que debe cumplirse, método para hacer operaciones.

Referencias

- Contreras, L., et al. (2015). *Cálculo diferencial e integral*. Librería Universitaria. 3a ed. 13ª reimpresión. UAEM.
- Haeussler, F. (2003). *Matemáticas para administración y economía*. 10a ed. Ed. Pearson educación. México.
- Peters, M. (2022). *Álgebra y trigonometría*. Ed. Reverté.
- Stewart, J. (2013). *Cálculo de una variable*. 7a ed. Cengage Learning.
- Swokowski, E. W., y Cole, J. A. (2006). *Cálculo con geometría analítica*. 9ª ed. International Thomson Editores.
- Larson, R., y Edwards, B. H. (2006). *Cálculo* 8ª ed. McGraw-Hill.
- Leithold, L. (2001). *El cálculo con geometría analítica* 7a ed. Oxford University Press.



Módulo IV

Aplicaciones de la derivada

Propósito del Módulo

Modela funciones de problemas de aplicación-optimización usando los criterios de las derivadas para resolver situaciones teóricas y de su entorno.

Presentación

En este capítulo exploraremos distintas aplicaciones de la herramienta central del cálculo; es decir, la derivada, que permite analizar el comportamiento de funciones.

Iniciaremos con razón de cambio, que, al analizarla a fondo, nos daremos cuenta de que es una aplicación de la derivada por definición, y que razón de cambio es un tema que se aplica mucho en física; en el cambio de temperatura, en el cambio del precio del dólar o del euro, etcétera.

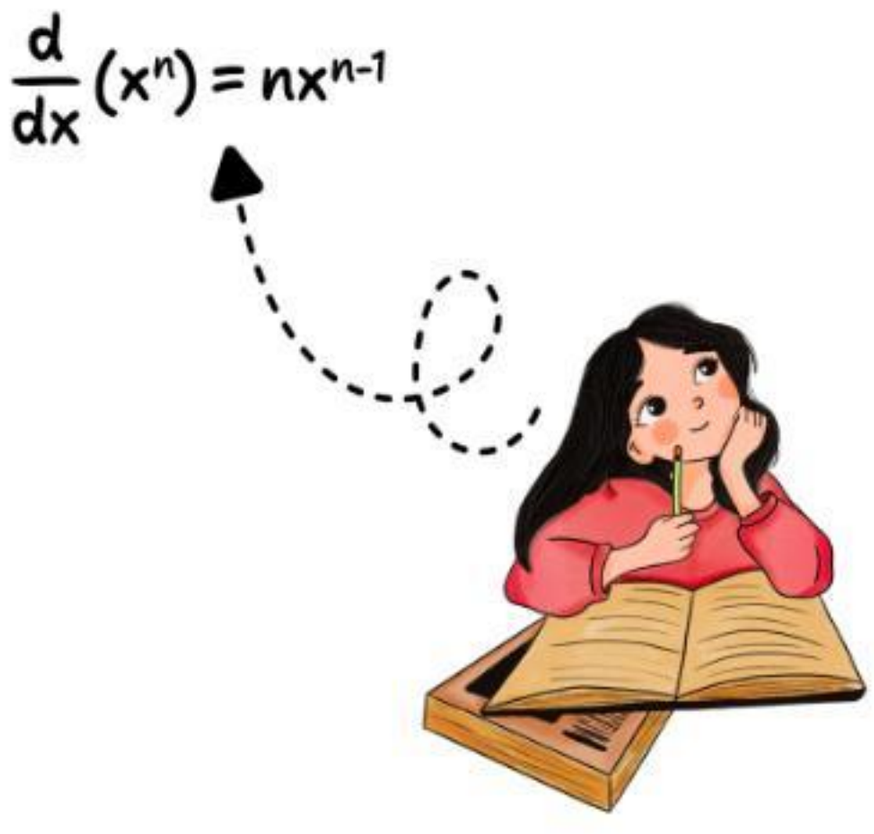
Respecto a la ecuación de la recta tangente y normal a la curva, aplicaremos lo aprendido en relación con la derivada y sabremos que, de igual forma, se aplica en la física y en la ingeniería; todo ello nos servirá para modelar y analizar movimientos y fuerzas de objetos en movimiento.

Para el caso de la función creciente y decreciente, máximos y mínimos, pondrás en práctica los conocimientos adquiridos, respecto a la derivada, ya que estos conceptos se pueden aplicar en la optimización de procesos, y la predicción de fenómenos naturales también se utiliza en los sistemas económicos.

El criterio de la segunda derivada nos ayuda a identificar la concavidad de una función y a determinar máximos y mínimos locales, fundamental para interpretar aspectos de una gráfica, así como para resolver problemas de optimización. Nos enfocaremos en comprender el comportamiento de funciones, principalmente en su comportamiento creciente o decreciente y puntos de inflexión.

También se abordan las funciones logarítmicas y exponenciales; comprender su comportamiento gráfico y algebraico te permitirá modelar y analizar fenómenos complejos de forma sencilla, las cuales serán empleadas para comprender las funciones inversas, lo que nos llevará, de forma intuitiva, a el proceso inverso de la derivada; es decir, la antiderivada, lo cual corresponde a entender el teorema fundamental del cálculo.

En este módulo se hablará de las funciones trigonométricas, útiles en áreas como las matemáticas y la física; además, conoceremos su forma gráfica y algebraica, haciendo especial énfasis en el periodo.





Actividad 1. Evaluación diagnóstica

Instrucciones: antes de iniciar con la revisión de los contenidos del módulo IV, te invitamos a responder a la evaluación diagnóstica.

Esto te ayudará a descubrir los conocimientos previos que tienes sobre los temas a abordar y, al mismo tiempo, le permitirá a tu docente conocer tus fortalezas y debilidades.

Para comenzar con el ejercicio, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada: MIV Evaluación Diagnóstica.



Doctora en Ciencias Sociales
Martha Patricia Zarza Delgado
Rectora

Doctora en Ciencias Computacionales
Arianna Becerril García
Secretaria de Ciencia

Doctor en Ciencias Agropecuarias y Recursos Naturales
Francisco Herrera Tapia
Secretario Académico

Doctora en Farmacia y Tecnología Farmacéutica
Mariana Ortiz Reynoso
Secretaria de Extensión, Vinculación y Promoción de la Empleabilidad

Doctor en Ciencias Sociales
Jorge Alejandro Vásquez Caicedo
Secretario de Gobernanza Universitaria

Doctora en Estudios Latinoamericanos
Cinthya Ortega Salgado
Secretaria de Identidad y Cultura

Doctora en Educación
Miriam Sierra López
Secretaria de Finanzas

Doctora en Administración
Miriam Padilla Mora
Secretaria de Gestión y Administración Universitaria

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Luja
Secretaria de Desarrollo y Fortalecimiento Institucional

Doctora en Ciencias
Miriam Sánchez Ángeles
Secretaria de Igualdad Sustantiva y Cuidados

Doctor en Ciencias e Ingeniería de Materiales
José Guadalupe Miranda Hernández
Secretario de Centros Universitarios y Unidades Académicas Profesionales

Maestra en Derecho
Evangelina Sales Sánchez
Consejera Jurídica Universitaria

Doctora en Diseño
María Fernanda Valdés Figueroa
Directora de Comunicación Social Universitaria

Doctor en Políticas Públicas
Bernardo J. Almaraz Calderón
Jefe de la Oficina de la Rectoría

Gottfried Wilhelm Leibniz

Matemático, filósofo y científico alemán. Inventor independiente del cálculo, uso una notación diferencial que facilita la escritura y comprensión de conceptos clave; introdujo la notación *dy* y *dx*. Formuló la regla de la cadena, la regla del producto.

Figura 8.
Gottfried Wilhelm Leibniz



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025). Creación propia con Open AI. ChatGPT [Gottfried Wilhem Leibniz] https://files.oaiusercontent.com/file

4.1 Razón de cambio (cinemática)

Es muy importante entender el concepto de razón de cambio de una función, también conocida como velocidad instantánea de una partícula en movimiento y su gráfica, es una analogía de velocidad.

La obtenemos calculando el valor de un límite del cambio de la Δy con respecto al cambio de las Δx, y esto nos permite validar que tanto cambia Δy y Δx, cuando el cambio se acerca a ser cero, tenemos lo siguiente haciendo uso se limites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Visto de otra manera, sea $s = s\,(t)$ una función que proporciona la posición de un objeto que se mueve en línea recta, entonces la razón de cambio en el instante $t = t_o$ es:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta x) - s(t_0)}{\Delta x}$$

Siempre que el límite exista.

De igual manera, retomando la forma en que veníamos utilizando y veremos que será lo mismo que:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Y nos damos cuenta de que la fórmula es exactamente la misma que la de una derivada por definición.

Ejemplos:

1. Resuelve el siguiente problema:

¿Cuál es la velocidad de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal de coordenadas si está dada por la función:

$s\,(t) = -4t^2 + 10t + 6$, con un instante indicado de $t = 3$

1. Identificamos a la función	$s\,(t) = -4t^2 + 10t + 6$
2. Identificamos todas las t en la función para sustituir como $x + \Delta x$	$s\,(t + \Delta t) = -4\,(t + \Delta t)^2 + 10\,(t + \Delta t) + 6$
3. Desarrollamos el binomio al cuadrado y simplificamos	$-4\,(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) + 10\,(t + \Delta t) + 6$ $-4t^2 - 8t\Delta t - 4(\Delta t)^2 + 10t + 10\Delta t + 6$
4. Ahora obtenemos $f\,(t + \Delta t) - f\,(t)$	$-4t^2 - 8t\Delta t - 4\,(\Delta t)^2 + 10t + 10\Delta t + 6 - (-4t^2 + 10t + 6)$ $-4t^2 - 8t\Delta t - 4\,(\Delta t)^2 + 10t + 10\Delta t + 6 + 4t^2 - 10t - 6$
5. Simplificamos sumando los términos semejantes	$-8t\Delta t - 4\,(\Delta t)^2 + 10\Delta t$
6. Obtenemos el cociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	$\frac{-8t\Delta t - 4(\Delta t)^2 + 10\Delta t}{\Delta t}$

7. Factorizamos por factor común el denominador	$\frac{\Delta t(-8t - 4\Delta t + 10)}{\Delta t}$
8. Como $\frac{\Delta x}{\Delta x}$ =1	-8t - 4Δt + 10
9. Ahora obtenemos el limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	$\lim_{\Delta t \to 0} -8t - 4\,\Delta\, t + 10$ -8t + 10
10. Si el problema solicita que t = 3, sustituimos	-8 (3) + 10 -24 + 10 $s\,(t)$ = -4t^2 + 10t + 6 = -14

¿Cuál es la velocidad de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal de coordenadas si está dada por la función:

$s\,(t)$ = 5t^2 + 8t + 4, con un instante indicado de t = 2

1. Identificamos a la función	$s\,(t)$ = 5t^2 + 8t + 4
2. Identificamos todas las t en la función para sustituir como $x + \Delta x$	$s\,(t + \Delta t)$ = 5 $(t + \Delta t)^2$ + 8 $(t + \Delta t)$ + 4
3. Desarrollamos el binomio al cuadrado y simplificamos	5 (t^2 + 2$t\Delta t$ + $(\Delta t)^2$) + 8 $(t + \Delta t)$ + 4 5t^2 + 10$t\Delta t$ 5 $(\Delta t)^2$ + 8t + 8Δt + 4
4. Ahora obtenemos $f\,(t + \Delta t)$ - $f\,(t)$	5t^2 + 10$t\Delta t$ + 54$(\Delta t)^2$ + 8t + 8Δt + 4 - (5t^2 + 8t + 4) 5t^2 + 10$t\Delta t$ + 5 $(\Delta t)^2$ + 8t + 8Δt + 4 + 5t^2 - 8t + 4
5. Simplificamos sumando los términos semejantes	10$t\Delta t$ + 5 $(\Delta t)^2$ + 8Δt
6. Obtenemos el cociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	$\frac{\mathbf{10}t\Delta t+\mathbf{5}(\Delta t)^2+\mathbf{8}\Delta t}{\Delta t}$
7. Factorizamos por factor común el denominador	$\frac{\mathbf{10}t\Delta t+\mathbf{5}(\Delta t)^2+\mathbf{8}\Delta t}{\Delta t}$
8. Como $\frac{\Delta x}{\Delta x}$ =1	10t + 5Δt + 8
9. Ahora obtenemos el limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	$\lim_{\Delta t \to 0} 10t + 5\,\Delta\, t + 8$ 10t + 8

10. Si el problema solicita que $t = 2$, sustituimos	10 (2) + 8 20 + 8 $s(t) = -4t^2 + 10t + 6 = 28$

Otros ejemplos para aplicaciones de razón de cambio los tenemos en los índices de reprobación en la asignatura que llevaste en segundo semestre como lo es pensamiento matemático II, el porcentaje de deserción escolar, los costos de producción, la fuerza de los vientos en un huracán.

En ocasiones las razones de cambio van dirigidas con respecto a un tiempo, por ello se aplica más a la velocidad, pero se puede buscar respecto a cualquier variable, mucha de su aplicación va de la mano con física, para ser más específicos en el área de cinemática.





4.1.1 Ecuación de la recta tangente y normal a una curva

¿Qué sucedería si nos enfrentamos a un problema como el siguiente?: Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 5x - 8$ con ángulo de inclinación de 115°, cómo obtendríamos la ecuación?, que tendríamos que hacer, por donde empezaríamos?, pues bien veamos.

Empecemos por mencionar que la recta tangente a una curva en un punto es la que pasa por la curva en ese punto y tiene la misma pendiente que la curva en el mismo punto.

La ecuación de la recta normal es perpendicular a la recta tangente en ese punto.

A la recta normal en lo sucesivo la denotaremos como R.N. y a la recta tangente como R.T.

Llego el momento que pongas en práctica los temas vistos en los módulos anteriores, y así lograr averiguar para que nos sirven, que podemos resolver con ellos.

Las derivadas tienen varias aplicaciones, una de las más utilizadas es la obtención de la recta tangente y normal a la curva; para ello, podemos seguir los siguientes cuatro pasos:

1. Sustituir el valor de x_0 en $f(x)$ y con ello obtendremos las coordenadas del punto P, $P(x_0, f(x_0))$

2. Obtener la derivada $f'(x)$ y sustituimos a x_0 en $f'(x_0) = m$ y con ello obtendremos la pendiente

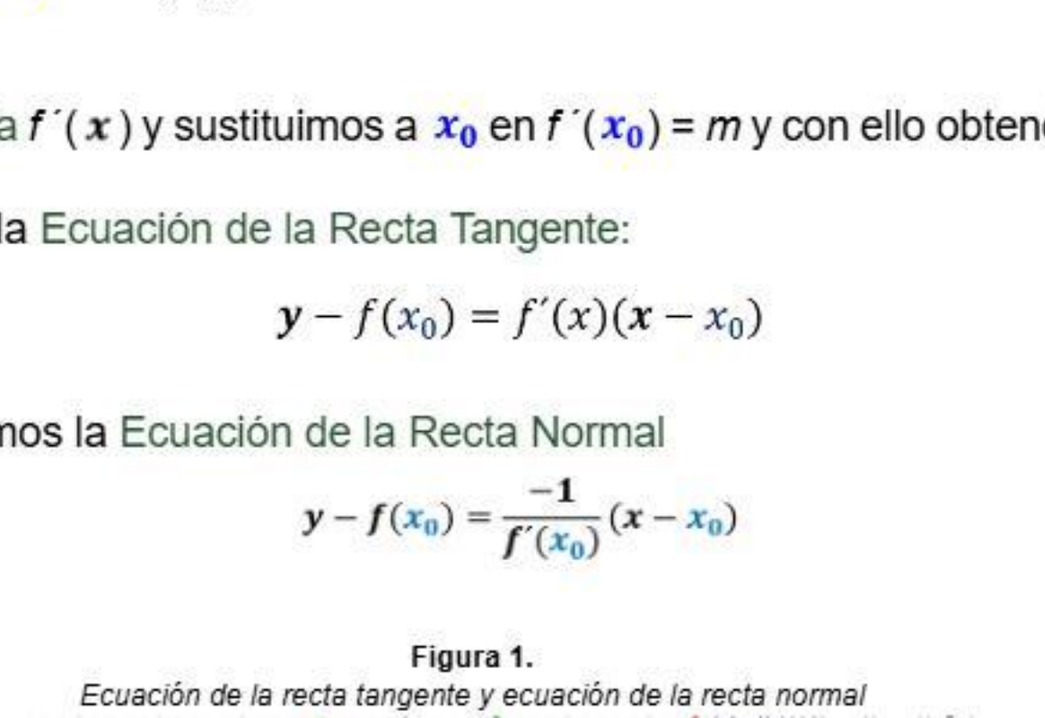
3. Ahora obtenemos la Ecuación de la Recta Tangente:

$$y - f(x_0) = f'(x)(x - x_0)$$

4. Por último obtenemos la Ecuación de la Recta Normal

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Figura 1.
Ecuación de la recta tangente y ecuación de la recta normal



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Ecuación de la Recta Tangente y Ecuación de la Recta Normal].

Para el caso de trazar la gráfica, localizamos el punto $P(x_0, f(x_0))$ y obtenemos el ángulo de inclinación de la recta tangente de la siguiente forma:

1. $\alpha = \tan^{-1} m$ (este ángulo se grafica en el punto 1° R.T.)
2. $\beta = \alpha + 90°$ (este ángulo se grafica en el punto 1° R.N.)

Ejemplos:

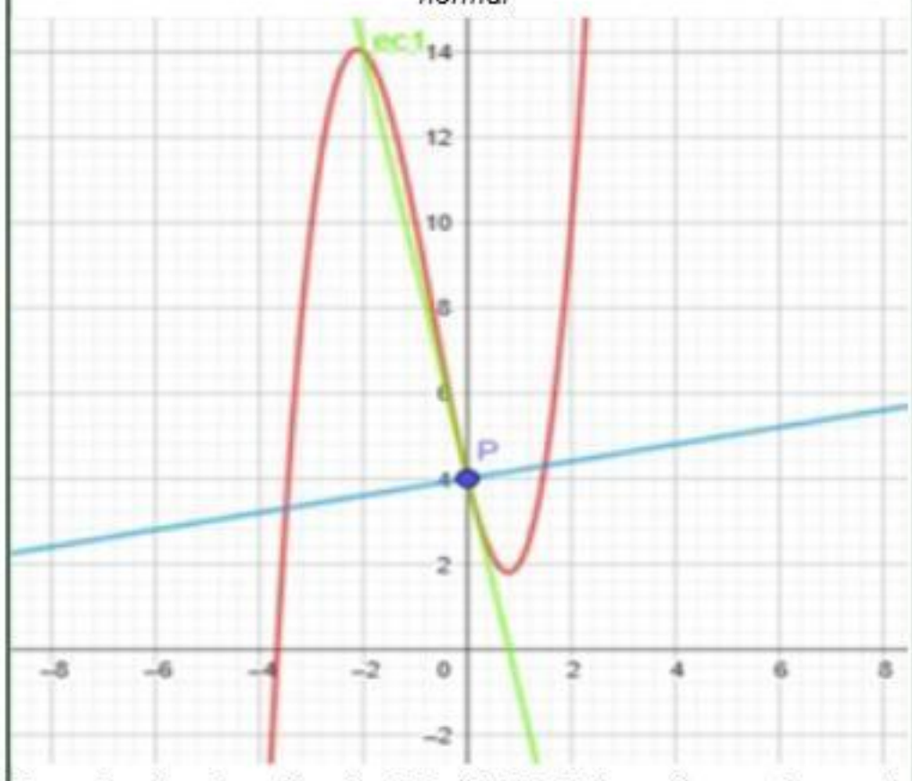
1. Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 4$, en el punto de la abscisa $x = 0$, trazar la gráfica, así como ambas rectas.

Pasos:	Procedimiento
1. Sustituir x_0 en $f(x_0)$, $P(x_0, f(x_0))$	$f(0) = (0)^3 + 2(0)^2 - 5(0) + 4$ $f(0) = 4$ $P(0, 4)$
2. Obtener $f'(x)$ y sustituir a x_0 en ella y obtener la pendiente de la tangente, es decir: $f'(x_0) = m$	$f'(x_0) = 3x^2 + 4x - 5$ $m = f'(x_0) = 3x^2 + 4x - 5$ $m = 3(0)^2 + 4(0) - 5$ $m = -5$
3. Ecuación de la recta tangente: $y - f(x_0) = f'(x)(x - x_0)$	$y - 4 = -5(x - 0)$ $y - 4 = -5x$ $y = -5x + 4$
4. Ecuación de la recta normal $y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$	$y - 4 = \frac{-1}{-5}(x - 0)$ $-5(y - 4) = -1(x - 0)$ $-5y + 20 = -x$ $y = \frac{-x - 20}{-5}$ $y = \frac{x + 20}{5}$

	$\alpha = \tan^{-1} -5$ α = -78.69 α = 180 - 78.69 α = 101.31

Ahora graficamos, para ello, obtenemos el ángulo de la tangente: $\alpha = \tan^{-1} m$
$\beta = \alpha - 90°$
Aplicando ángulo reducido y ángulo en posición normal, para calcular el ángulo correcto

Figura 2.
Ejercicio de Ecuación de la recta tangente y ecuación de la recta normal



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Ejercicio de ecuación de la recta tangente y ecuación de la recta normal].

2. Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x) = x^2 + 3x - 1$ con una pendiente igual a 3.

Pasos:	Procedimiento
2. Obtener $f'(x)$ y sustituir a x_0 en ella y obtener la pendiente de la tangente, es decir: $f'(x_0) = m$	$f'(x_0) = 2x + 3$ $3 = f'(x_0) = 2x + 3$ $3 = 2x + 3$ $2x + 3 = 3$ $x = \frac{3-3}{2}$ $x = 0$

1. Sustituir x_0 en $f(x_0)$, $P(x_0, f(x_0))$ sustituir el valor de x_0 encontrado en el paso 2 (paso anterior).	$f(0) = (0)^2 + 3(0) - 1$ $f(0) = -1$ $P(0, -1)$
3. Ecuación de la recta tangente: $y - f(x_0) = f'(x)(x - x_0)$	$y + 1 = 3(x - 0)$ $y + 1 = 3x$ $y = 3x - 1$
4. Ecuación de la recta normal $y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$	$y + 1 = \frac{-1}{3}(x - 0)$ $3(y + 1) = -1(x - 0)$ $3y + 3 = -x$ $y = \frac{-x-3}{3}$
5. Obtenemos el ángulo de la tangente: $\alpha = \tan^{-1} m$	$\alpha = \tan^{-1} 3$ $\alpha = 71.56$

3. Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en $x = 2$, con la cual Del Toro se montó en la bicicleta, para la carrera de su vida a su corta edad.

Pasos:	Procedimiento
1. Sustituir x_0 en $f(x_0)$, $P(x_0, f(x_0))$	$f(2) = (2)^2 - 2(2)^2 + 1$ $f(2) = -3$ $P(2, -3)$
2. Obtener $f'(x)$ y sustituir a x_0 en ella y obtener la pendiente de la tangente, es decir: $f'(x_0) = m$	$f'(x_0) = 2x - 2$ $f'(x_0) = 2x + 3$ $f'(\mathbf{2}) = 2(2) + 3$ $f'(\mathbf{2}) = 7$ $m = 7$
3. Ecuación de la recta tangente: $y - f(x_0) = f'(x)(x - x_0)$	$y + 3 = 7(x - 2)$ $y + 3 = 7x - 14$ $y = 7x - 17$

4. Ecuación de la recta normal $y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$	$y + 3 = \frac{-1}{7}\ (x - 2)$ $7\,(y + 3) = -1\,(x - 2)$ $7y + 21 = -x + 2$ $y = \frac{-x-19}{7}$
5. Obtenemos el ángulo de la tangente: $\alpha = \tan^{-1} m$	$\tan^{-1} 7$ $\alpha = 81.86$



Actividad 3. Ecuación de la recta tangente y normal a una curva

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para iniciar el ejercicio.



4.2 Funciones creciente y decreciente

Se sabe que una función es creciente cuando aumenta el valor de la variable independiente, y esto hace que también aumente el valor de la variable dependiente. Esto también lo podemos ver gráficamente, ya que cuando es creciente se sesga hacia arriba siempre de izquierda a derecha, esto es, que cuando los valores de la variable independiente que está representada por la altura, estos aumentan.

Para el caso de la función decreciente sucede que si aumenta la variable independiente la dependiente disminuye. En el caso de su representación gráfica esto se ve como que se inclina hacia debajo de izquierda a derecha, por lo cual los valores de y van disminuyendo.

La función *f* es creciente en el intervalo (a,b) si $f(x_1) < f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in (a,b)$

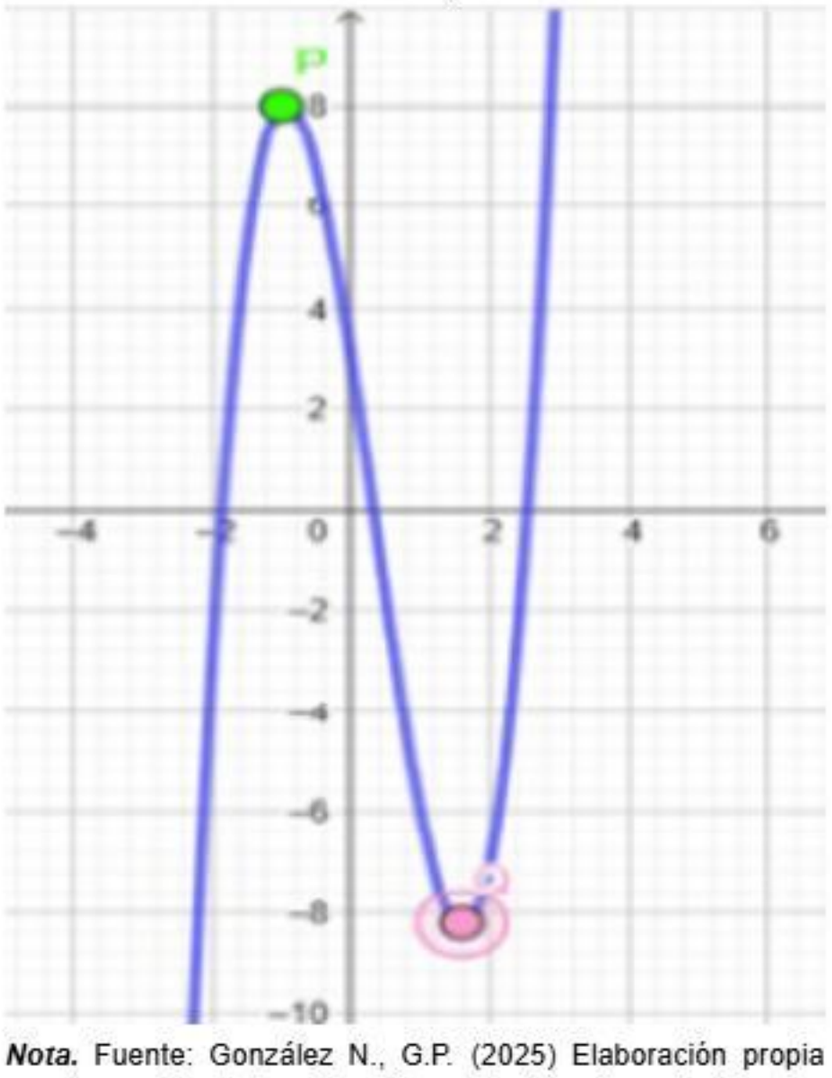
La función *f* es decreciente en el intervalo (a,b) si $f(x_1) > f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in (a,b)$

Aquí haremos uso de algo que nombraremos puntos críticos, y estos son aquellos donde la derivada de la función es igual a cero o no está definida. Son puntos muy importantes porque pueden se máximos o mínimos locales (que también veremos en el siguiente tema) o puntos de inclinación de la función.

Los valores extremos serán los puntos en los que la función llega a sus valores máximos o mínimos dentro de un intervalo, estos pueden ser locales o globales.

Los locales son dentro de su mismo entorno y los globales están en todo el intervalo.

Figura 3.
Función creciente y decreciente



Es creciente antes de P y después de Q

Es decreciente entre P y Q

Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Función creciente y decreciente].

Haremos uso de la pendiente de la recta tangente ya vista en el módulo; para ello nos ayudaremos a definir si la pendiente es positiva o negativa, visto de otra forma:

Si $f'(a) > 0$ entonces f es creciente en $x = a$

Si $f'(a) < 0$ entonces f es decreciente en $x = a$

Los pasos para obtener los intervalos donde la función es creciente y decreciente, así como los puntos máximos y mínimos (tema que veremos a continuación) son los siguientes:

1. Calcular la derivada, es decir: $f'(x)$

2. Aquí encontraremos los puntos críticos y para ello resolveremos la ecuación $f'(x) = 0$ Estos puntos, junto con aquellos donde la derivada no existe, $f'(x)$ no existe, se llaman puntos críticos de la función f. Los valores extremos se encuentran entre estos puntos.

3. Resolveremos $f'(x) = 0$ para encontrar los puntos críticos de x.

4. Se obtiene la segunda derivada, es decir $f''(x)$, esto con la intención de conocer los puntos críticos.

5. Ahora los valores obtenidos en el punto 3 se sustituyen en la segunda derivada para encontrar las coordenadas de los puntos máximos y mínimos.

6. Obtendremos las coordenadas de los puntos máximo y mínimo sustituyendo a x_0 en $f(x)$

7. Trazaremos la gráfica

8. Y estableceremos los intervalos donde la función es creciente y decreciente.

4.2.1 Máximo y mínimo de una función

Los puntos máximos son los puntos donde la función alcanza su valor más alto dentro de un intervalo y esto se puede ver gráficamente. más altos de la gráfica y los puntos mínimos son los puntos donde la gráfica alcanza su valor más bajo en un intervalo.

$f(a)$ es valor máximo absoluto si $f(a) \geq f(x)$ para toda x ϵD_f

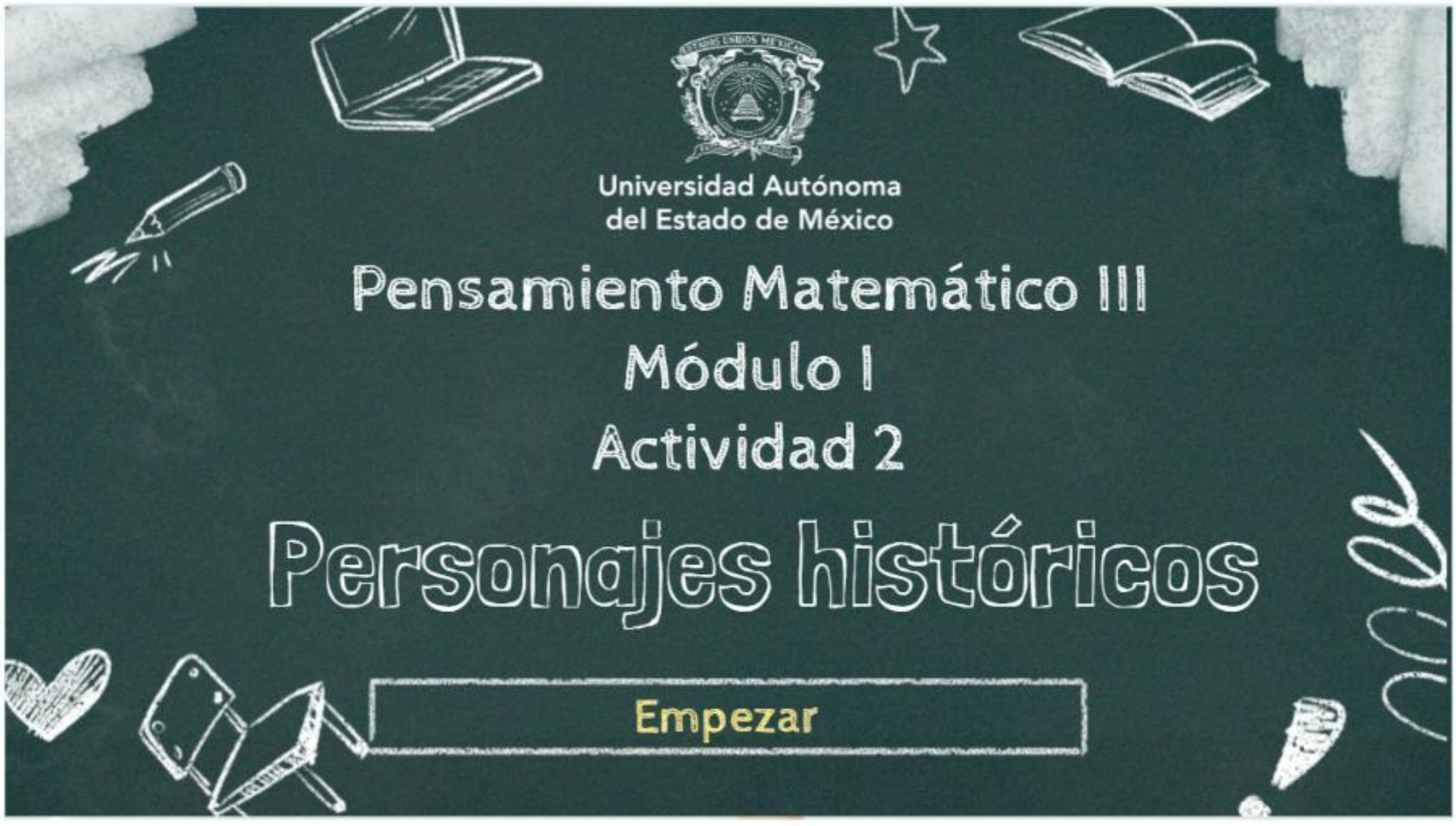
$f(a)$ es valor mínimo absoluto si $f(a) \leq f(x)$ para toda x ϵD_f

Podemos tener puntos máximos y mínimos absolutos o locales dentro de una gráfica.



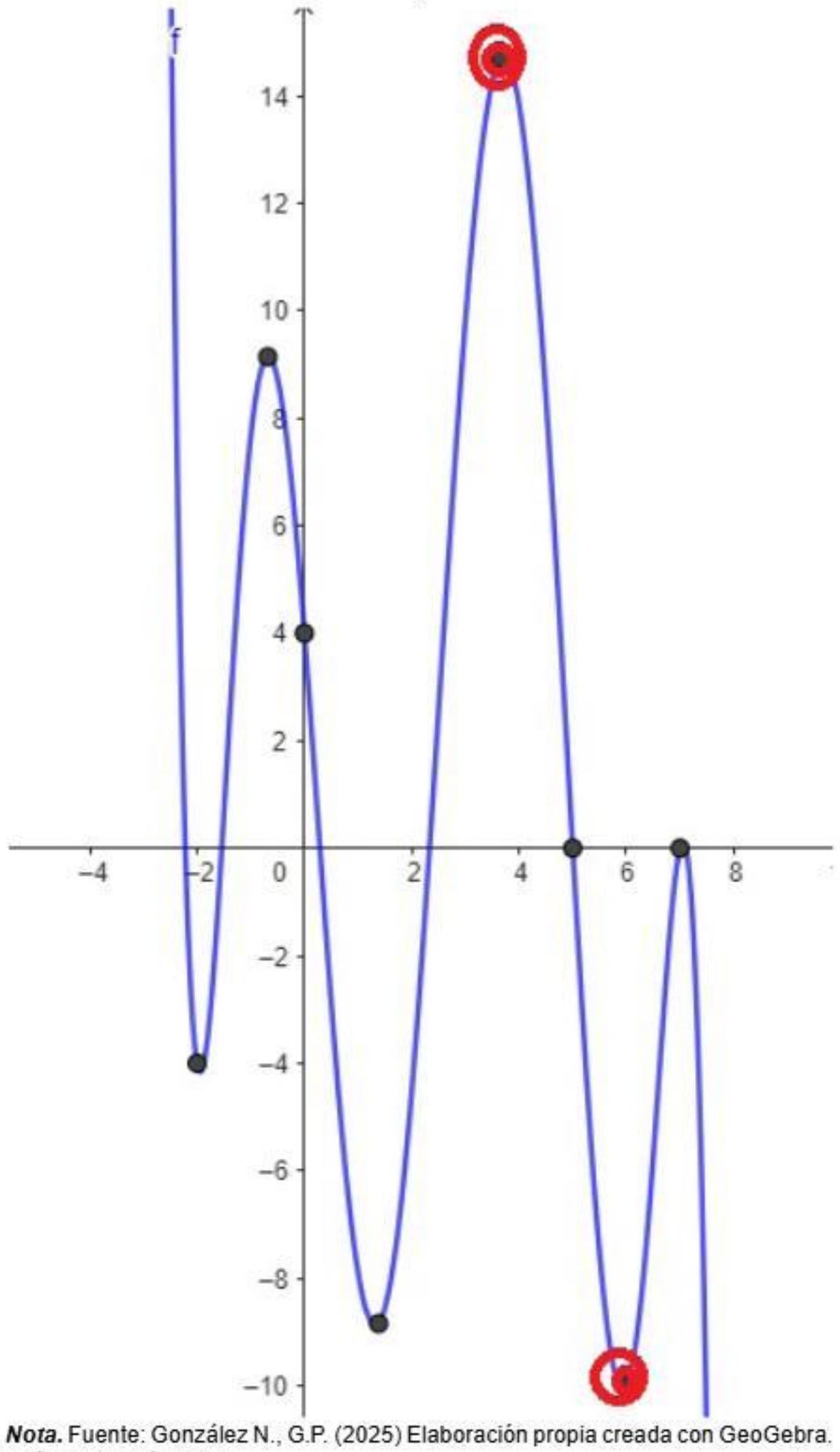
Actividad 2.
Personajes históricos

Instrucciones: realiza la siguiente actividad, para iniciar **da clic** en el enlace.



En la gráfica siguiente podemos ver que los rojos son el máximo y el mínimo absoluto.

Figura 4.
Máximo y mínimo



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Máximos y mínimos].

Para saber cómo obtener máximos y mínimos, recordaremos algunos puntos importantes vistos en el módulo 3, esto es:

$f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = a$

La pendiente de una recta horizontal es CERO.

Si la función es derivable en un máximo, su tangente es horizontal.

Si $f(a)$ es un valor extremo (máximo o mínimo), y la función es derivable en $x = a$, entonces $f'(a) = 0$

Si $f'(a) = 0$ entonces $f(a)$ puede ser un máximo, mínimo o ninguno de los dos.

Si la función es derivable en un máximo o un mínimo, su tangente es horizontal, esto lo podemos observar en la imagen 3 y 4.

Ahora resolveremos una serie de ejercicios para poner en práctica lo aprendido.

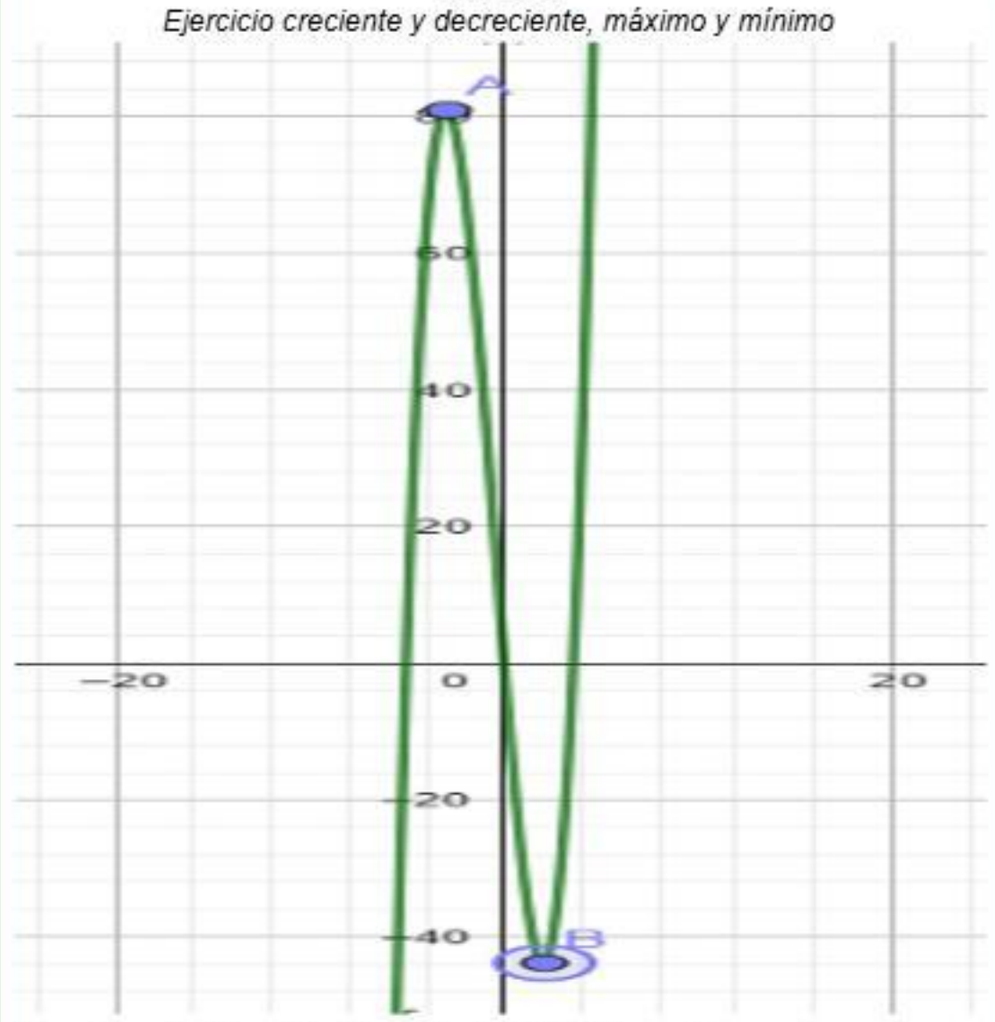
Ejemplos:

1. Determinar máximos, mínimos, creciente y decreciente de la función.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

Resolveremos a través de los pasos descritos anteriormente

1. Obtener $f'(x)$	$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$
2. Encontrar puntos críticos, mediante lo descrito con anterioridad.	$6x^2 + 6x - 36 = 0$
3. Resolver $f'(x) = 0$ Como tenemos una ecuación de segundo grado tendremos varias maneras para resolverla como fórmula general, completando el trinomio cuadrado perfecto o factorizando. Aquí factorizaremos.	$6(x^2 + x - 6) = 0$ $x^2 + x - 6 = 0$ $(x + 3)(x - 2) = 0$ $x + 3 = 0 \quad x = -3$ $x - 2 = 0 \quad x = 2$
4. Obtener $f''(x)$	$f''(x) = 12x + 6$
5. Sustituir $x = -3$ y $x = 2$ en $f''(x)$ Los puntos críticos se sustituyen en la segunda derivada para determinar si existe un máximo o un mínimo relativo.	$f''(-3) = 12(-3) + 6$ $f''(-3) = -30$ $f''(2) = 12(2) + 6$ $f''(2) = 30$
6- Sustituir $x = -3$ y $x = 2$ en $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ Esto se realiza para determinar las imágenes de la función, con lo cual se obtiene el punto máximo (-3,81) o mínimo (2, -44)	$f(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 36(-3)\ f(-3) = 81$ $\therefore x = -3$ hay un máximo $f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 36(2)\ f(2) = -44$ $\therefore x = 2$ es un mínimo

7. Graficamos	**Figura 5.** *Ejercicio creciente y decreciente, máximo y mínimo*  ***Nota.*** Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [ejercicio creciente y decreciente, máximo y mínimos].
8. Obtenemos intervalos creciente y decreciente	Creciente $(-\infty,-3)$ Decreciente $(2,\infty)$

2. Determinar máximos, mínimos, creciente y decreciente de la función.

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 4x$$

Resolveremos a través de los pasos descritos anteriormente

1. Obtener $f'(x)$	$f'(x) = 12x^2 - 10x + 4$
2. Encontrar puntos críticos, mediante lo descrito con anterioridad.	$12x^2 - 10x + 4 = 0$
3. Resolver $f'(x) = 0$ Como tenemos una ecuación de segundo grado tendremos varias maneras para resolverla como fórmula general, completando el trinomio cuadrado perfecto o factorizando. Aquí factorizaremos.	$2(x^2 - 5x + 4) = 0$ $x^2 - 5x + 4 = 0$ $(x - 4)(x - 1) = 0$ $x - 4 = 0 \quad x = 4$ $x - 1 = 0 \quad x = 1$
4. Obtener $f''(x)$	$f''(x) = 24x - 10$

5. Sustituir $x = -3$ y $x = 2$ en $f''(x)$ Los puntos críticos se sustituyen en la segunda derivada para determinar si existe un máximo o un mínimo relativo.	$f''(4) = 24(4) - 10$ $f''(4) = 86$ $f''(1) = 24(1) - 10$ $f''(1) = 14$
6- Sustituir $x = 4$ y $x = 1$ en $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 4x$ Esto se realiza para determinar las imágenes de la función, con lo cual se obtiene el punto máximo (4,160) o mínimo (1, -5)	$f(4) = 4(4)^3 - 5(4)^2 - 4(4)\ f(-3) = 160$ $\therefore x = 4$ hay un máximo $f(1) = 4(1)^3 - 5(1)^2 - 4(1)\ f(2) = -5$ $\therefore x = 2$ es un mínimo
7. Obtenemos intervalos creciente y decreciente	Creciente $(-\infty,4)$ Decreciente $(1,\infty)$



Actividad 4. Máximo y mínimo de una función

Instrucciones: en tu **cuaderno** escribe los siguientes ejercicios y determina dónde la función es creciente y decreciente, así como los puntos máximos, mínimo.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$
b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
c) $f(x) = 4x^3 - 4x$

4.2.2 Criterio de la segunda derivada

El criterio de la segunda derivada se utiliza para analizar el comportamiento de las funciones, determinar los puntos de inflexión y la concavidad de la curva.

Criterio de la segunda derivada para concavidad

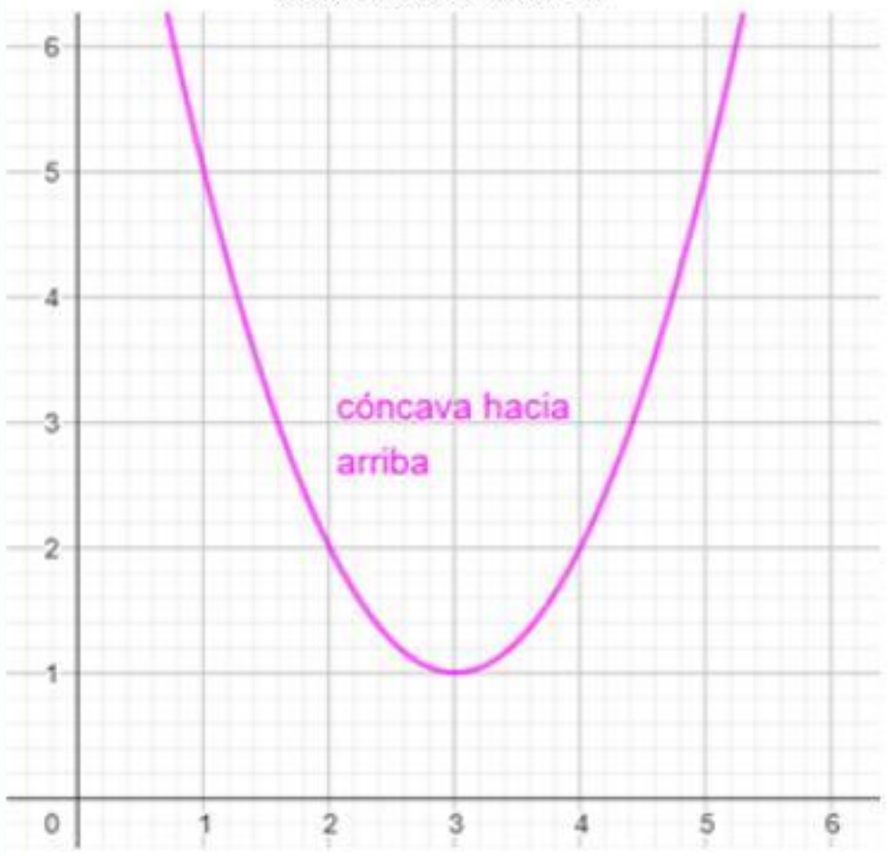
Sea $f(x)$ una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I. Entonces:

Si $f''(x) > 0$, la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en I

Si $f''(x) < 0$, la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en I

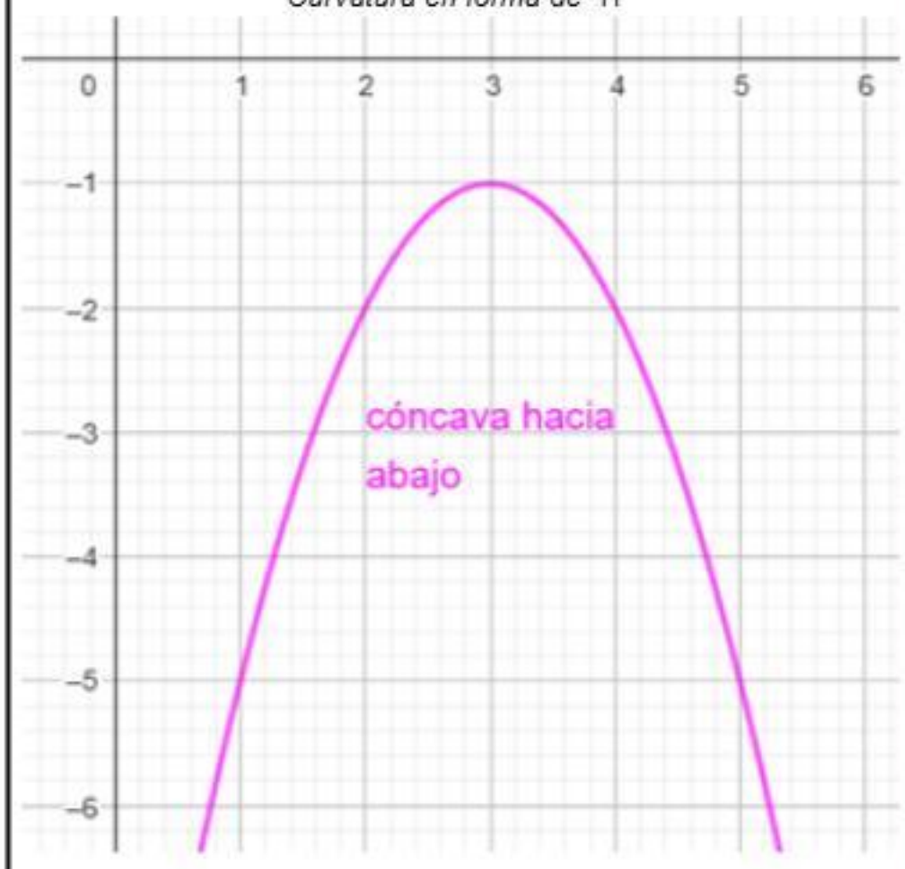
Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo

Figura 6.
Curvatura en forma de "∪"



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Curvatura en forma de "∪"].

Figura 7.
Curvatura en forma de "∩"



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Curvatura en forma de "∩"].

Un **punto de inflexión** de la función $f(x)$ es un punto donde la segunda derivada de la función es cero; es decir, $f''(c) = 0$. En el punto hay un cambio de signo, los valores de una función continua pasan de un tipo de concavidad a otra.

Sea $f(x)$ una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I. Para un punto critico $x = c$

Si $f''(c) > 0$ la función es cóncava hacia arriba **(mínimo relativo)**

Si $f''(c) < 0$ la función es cóncava hacia abajo **(máximo relativo)**

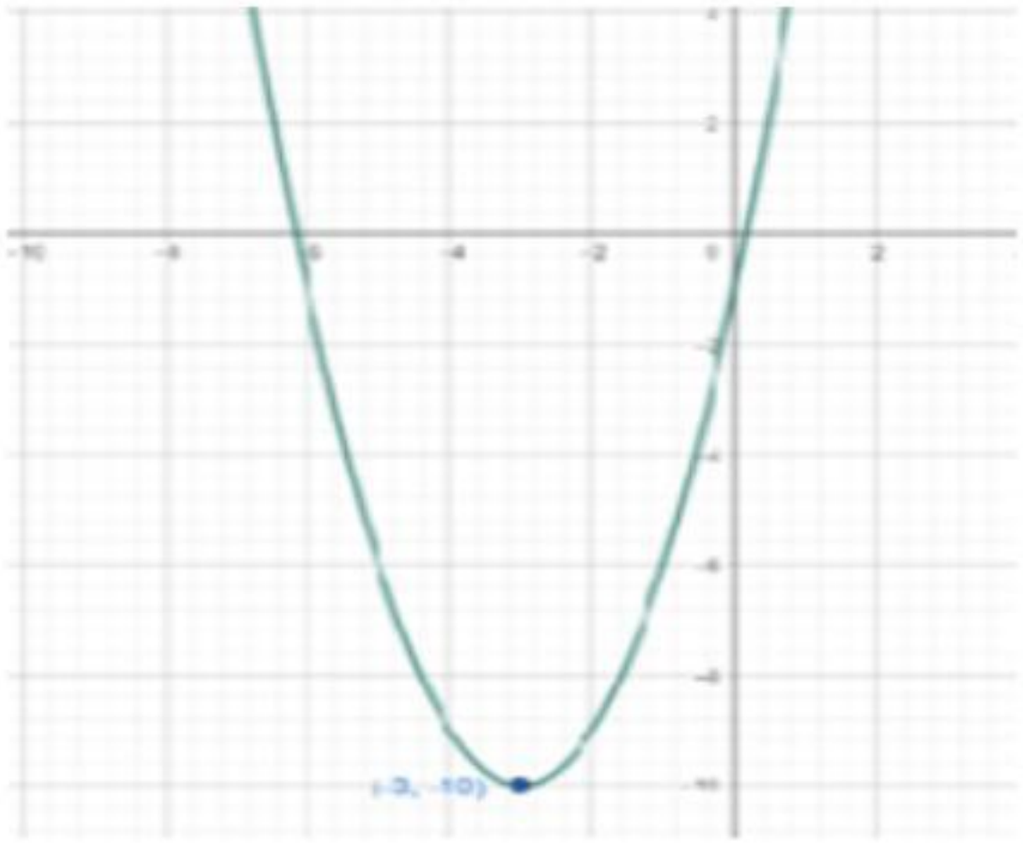
Nota: Un valor propuesto es un número que eliges dentro de un intervalo para sustituir en la primera o segunda derivada de la función de acuerdo a lo que se pretende analizar.

Ejemplo 1. Determina los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función

$f(x) = x^2 + 6x - 1$.

<table>
<tr><td>Primera derivada de f</td><td>$f'(x) = 2x + 6$</td></tr>
<tr><td>Puntos críticos $f'(x) = 0$</td><td>$2x + 6 = 0$
$2x = -6$
$\mathbf{x = -3}$</td></tr>
<tr><td>Analizando los puntos críticos

El valor propuesto se sustituye en la primera derivada</td><td>
<table>
<tr><th>Intervalos</th><th>Valor propuesto de x</th><th>Signo $f'(x)$</th><th>Función</th></tr>
<tr><td>$(-\infty, -3)$</td><td>-4</td><td>$f'(X) = -2 < 0$</td><td>Decreciente</td></tr>
<tr><td>$(-3, \infty)$</td><td>4</td><td>$f'(X) = 14 > 0$</td><td>Creciente</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Segunda derivada de f</td><td>$f''(x) = 2$</td></tr>
<tr><td>Valuando los puntos críticos en la segunda derivada.</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$f''(x)$</th></tr>
<tr><td>-3</td><td>2</td></tr>
</table>
$f''(x) > 0$ existe un mínimo en $x = -3$
</td></tr>
<tr><td>Evaluando en la función original para obtener la coordenada y del punto.</td><td>$f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) - 1$
$f(-3) = 9 - 18 - 1$
$f(-3) = -10$
Es un punto mínimo es (-3, 10)</td></tr>
</table>

Gráfica	**Figura 8.** *Ejemplo 1. Gráfica*  ***Nota.*** Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Ejemplo 1. Gráfica].
Intervalos de concavidad	$f''(x) = 2 > 0$ la función es cóncava hacia arriba en todo su dominio $D_f = (-\infty, \infty)$

Ejemplo 2. Determina los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 9$.

Primera derivada de f	$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$
Puntos críticos $f'(x) = 0$	$6x^2 - 6x - 12 = 0$ $6(x^2 - x - 2) = 0$ $x^2 - x - 2 = 0$ Factorizando $(x + 1)(x - 2) = 0$ $x + 1 = 0$ → $x = -1$ $x - 2 = 0$ → $x = 2$

<table>
<tr><td>Segunda derivada de f</td><td>$f''(x) = 12x - 6$</td></tr>
<tr><td>Valuando los puntos críticos en la segunda derivada.</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$f''(x)$</th><th></th></tr>
<tr><td>-1</td><td>-18</td><td>$f''(x) < 0$ existe un máximo relativo</td></tr>
<tr><td>2</td><td>18</td><td>$f''(x) > 0$ existe un mínimo relativo</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Valuando en la función original para obtener la coordenada y del punto.</td><td>$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 9$
$f(-1) = 2(-1) - 3(1) - 12(-1) + 9$
$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 9$
$f(-1) = 16$
El punto máximo está en (-1, 16)
$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 9$
$f(2) = 2(8) - 3(4) - 12(2) + 9$
$f(2) = 16 - 12 - 24 + 9$
$f(2) = -11$
El punto mínimo está en (2, -11)</td></tr>
<tr><td>Punto de inflexión</td><td>$f''(x) = 0$
$12x - 6 = 0$
$12x = 6$
$x = \frac{1}{2}$
$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - 3(\frac{1}{2})^2 - 12(\frac{1}{2}) + 9$
$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{8}) - 3(\frac{1}{4}) - 12(\frac{1}{2}) + 9$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 6 + 9$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$
El punto de inflexión es $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$</td></tr>
</table>

Intervalos de concavidad

El valor propuesto se sustituye en la segunda derivada

Intervalos	Valor de prueba	$f''(x)$	Concavidad
$(-\infty, \frac{1}{2})$	0	-6 < 0	Concavidad hacia abajo
$(\frac{1}{2}, \infty)$	1	6 > 0	Concavidad hacia arriba

Analizando los puntos críticos

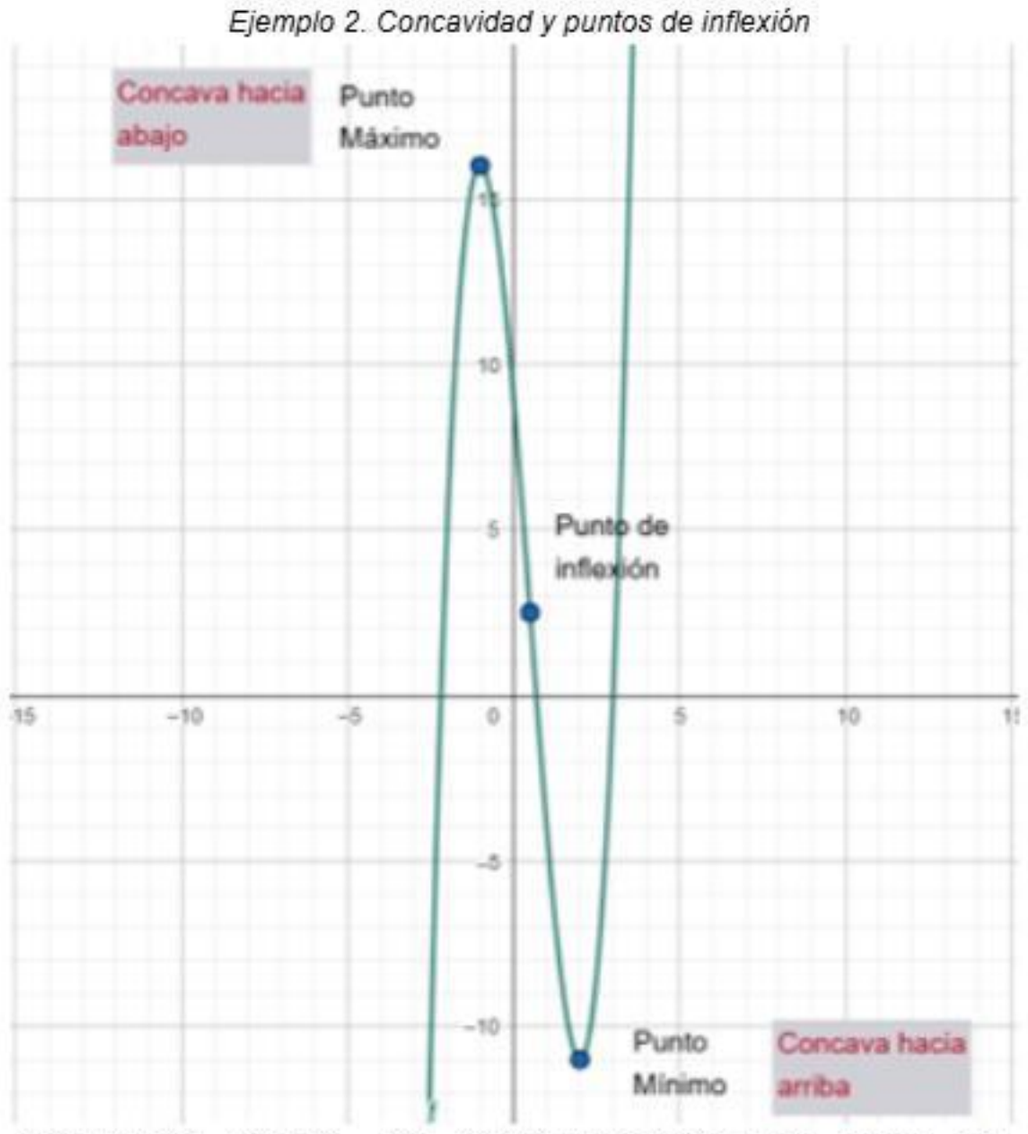
El valor propuesto se sustituye en la primera derivada

Intervalos	Valor propuesto de x	Signo $f''(x)$	Función
$(-\infty, -1)$	-3	$f'(x) = 60 > 0$	Creciente
(-1, 2)	0	$f'(x) = -12 < 0$	Decreciente
$(2,\infty)$	3	$f'(x) = 24 > 0$	Creciente

Gráfica

Figura 9.

Ejemplo 2. Concavidad y puntos de inflexión



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Ejemplo 2. Concavidad y puntos de inflexión].



Actividad 5. Criterio de la segunda derivada

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para iniciar el ejercicio.

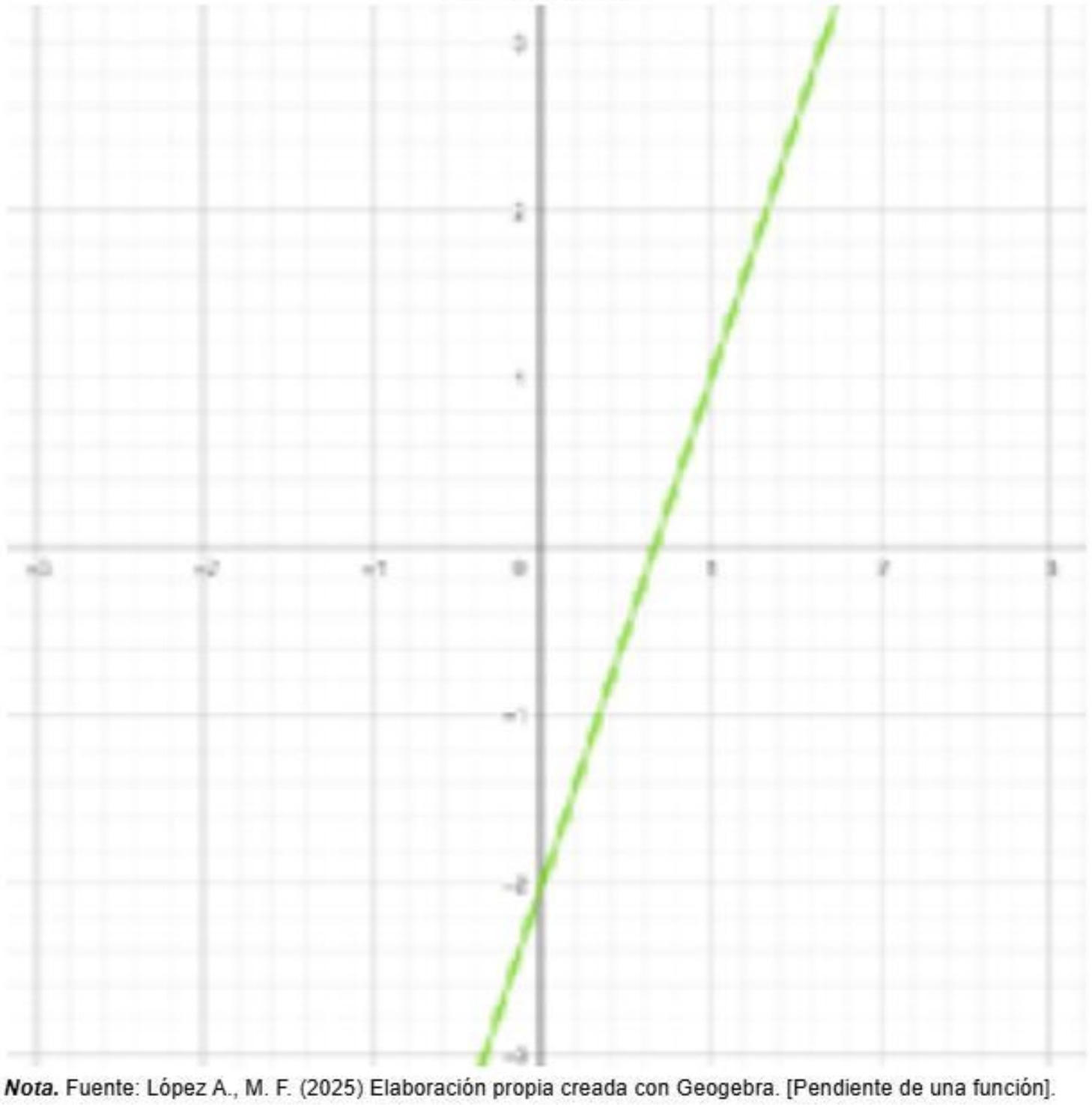


1.1.2 Pendiente de la recta tangente de una función algebraica o polinomial

El estudio del cálculo diferencial se basa en el siguiente problema: **"Encontrar la recta tangente a la gráfica de una función".**

Una **recta** es una sucesión infinita de puntos que siguen una misma dirección, gráficamente podemos visualizar solo un fragmento de esta, por ejemplo:

Figura 9.
Función lineal en $\mathbb{R}^2$



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [Pendiente de una función].

La **pendiente** de una recta nos dice que tan inclinada está. Las rectas tienen pendiente constante, pero las curvas cambian de inclinación en cada punto.

Imagina que estas caminando por una Montañana. Al principio, el camino es plano, después empieza a subir, luego se vuelve muy inclinado, después vuelve a ser plano y comienzas a descender.

¿Cómo puedes describir que tan empinada esta la montaña en el punto donde estas caminando?

4.2.3 Gráfica de la función

En los ejercicios vistos anteriormente, se ha realizado la gráfica de la función dada, que proporciona una visualización del comportamiento de la función.

Por medio del análisis de derivadas, se puede construir una gráfica que permite predecir y comprender fenómenos en distintos ámbitos.

Los pasos para obtener puntos estratégicos se resumen en la siguiente imagen:

1. Calcula la primera derivada $f'(x)$
2. Halla los puntos críticos
3. Analiza el signo de $f'(x)$
4. Encuentra puntos de inflexión
5. Analiza la concavidad
6. Dibuja la gráfica (crecimiento, concavidad, máximos y mínimos)

Ejemplo 1. Analiza el comportamiento de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ para identificar los puntos máximos y mínimos, los intervalos de crecimiento o decrecimiento, los puntos de inflexión, la concavidad y traza la gráfica.

Primera derivada de f	$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
Puntos críticos $f'(x) = 0$	$3x^2 - 12x + 9 = 0$ $3(x^2 - 4x + 3) = 0$ $x^2 - 4x + 3 = 0$ Factorizando $(x - 1)(x - 3) = 0$ $x - 1 = 0$ → $x = 1$ $x - 3 = 0$ → $x = 3$
Analizando los puntos críticos	

Intervalos	Valor propuesto de x	Signo $f''(x)$	Función
$(-\infty, 1)$	0	$f'(x) = 9 > 0$	Creciente
$(1, 3)$	2	$f'(x) = 3 < 0$	Decreciente
$(3, \infty)$	4	$f'(x) = 9 > 0$	Creciente

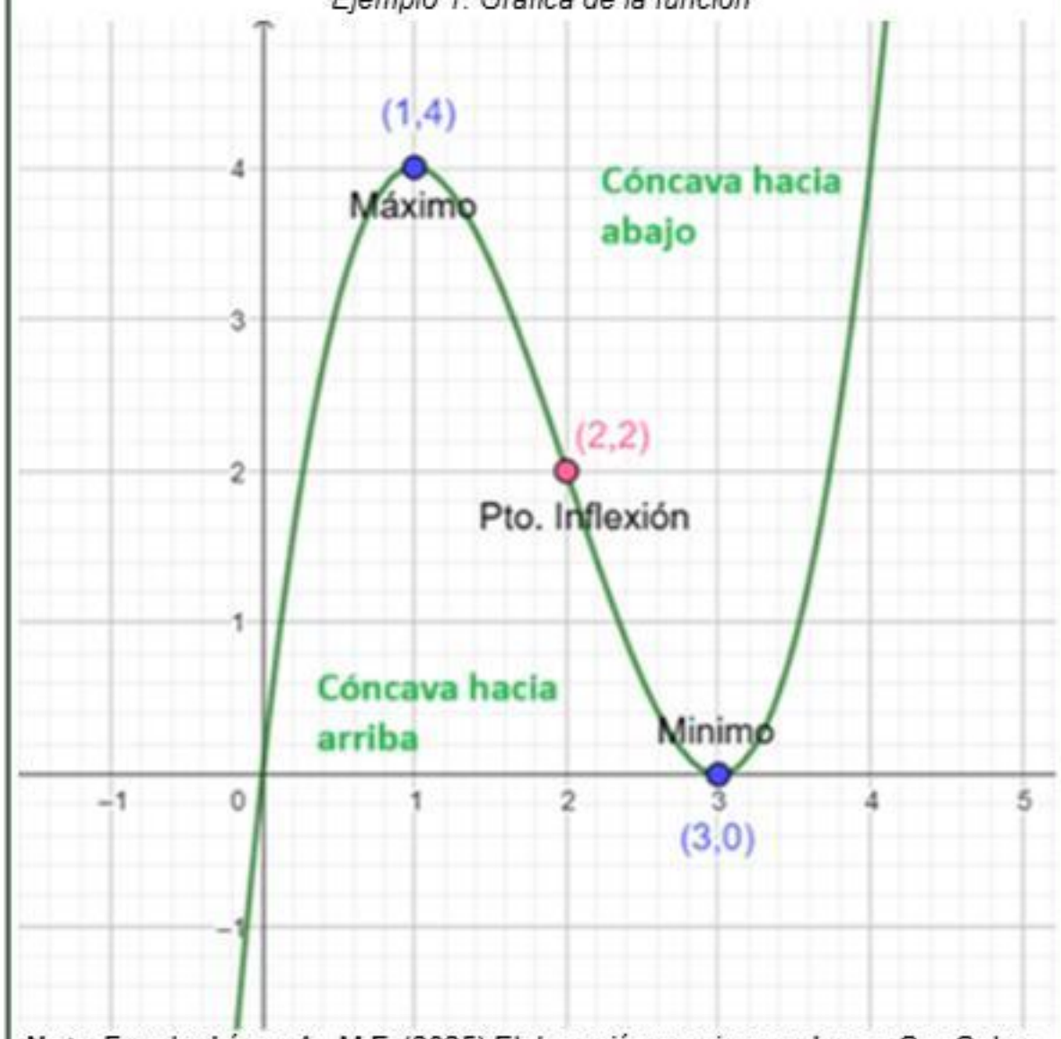
<table>
<tr><td>Segunda derivada de f</td><td>$f''(x) = 6x - 12$</td></tr>
<tr><td>Valuando los puntos críticos en la segunda derivada.</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f ''(x)</th><th></th></tr>
<tr><td>1</td><td>-6</td><td>$f''(x) < 0$ existe un máximo relativo</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>$f''(x) > 0$ existe un mínimo relativo</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Valuando en la función original para obtener la coordenada “y” del punto.</td><td>$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1)$
$f(1) = 1 - 6(1) + 9(1)$
$f(1) = 1 - 6 + 9$
$f(1) = 4$
El punto máximo está en (1, 4)
$f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3)$
$f(3) = 27 - 6(9) + 9(3)$
$f(3) = 27 - 54 + 27$
$f(3) = 0$
El punto mínimo está en (3, 0)</td></tr>
<tr><td>Punto de inflexión</td><td>$f''(x) = 0$
$6x - 12 = 0$
$6x = 12$
$x = 2$
$f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2)$
$f(2) = 8 - 6(4) + 9(2)$
$f(2) = 8 - 24 + 18$
$\mathbf{f}(2) = 2$
El punto es (2, 2)</td></tr>
</table>

Intervalos de concavidad

Intervalos	Valor de prueba	$f''(x)$	Concavidad
$(-\infty, 2)$	0	-12	Concavidad hacia abajo
$(2, \infty)$	3	6	Concavidad hacia arriba

Gráfica

Figura 10.
Ejemplo 1. Gráfica de la función



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Ejemplo 1. Gráfica de la función].

Ejemplo 2. Analiza el comportamiento de la función $f(x) = -x^4 + 2x^2$ para identificar los puntos máximos y mínimos, los intervalos de crecimiento o decrecimiento, los puntos de inflexión, la concavidad, y traza la gráfica.

Primera derivada de f	$f'(x) = -4x^3 + 4x$
Puntos críticos $f'(x) = 0$	$-4x^3 + 4x = 0$ $-4x(x^2 - 1) = 0$ $-4x = 0$ → $x = 0$ $x^2 - 1 = 0$ → $x^2 = 1$ → $x = \pm\sqrt{1}$ → $x = 1$, $x = -1$

	(1, ∞)	2	$f'(x) = -24 < 0$	Decrece

Segunda derivada de f	$f''(x) = -12x^2 + 4$

Valuando los puntos críticos en la segunda derivada	x	$f''(x)$	
	-1	-8	$f''(x) < 0$ existe un máximo relativo
	0	4	$f''(x) > 0$ existe un mínimo relativo
	1	-8	$f''(x) < 0$ existe un máximo relativo

Valuando en la función original para obtener la coordenada y del punto.

$$f(-1) = -(-1)^4 + 2(-1)^2$$

$$f(-1) = -(1) + 2(1)$$

$$f(-1) = -1 + 2$$

$$f(-1) = 1$$

El punto máximo está en (-1, 1)

$$f(0) = -(0)^4 + 2(0)^2$$

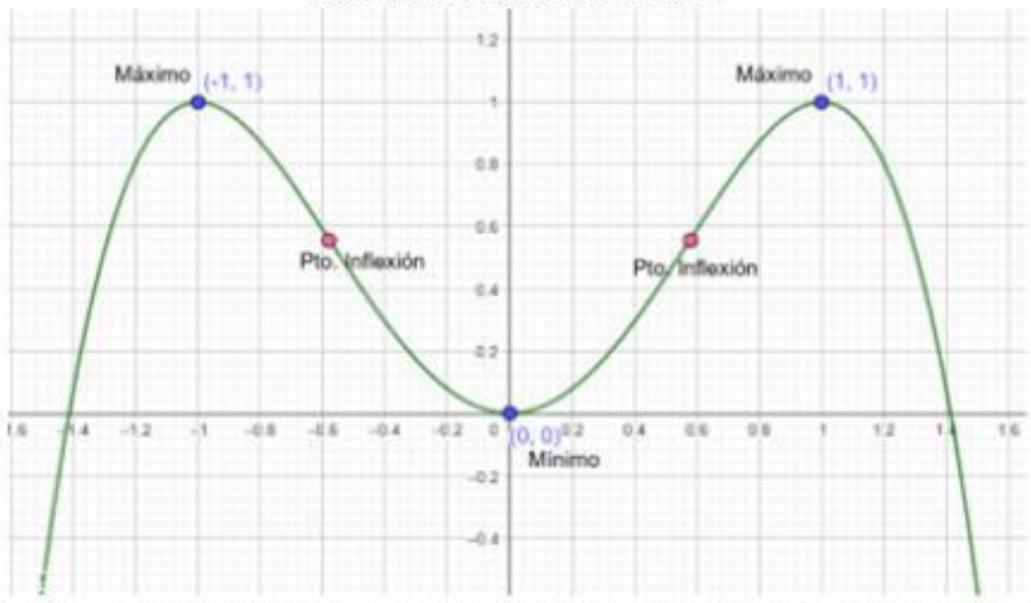
$$f(0) = -(0) + 2(0)$$

$$f(0) = 0$$

El punto mínimo está en (0, 0)

$$f(1) = -(1)^4 + 2(1)^2$$

<table>
<tr><td></td><td>$f(1) = -(1) + 2(1)$
$f(1) = -1 + 2$
$f(1) = 1$
El punto máximo está en (1, 1)</td></tr>
<tr><td>Punto de inflexión</td><td>$f''(x) = 0$
$x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$
$x = \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$
$f = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4 + 2\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$
$f(0.57) = \frac{5}{9}$
El punto es $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{5}{9}}\right) = (0.58, 0.56)$
$f = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4 + 2\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$
$f(0.57) = \frac{5}{9}$
El punto es $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{5}{9}}\right) = (-0.58, 0.56)$</td></tr>
<tr><td>Intervalos de concavidad</td><td>
<table>
<tr><th>Intervalos</th><th>Valor de prueba</th><th>$f''(x)$</th><th>Concavidad</th></tr>
<tr><td>$(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}})$</td><td>-1</td><td>$-8 < 0$</td><td>Concavidad hacia abajo</td></tr>
<tr><td>$(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$</td><td>0</td><td>$4 > 0$</td><td>Concavidad hacia arriba</td></tr>
<tr><td>$(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty)$</td><td>1</td><td>$-8 < 0$</td><td>Concavidad hacia abajo</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Gráfica	**Figura 11.** *Ejemplo 2. Gráfica de la función*  ***Nota.*** Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Ejemplo 2. Gráfica de la función].



Actividad 6.
Gráfica de la función

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para iniciar el ejercicio.



4.3 Problemas de optimización (a partir de una función dada)

En el análisis matemático la optimización es esencial. Su objetivo es encontrar los valores de las variables que maximizan o minimizan una función dada, para poder alcanzar el mayor beneficio, el menor costo o la máxima eficiencia en distintas situaciones.

En cada problema se define la función, se realiza el proceso de derivación para encontrar los puntos críticos y verificar si corresponden a un valor máximo o mínimo.

Ejemplo 1. El ingreso semanal $I(x)$ de una tienda, en miles de pesos, en función de los anuncios colocados, es $I(x) = 6x - 0.2x^2$. ¿Cuántos anuncios deben colocarse para maximizar sus ingresos?

Función	$I(x) = 6x - 0.2x^2$
Primera derivada	$I'(x) = 6 - 0.4x$
Puntos críticos	$6 - 0.4x = 0$ $-0.4x = -6$ $0.4x = 6$ $x = \frac{6}{0.4}$ $x = 15$
Segunda derivada	$I''(x) = -0.4 < 0$ existe un máximo
	La cantidad de anuncios que deben colocarse para maximizar la ganancia son 15.

Ejemplo 2. La distancia de un objeto a un punto fijo está dada por $d(x) = x^2 - 6x + 13$. ¿En qué valor la distancia es mínima?

Función	$d(x) = x^2 - 6x + 2$
Primera derivada	$d'(x) = 2x - 6$
Puntos críticos	$2x - 6 = 0$ $2x = 6$ $x = \frac{6}{2}$ $x = 3$

Segunda derivada	$d''(x) = -2 > 0$ existe un mínimo
	La distancia mínima entre el objeto y el punto fijo es $x = 3$.



Actividad 7. Problemas de optimización (a partir de una función dada)

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para iniciar el ejercicio.



4.4 Gráfica de la función logarítmica con diferentes bases y exponencial

Las funciones logarítmicas y exponenciales están relacionadas, ya que una es la inversa de la otra. Identificar y comprender sus gráficas en esencial para interpretar problemas de ingeniería o economía, fenómenos naturales, etcétera.

Función exponencial

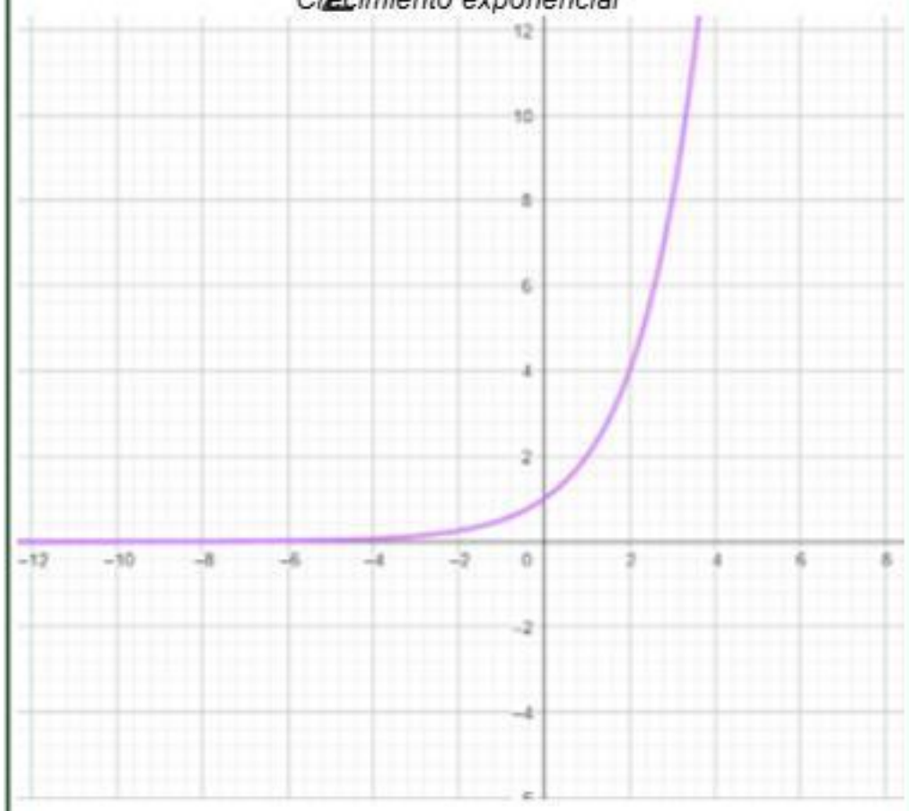
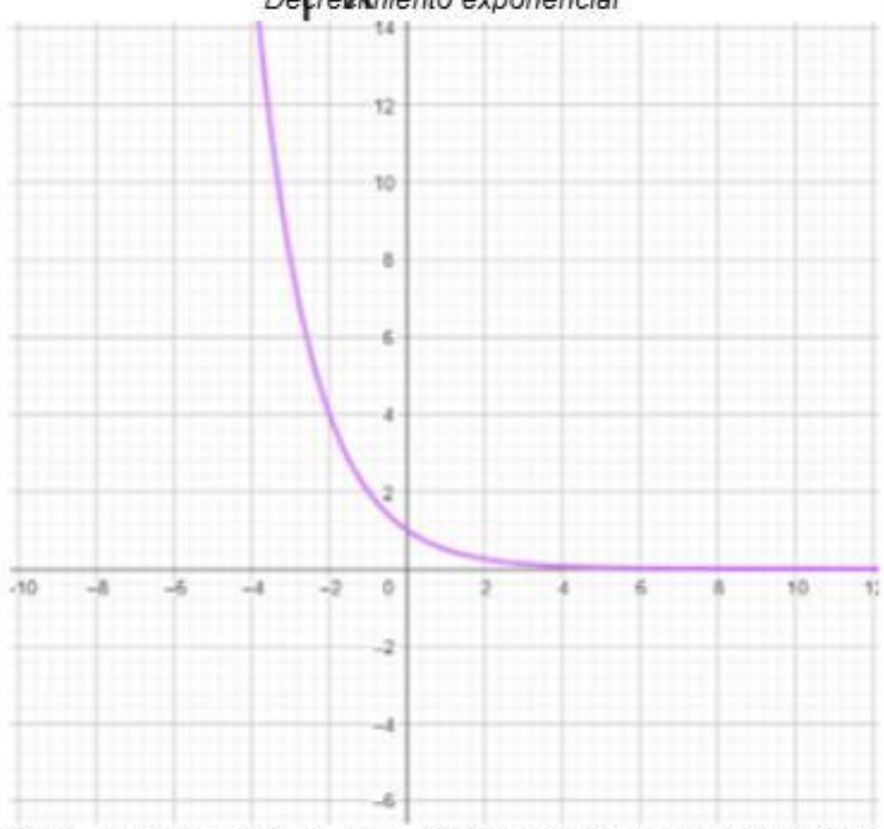
Una función exponencial tiene la forma $y = a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1$, a es un número real positivo llamado base.

La gráfica depende del valor de a, en donde:

Si $a > 0$ significa que existe un crecimiento exponencial

Si $0 < a < 1$ significa que existe un decrecimiento exponencial

Algunos ejemplos de funciones exponenciales son:

$y = 2^x$ cuya gráfica es:	$y = (\frac{1}{2})x$ cuya gráfica es:
Figura 12. *Crecimiento exponencial*  ***Nota.*** Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Crecimiento exponencial].	**Figura 13.** *Decrecimiento exponencial*  ***Nota.*** Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Crecimiento exponencial].

En ambas gráficas se aprecian ciertas características, las cuales son:

Pasa por el punto (0,1)

Es siempre positiva $y > 0$

Tiene una asíntota horizontal

El dominio de la función será $(-\infty, \infty)$

El rango de la función será $(0, \infty)$

Debemos tener presente que, para que una función sea exponencial, la variable debe estar en el exponente, por ejemplo:

$y = x^3 - 8$	$y = 2^x - 1$
Es una función polinomial	Es una función exponencial

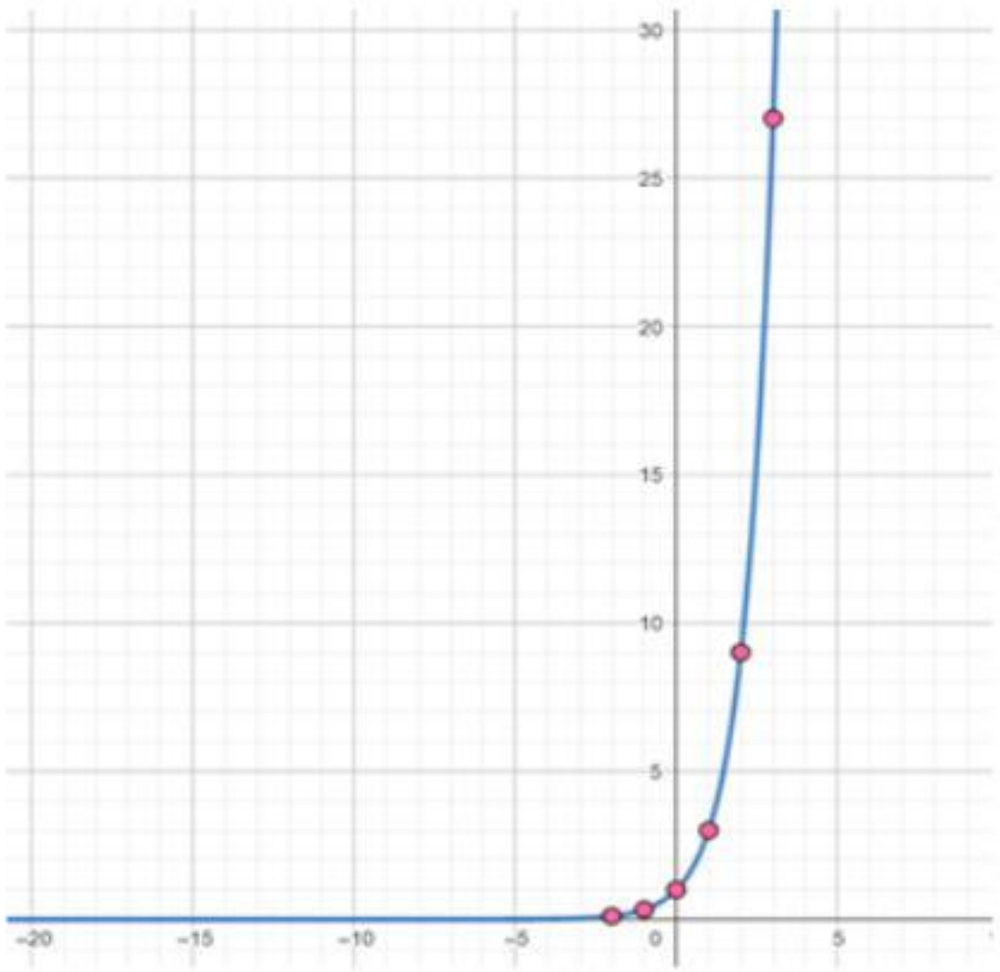
Ejemplo 1. Gráfica la función $y = 3^x$

Realizamos la tabulación, dando valores arbitrarios a *x* para hallar el valor de *y*

x	*y*	Operación
-2	0.111	$f(x) = 3^{-2}$
-1	0.333	$f(x) = 3^{-1}$
0	1	$f(x) = 3^0$
1	3	$f(x) = 3^1$
2	9	$f(x) = 3^2$
3	27	$f(x) = 3^3$

Ubicamos los puntos en el plano cartesiano y los unimos como en la imagen

Figura 14.
Ejemplo 1. Función exponencial



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Crecimiento exponencial].

1.1.2 Pendiente de la recta tangente de una función algebraica o polinomial

El estudio del cálculo diferencial se basa en el siguiente problema: **"Encontrar la recta tangente a la gráfica de una función".**

Una **recta** es una sucesión infinita de puntos que siguen una misma dirección, gráficamente podemos visualizar solo un fragmento de esta, por ejemplo:

Figura 9.
Función lineal en $\mathbb{R}^2$



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [Pendiente de una función].

La **pendiente** de una recta nos dice que tan inclinada está. Las rectas tienen pendiente constante, pero las curvas cambian de inclinación en cada punto.

Imagina que estas caminando por una Montañana. Al principio, el camino es plano, después empieza a subir, luego se vuelve muy inclinado, después vuelve a ser plano y comienzas a descender.

¿Cómo puedes describir que tan empinada esta la montaña en el punto donde estas caminando?

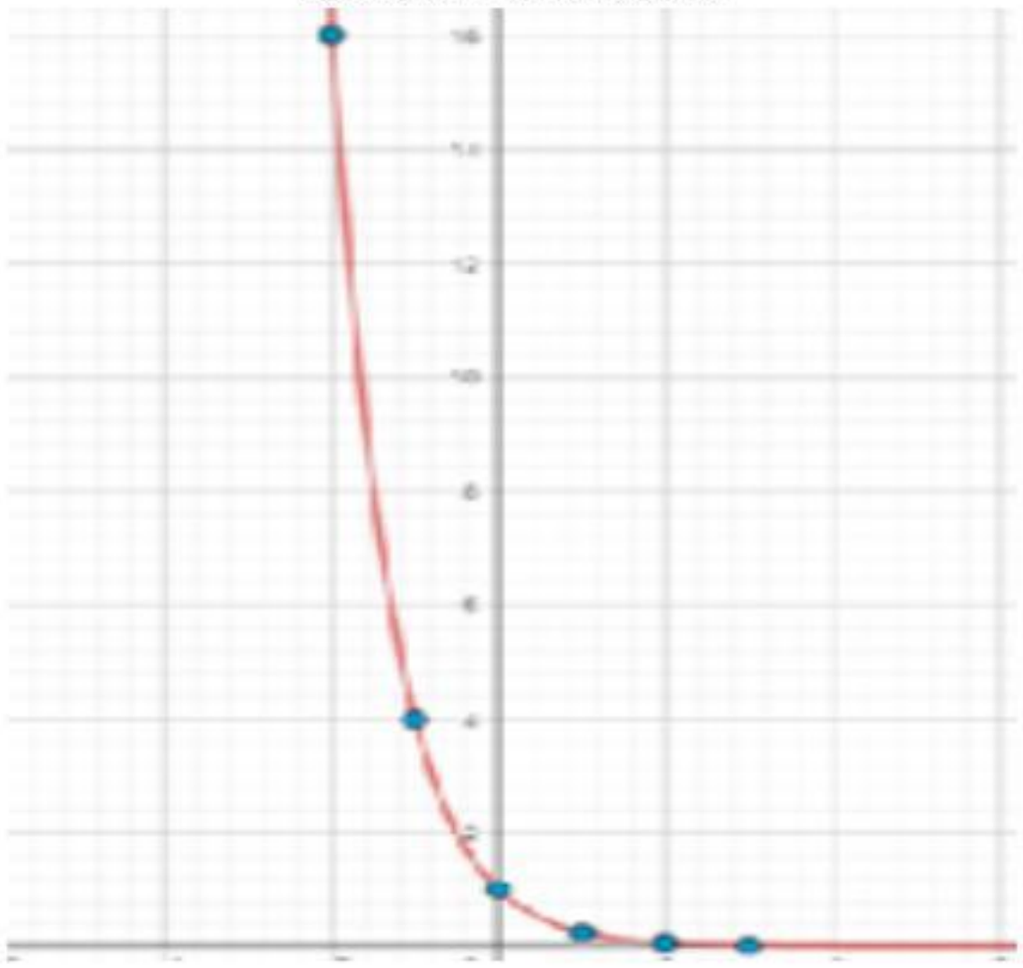
Ejemplo 2. Gráfica la función $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Realizamos la tabulación, dando valores arbitrarios a *x* para hallar el valor de $y = f(x)$

x	$f(x)$	Operación
-2	16	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$
-1	4	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$
0	1	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{0}$
1	0.25	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1}$
2	0.062	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$
3	0.015	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3}$

Ubicamos los puntos en el plano cartesiano y los unimos como en la imagen

Figura 15.
Ejemplo 2. Función exponencial



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Ejemplo 2. Función exponencial].

Función logarítmica

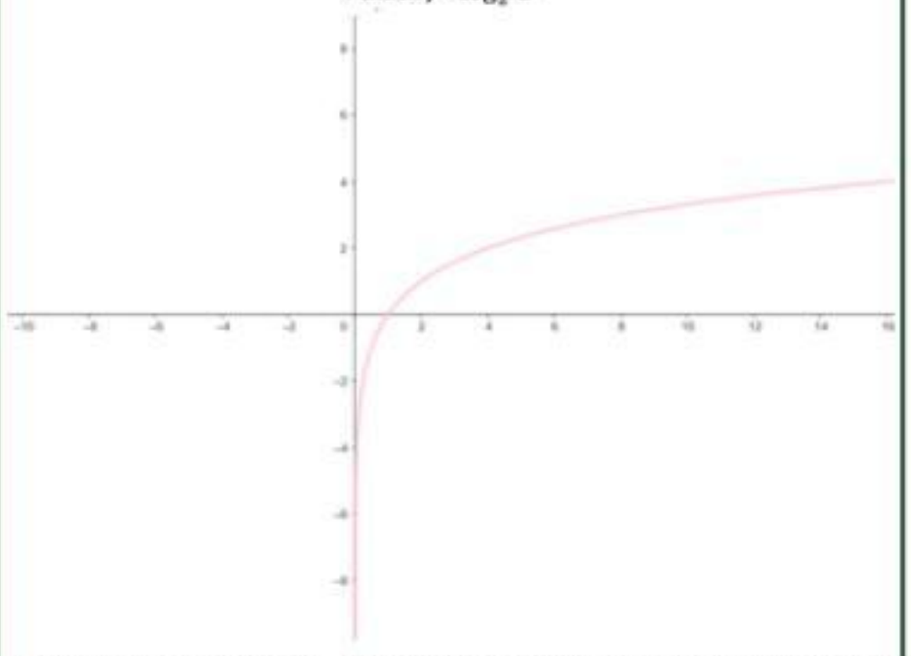
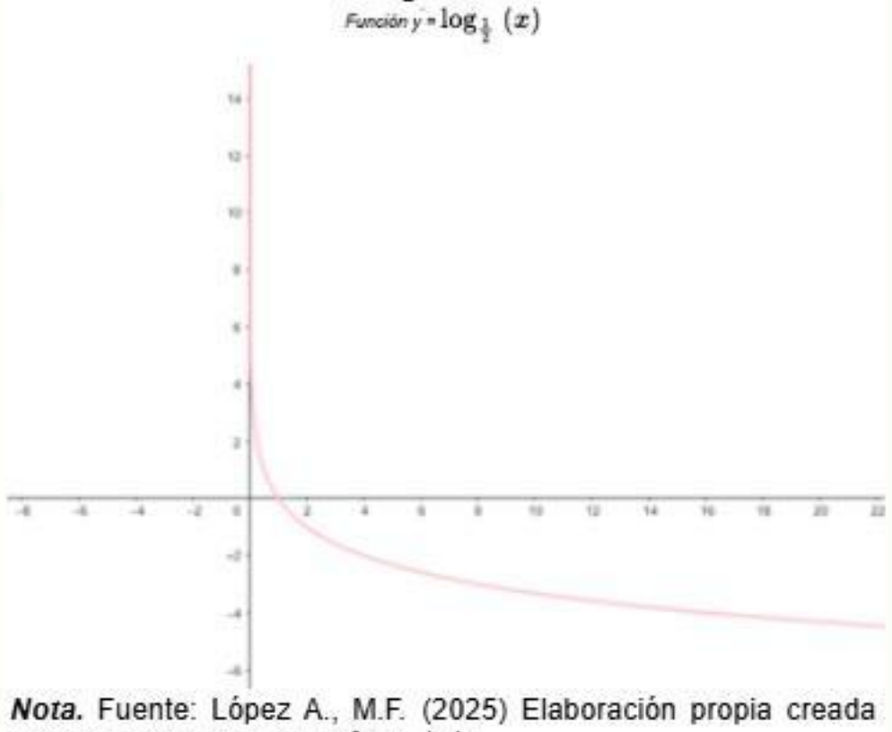
Cada función exponencial tiene una función inversa que se llama función logarítmica con base *a* y se denota por $\log_a x$. Entonces: $y = \log_a x$ sí y solo si $a^y = x$

La gráfica depende del valor de a que es la base, en donde igual que en la función exponencial:

Si $a > 1$ significa que es creciente, pero más lentamente

Si $0 < a < 1$ significa que es decreciente, pero más lentamente

Algunos ejemplos de funciones exponenciales son:

$y = \log_2 x$ cuya gráfica es:	$y = \log_{\frac{1}{2}} (x)$ cuya gráfica es:
Figura 16. *Función* $y = \log_2 x$  ***Nota.*** Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Función $y = \log_2 x$].	**Figura 17.** *Función* $y = \log_{\frac{1}{2}} (x)$  ***Nota.*** Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Función $y = \log_{\frac{1}{2}} (x)$].

En ambas gráficas se aprecian ciertas características, las cuales son:

Su domino es (0, ∞)

Su rango es (-∞, ∞)

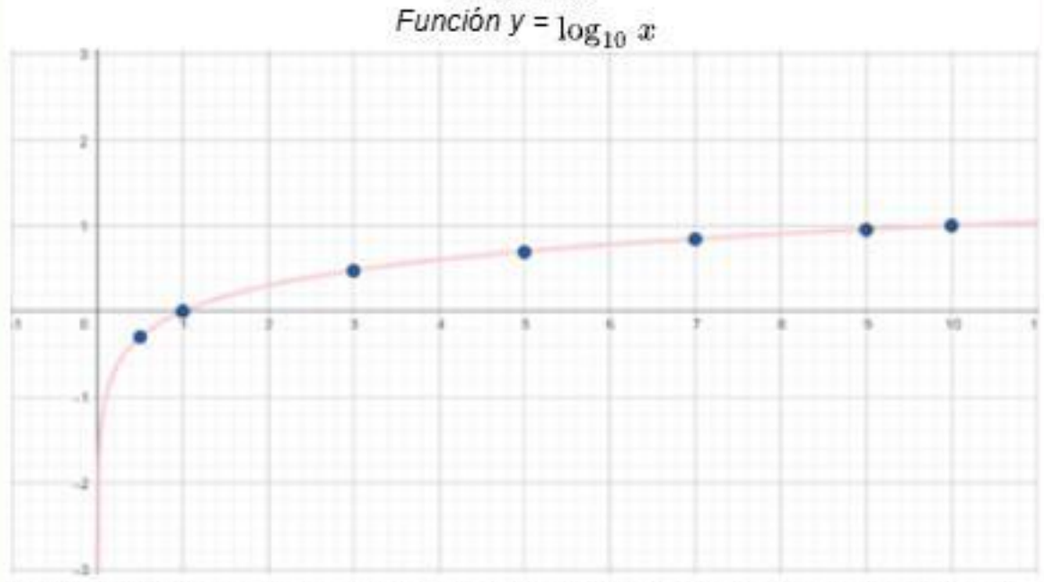
Pasa por el punto (1,0)

Tiene una asíntota vertical

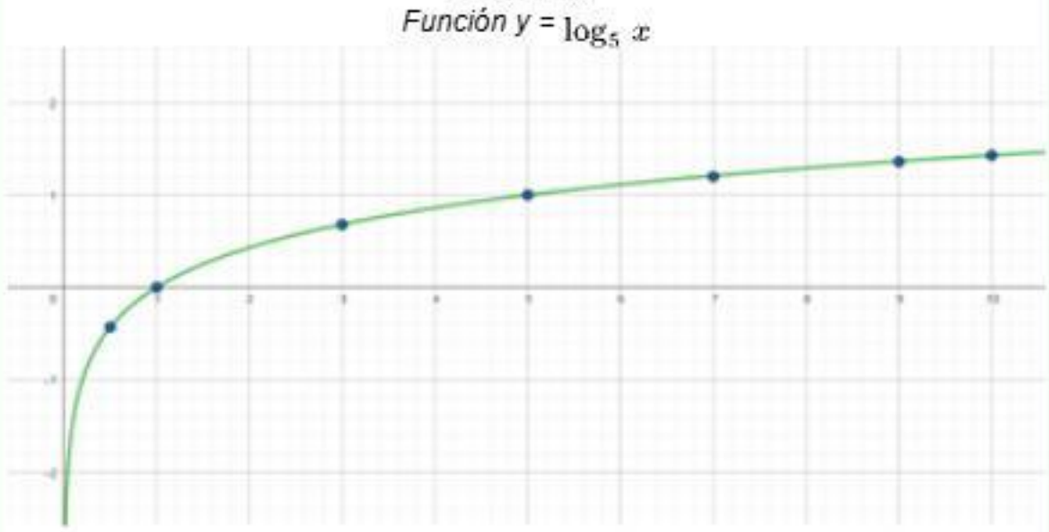
Ejemplo 3. Gráfica la función $y = \log_{10} x$, esta base es la más común por lo que se puede omitir el subíndice y se sobreentiende que hablamos de una base 10, es decir $y = \log (x)$.

Realizamos la tabulación, dando valores arbitrarios a *x* para hallar el valor de $y = f(x)$

x	y	Operación
0.5	-0.30	$y = \log (1)$
1	0	$y = \log (2)$
3	0.47	$y = \log (3)$
5	0.69	$y = \log (5)$
7	0.84	$y = \log (7)$
9	0.95	$y = \log (9)$
10	1	$y = \log (10)$

Ubicamos los puntos en el plano cartesiano y los unimos como en la imagen	**Figura 18.** *Función* $y = \log_{10} x$  ***Nota.*** Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Función $\log_{10} x$].

Ejemplo 4. Gráfica la función $y = \log_5 x$

Realizamos la tabulación, dando valores arbitrarios a x para hallar el valor de $y = f(x)$	x | y | Operación 0.5 | -0.43 | $y = \log_5 (1)$ 1 | 0 | $y = \log_5 (2)$ 3 | 0.68 | $y = \log_5 (3)$ 5 | 1 | $y = \log_5 (5)$ 7 | 1.20 | $y = \log_5 (7)$ 9 | 1.36 | $y = \log_5 (9)$ 10 | 1.43 | $y = \log_5 (10)$
Ubicamos los puntos en el plano cartesiano y los unimos como en la imagen	**Figura 19.** *Función* $y = \log_5 x$  ***Nota.*** Fuente:López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Función $\log_5 x$].

Actividad 8. Gráfica de la función logarítmica con diferentes bases y exponencial

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para iniciar el ejercicio.



4.4.1 Función inversa (logarítmica y exponencial: funciones inversamente entre sí)

Es probable que hayas escuchado acerca de operaciones que son inversas, como la suma con la resta o la multiplicación con la división; de igual forma, las funciones pueden tener una llamada **función inversa** la cual se entiende como sigue (Neuhauser, 2004):

> De forma aproximada puede decirse que la inversa de una función f revierte el efecto de *f*. Es decir, si *f* transforma *x* en $y = f(x)$, la función inversa, que se indica como f^{-1} (y se lee "*f* inversa"), toma *y*, y lo transforma de nuevo en x. NO toda función tiene inversa. Como la función inversa es a su vez una función, es necesario que todo valor *y* en el recorrido de *f* se transforme sólo (*sic*) en un valor x. En otras palabras, debe cumplirse que siempre que $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, o lo que es lo mismo, $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$".

Esto puede causar confusión, así que analicémoslo con un **ejemplo con funciones logarítmica y exponencial.** Las funciones que se van a emplear son inversas, por ahora se te dan así para que puedas identificar el significado de la definición de función inversa, después aprenderás cómo se obtienen.

Sean las funciones $f(x) = \log(x)$ y $g(x) = 10^x$ observa la tabla realizada para $f(x)$ y analiza qué ocurre con el dominio y el rango del intervalo mostrado:

Tabla 1.
Tabulación de la función f (x) = log (x)

Dominio	Aplicando la función	Rango
x		*y*
0.0001	$\log(0.0001)$	-4
0.001	$\log(0.001)$	-3
0.01	$\log(0.01)$	-2
0.1	$\log(0.1)$	-1
1	$\log(1)$	0
10	$\log(10)$	1
100	$\log(100)$	2
1000	$\log(1000)$	3
10000	$\log(10000)$	4

Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia. [Tabulación de la función $f(x) = \log(x)$].

Observa que a cada valor de x le corresponde un único valor de *y*.

Ahora observa la tabla realizada para *g* (x) y analiza qué ocurre con el dominio y el rango del intervalo mostrado:

Tabla 2.
Tabulación de la función g (x) = 10^x

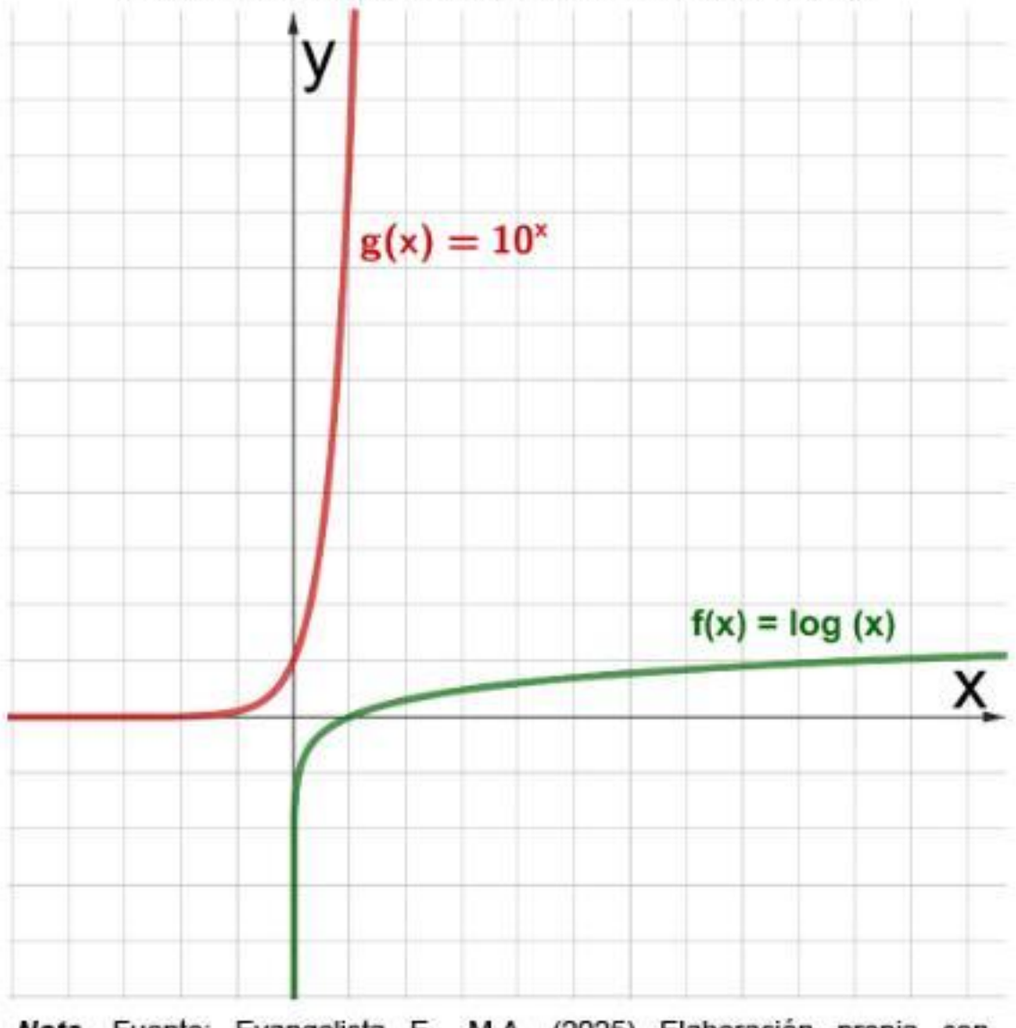
Dominio	Aplicando la función	Rango
x		*y*
-4	$\log(0.0001)$	0.0001
-3	$\log(0.001)$	0.001
-2	$\log(0.01)$	0.01
-2	$\log(0.1)$	0.1
0	$\log(1)$	1
1	$\log(10)$	10
2	$\log(100)$	100
3	$\log(1000)$	1000
4	$\log(10000)$	10000

Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia. [Tabulación de la función *g (x)* = 10^x].

Puedes notar que el rango de *f* (x) es el dominio de *g* (x) y que los valores del rango de *g* (x) nos regresan a los valores originales del dominio de *f* (x), esta es precisamente la idea de función inversa.

Gráficamente se tiene la siguiente figura:

Figura 20.
Gráficas de las funciones inversas f (x) = $\log(x)$ y g (x) = 10^x



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráficas de las funciones inversas *f (x)* = $\log(x)$ *y g (x)* = 10^x].

En caso de necesitarlo, pide ayuda a tu profesor para que te muestre la manera para realizar estas operaciones con tu calculadora y puedas verificar por ti mismo cómo se han obtenido los datos de las tablas.

A continuación, se enlistan algunas **propiedades de las funciones inversas** (Casteleiro, 2006):

1) Una función no tiene por qué tener inversa, pero si la tiene, es única.

2)El dominio de *f* es el recorrido de f^{-1} y viceversa.

3) Las funciones *f* y f^{-1} son simétricas respecto de la diagonal del primer cuadrante.

4) Si *f* es inversa de *g*, se cumple que *g* es inversa de *f*; es decir, las funciones inversas son conmutativas.

5)Toda función que tenga inversa deberá cumplir: $f \circ f^{-1} = f^{-1}$ o $f = I$ (función identidad).

En la propiedad 5) el símbolo *o* representa una operación de funciones denominada **composición de funciones**, la cual consiste en palabras simples, colocar una función dentro de otra función. Es muy útil cuando se requiere que el valor obtenido al sustituir una variable en una función sea empleado en una segunda función, observa el siguiente ejemplo:

Función 1: $g(x) = 10^x$

$$g(3) = 10^3 = 1000$$

Función 2: $f(x) = \log x$

$$f(1000) = \log 1000 = 3$$

Con ayuda del ejemplo anterior analiza los datos de las tablas 1 y 2, elige valores de x y observa cómo al utilizar la composición de funciones inversas regresas al mismo valor de x.

La función composición consiste en primero sustituir una función en la otra y después evaluar directamente el valor de x, es decir:

$$(fog)(3) = \log\left(10^x\right)$$

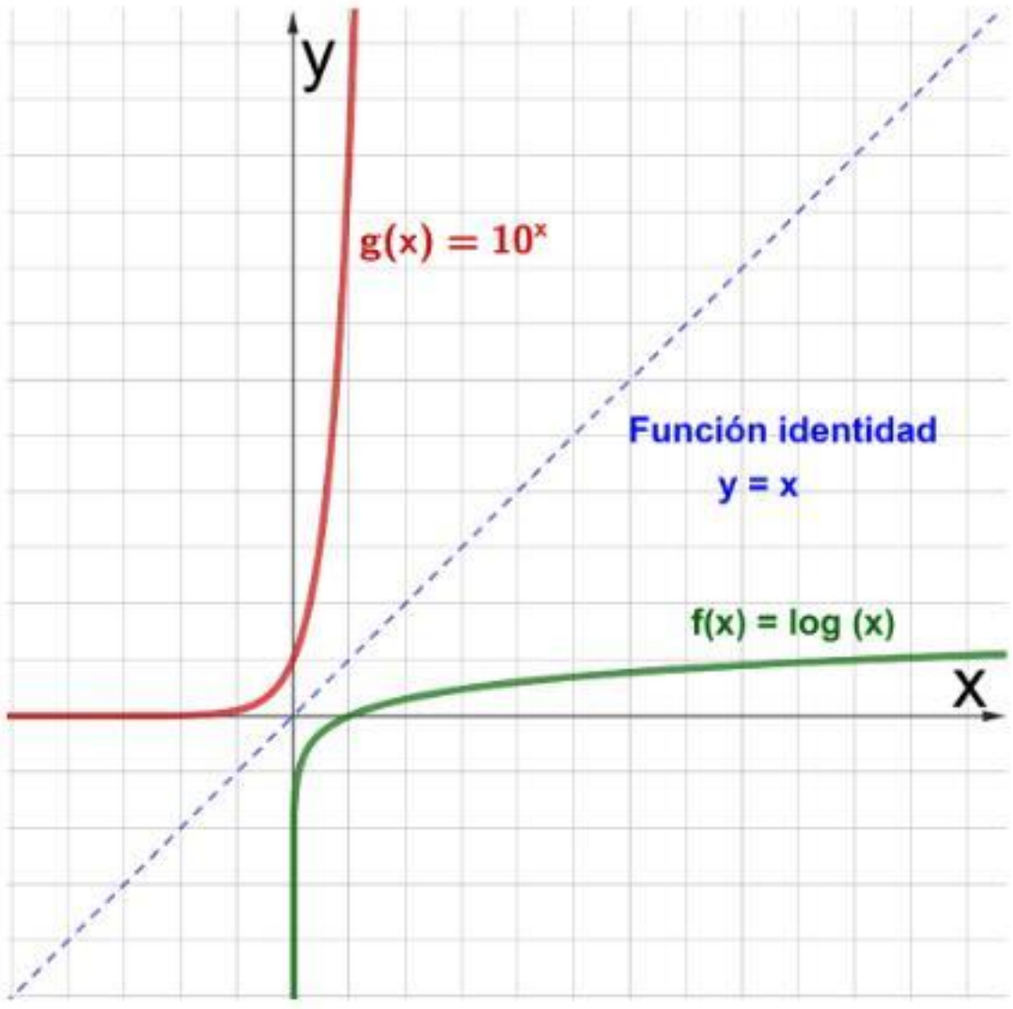
$$= \log\left(10^3\right)$$

$$= \log(1000)$$

$$= 3$$

En caso de necesitarlo, pide ayuda a tu profesor para que te muestre la manera para realizar estas operaciones con tu calculadora y puedas verificar por ti mismo cómo se han obtenido los datos de las tablas.

Figura 21.
Gráficas de las funciones inversas f (x) = log (x) y g (x) = 10^x y su simetría respecto a la función identidad



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráficas de las funciones inversas *f (x)* = log (*x*) *y g (x)* = 10^x *y su simetría respecto a la función identidad].*

En conclusión, este es un ejemplo que permite identificar que **las funciones logarítmicas y exponenciales son inversas,** haz lo mismo con otros tipos de funciones y continúa aprendiendo sobre funciones inversas.

¿Cómo se obtiene la inversa de una función?

Para obtener inversas de funciones se pueden realizar los siguientes pasos:

1) Escribir a la función empleando ambas variables *x* y *y*.

2) Intercambiar la *x* por la *y* y viceversa.

3) Despejar *y*.

4) Escribir a la función obtenida como f^{-1} (*x*).

Ejemplo 1:

Función: $f(x) = 2x + 5$

Paso 1 $y = 2x + 5$

Paso 2 $x = 2y + 5$

Paso 3 $2y + 5 = x$

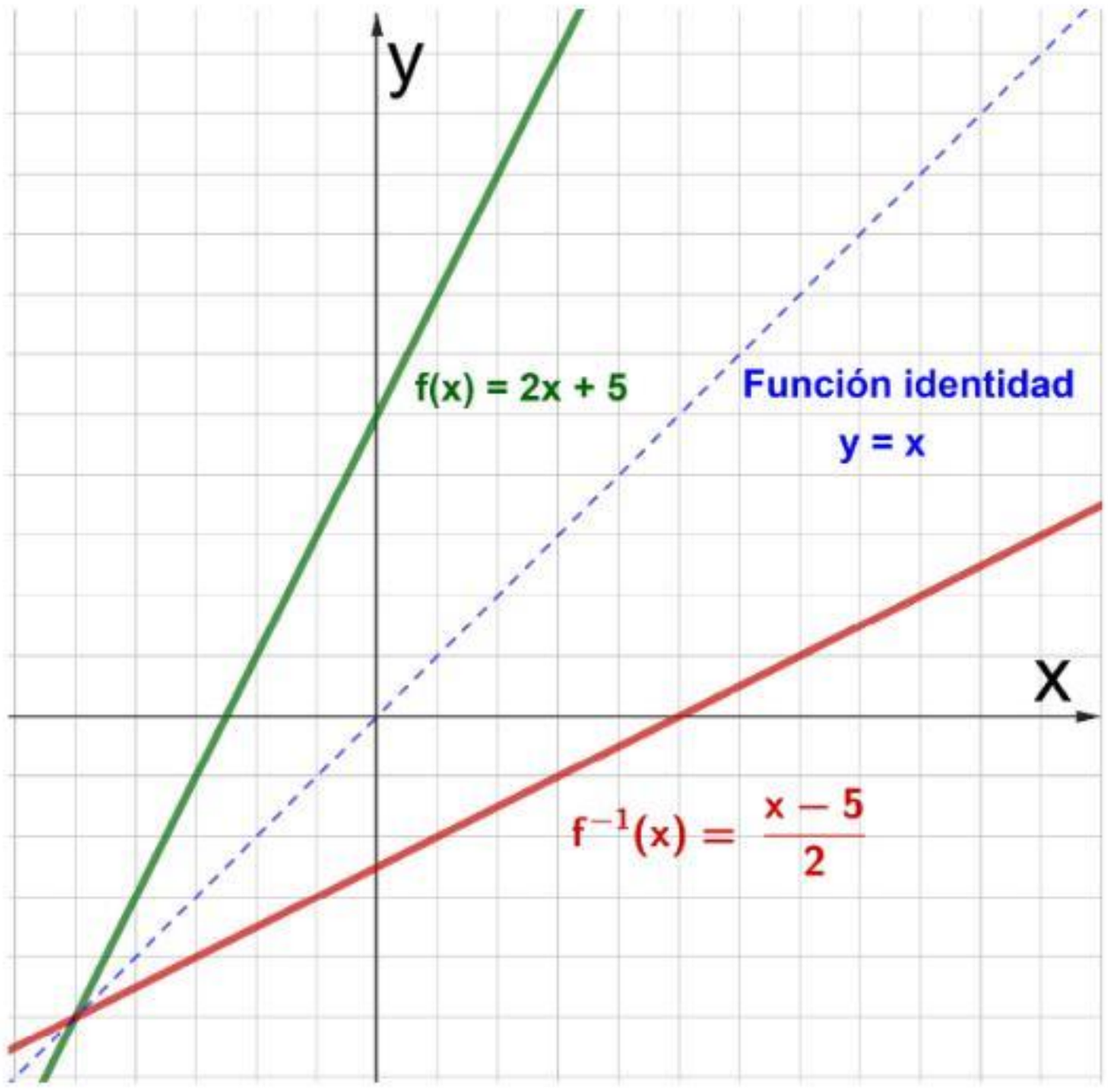
$2y = x - 5$

$y = \frac{x-5}{2}$

Paso 4 $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$

La función inversa de $f(x) = 2x + 5$ es $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$.

Figura 22.
Gráficas de las funciones inversas f (χ) = 2χ + 5 es f^{-1} (χ) = $\frac{x-5}{2}$ y su simetría respecto a la función identidad.



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Gráficas de las funciones inversas f (χ) = 2χ + 5 es f^{-1} (χ) = $\frac{x-5}{2}$ y su simetría respecto a la función identidad.*].

Ejemplo 2:

Función: $g(x) = \frac{2}{3x - 1}$

Paso 1 $y = \frac{2}{3x - 1}$

Paso 2 $x = \frac{2}{3y - 1}$

Paso 3 $3y - 1 = \frac{2}{x}$

$3y = \frac{2}{x} + 1$

$3y = \frac{2+x}{x}$

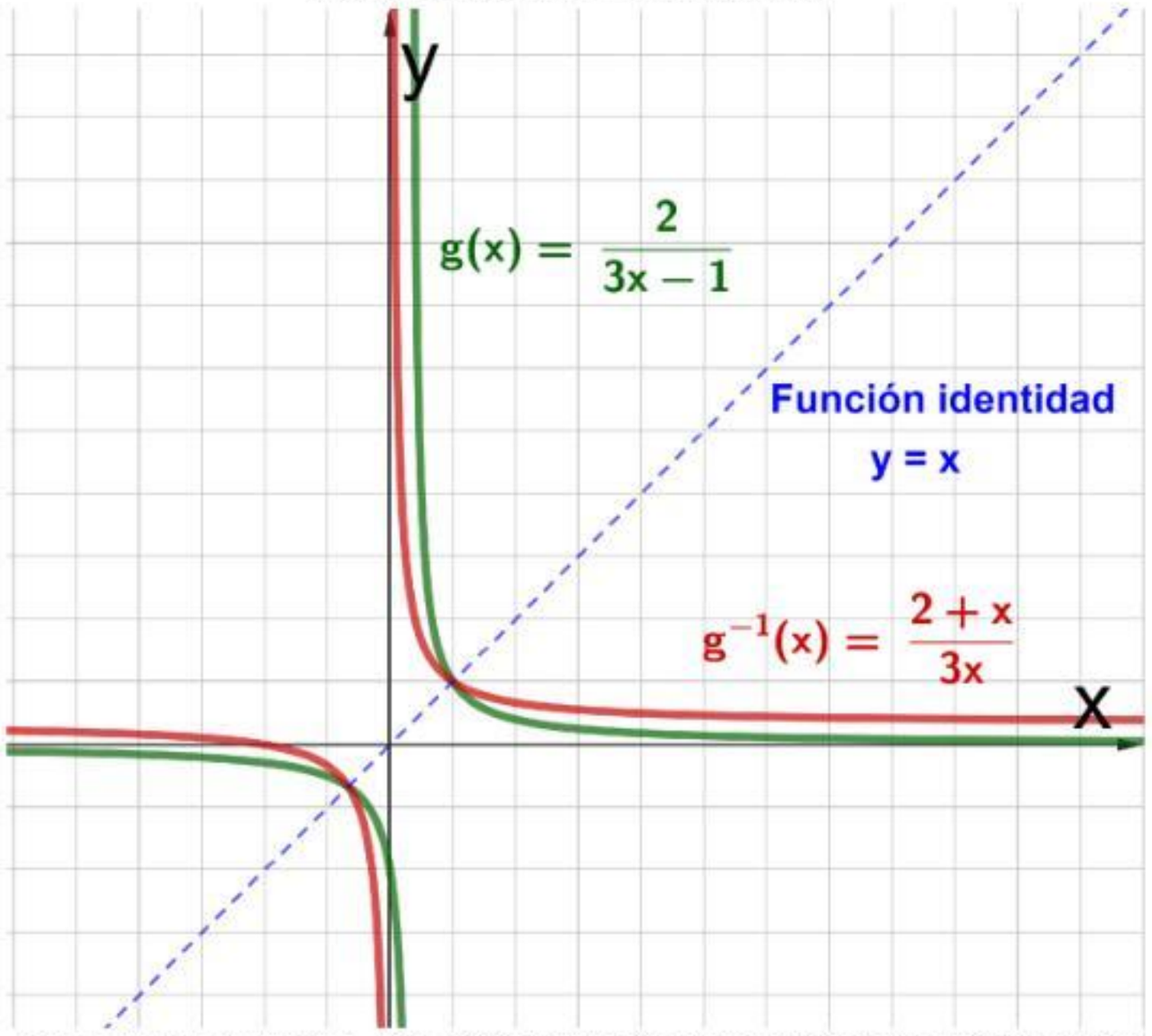
$y = \frac{2+x}{3x}$

Paso 4 $g^{-1}(x) = \frac{2+x}{3x}$

La función inversa de $g(x) = \frac{2+x}{3x - 1}$ es $g^{-1}(x) = \frac{2+x}{3x}$

Figura 23.

Gráficas de las funciones inversas g (x) = $\frac{2+x}{3x - 1}$ es g^{-1} (x) = $\frac{2+x}{3x}$ y su simetría respecto a la función identidad.



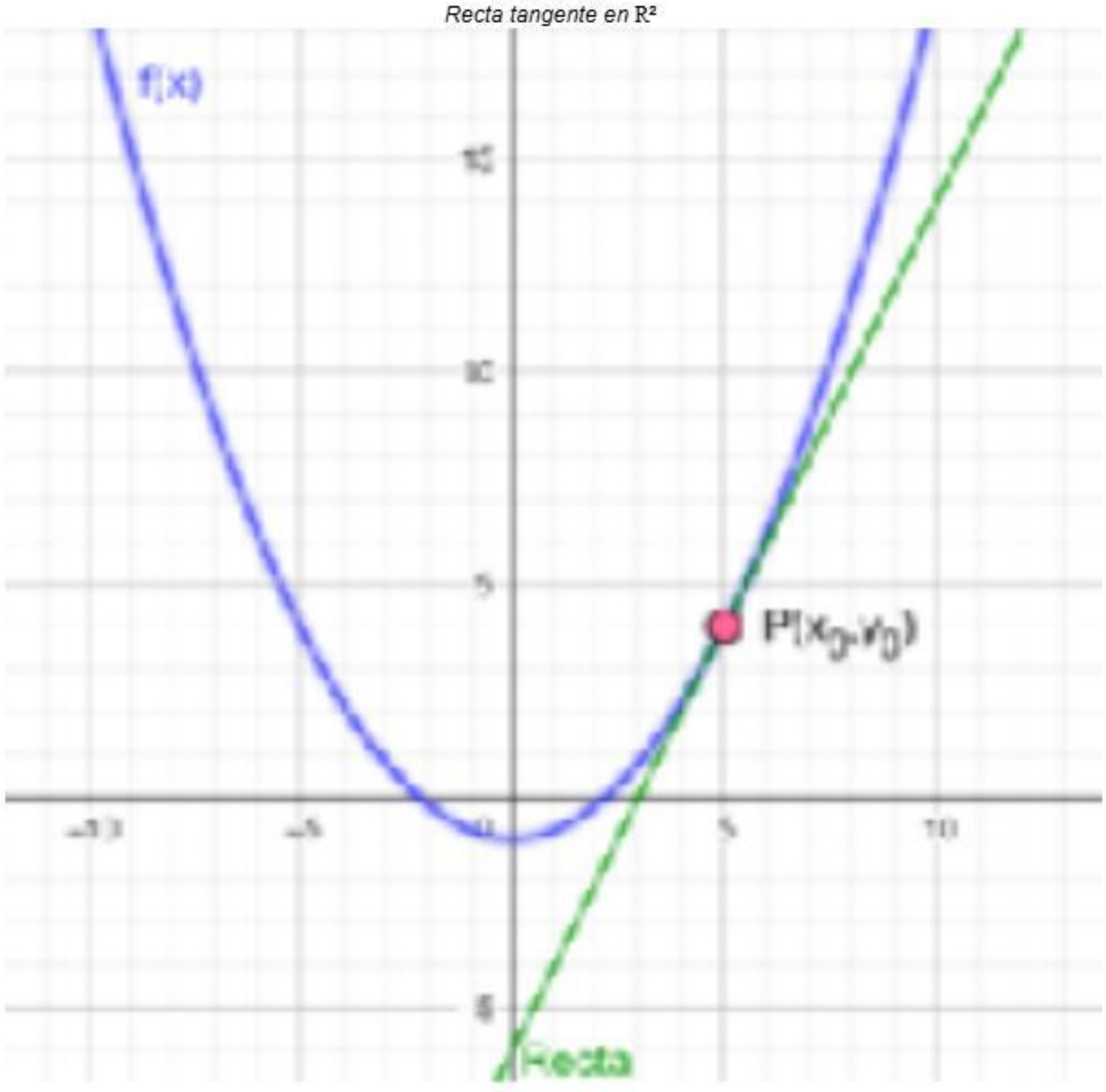
Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Gráficas de las funciones inversas g (x) = $\frac{2+x}{3x - 1}$ es g^{-1} (x) = $\frac{2+x}{3x}$ y su simetría respecto a la función identidad.*].

Aquí es donde entra el concepto de **pendiente de la recta tangente.**

- Si subes suavemente, **la pendiente es pequeña y positiva.**
- Si subes con fuerza, la pendiente es mayor.
- Si estás en un camino plano, **la pendiente es cero.**
- Si empiezas a bajar, la pendiente es negativa.

Una recta es tangente a una función algebraica $f(x)$ en el punto $P(x_0, y_0)$ sí coincide con la dirección de la curva en ese punto y la toca sin atravesarla. **Figura 10.**

Figura 10.
Recta tangente en $\mathbb{R}^2$



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [Recta tangente en $\mathbb{R}^2$].

La pendiente que se simboliza con la letra (m) está definida como la diferencia en el eje **Y** divido por la diferencia en el eje **X** para dos puntos distintos de esta recta. Es decir:

$$Pendiente\ (m) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Δx = es el cambio en los valores de la función
Δy = es el cambio en los valores de la variable independiente

Ejemplo 3:

Función: $f(x) = e^{2x-4}$

Paso 1 $y = e^{2x-4}$

Paso 2 $x = e^{2y-4}$

Paso 3 $\ln(x) = 2y - 4$

$2y - 4 = \ln(x)$

$2y = \ln(x) + 4$

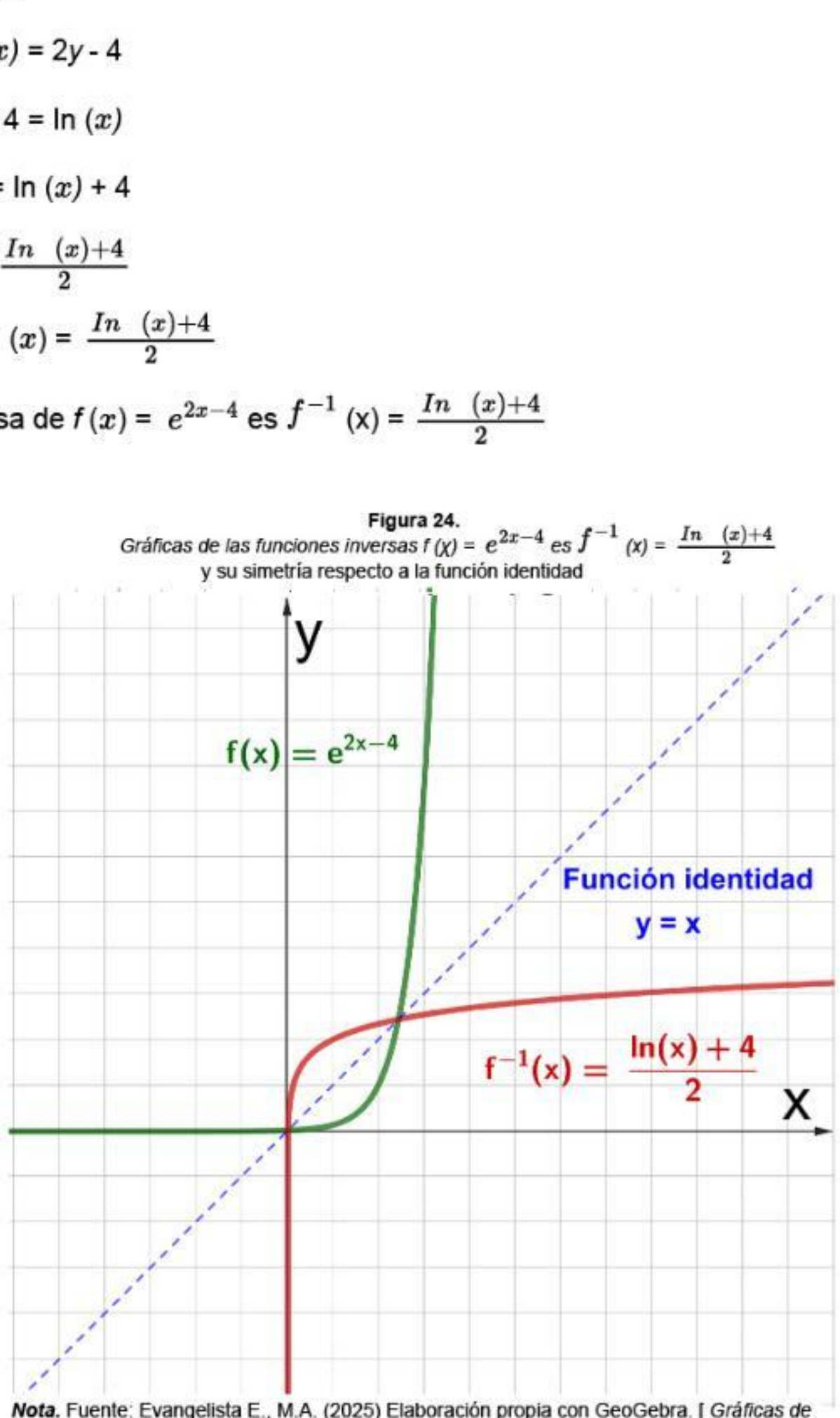
$y = \frac{In\ \ (x)+4}{2}$

Paso 4 $f^{-1}(x) = \frac{In\ \ (x)+4}{2}$

La función inversa de $f(x) = e^{2x-4}$ es $f^{-1}(x) = \frac{In\ \ (x)+4}{2}$

Figura 24.

Gráficas de las funciones inversas $f(x) = e^{2x-4}$ *es* $f^{-1}(x) = \frac{In\ \ (x)+4}{2}$ y su simetría respecto a la función identidad



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Gráficas de las funciones inversas* $f(x) = e^{2x-4}$ *es* $f^{-1}(x) = \frac{In\ \ (x)+4}{2}$ y su simetría respecto a la función identidad

Actividad 9. Función inversa (logarítmica y exponencial)

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para iniciar el ejercicio.



4.5 Periodo de la gráfica de las funciones: *y = a Sen bx y = a Cos bx*

Con la finalidad de comprender mejor los conceptos de este apartado, es conveniente identificar que las gráficas de algunas funciones presentan similitudes, por ejemplo, todas las funciones polinomiales lineales generan una recta, las cuadráticas pueden generar una parábola, las funciones racionales suelen tener asíntotas y las funciones exponenciales y logarítmicas son crecientes o decrecientes; las funciones que presentan estas similitudes, cuando se ajustan y varían ciertos parámetros, son conocidas como **familias de funciones.**

Existen familias de funciones muy útiles en matemáticas llamadas funciones trigonométricas, sirven para describir un buen número de fenómenos, por ejemplo, el comportamiento de la luz, el funcionamiento del horno de microondas, la transmisión del sonido, la transferencia de datos, el diseño de radares, ecografías, el cálculo de fuerzas y tensiones en estructuras y armaduras, entre otros.

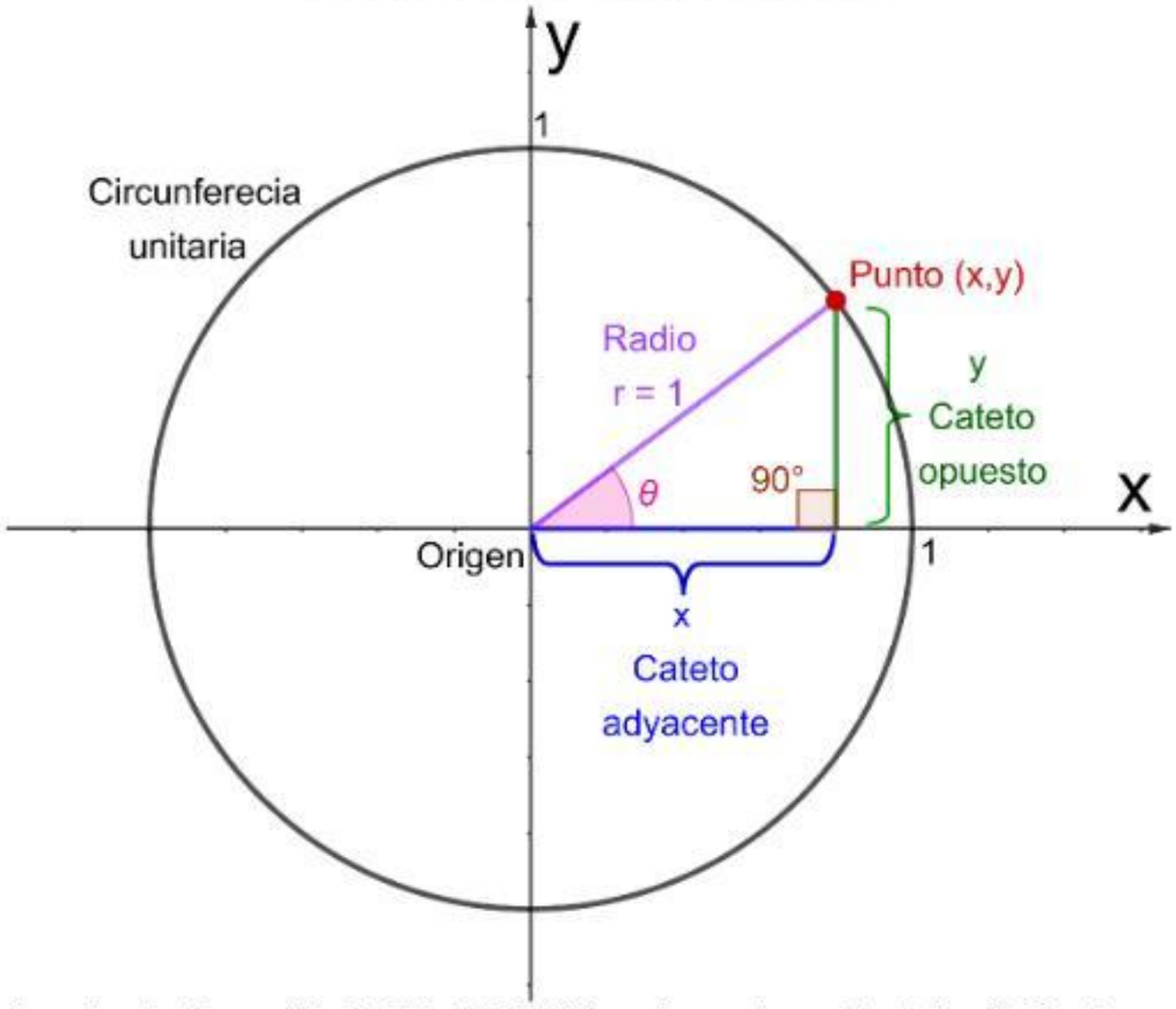
Estas funciones surgen de las llamadas razones trigonométricas, relaciones entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo, que es un triángulo que tiene un ángulo de 90 grados. Los antiguos griegos estudiaron a profundidad estas relaciones y descubrieron muchas propiedades que son bastante útiles hoy en día.

Comúnmente se habla de seis razones trigonométricas, tres directas: seno (*sen* a veces también escrita *sin*), coseno (*cos*) y tangente (*tan* a veces también escrita *tg*), y tres recíprocas respectivamente: cosecante (*csc*), secante (*sec*) y cotangente (*cot*).

Para representarlas gráficamente, en un plano cartesiano se coloca una circunferencia unitaria (aquella que tiene radio de una unidad, independientemente de la unidad que se emplee) y desde el origen se traza un radio hacia cualquier punto de la circunferencia de coordenadas $P = (x, y)$, a partir de ese punto, se traza un segmento de recta hacia el ***eje x*** que sea perpendicular a dicho eje; formando así un triángulo rectángulo de base x, altura y e hipotenusa $r = 1$. Los lados que forman al ángulo de 90° se denominan catetos, pero necesitamos definir uno que se llamará adyacente y otro opuesto, para esto se requiere elegir uno de los restantes dos ángulos al que llamaremos θ. De forma tradicional, el ángulo que se suele emplear se ubica entre el radio y el ***eje x***, por ende, θ estará comprendido entre la hipotenusa y el que llamaremos cateto adyacente, el lado restante será el cateto opuesto.

Visualmente se tiene lo siguiente:

Figura 25.
Triángulo rectángulo en circunferencia unitaria



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Triángulo rectángulo en circunferencia unitaria].

A partir de esta imagen, es más sencillo identificar las seis razones trigonométricas básicas que son (Contreras et al., 2006):

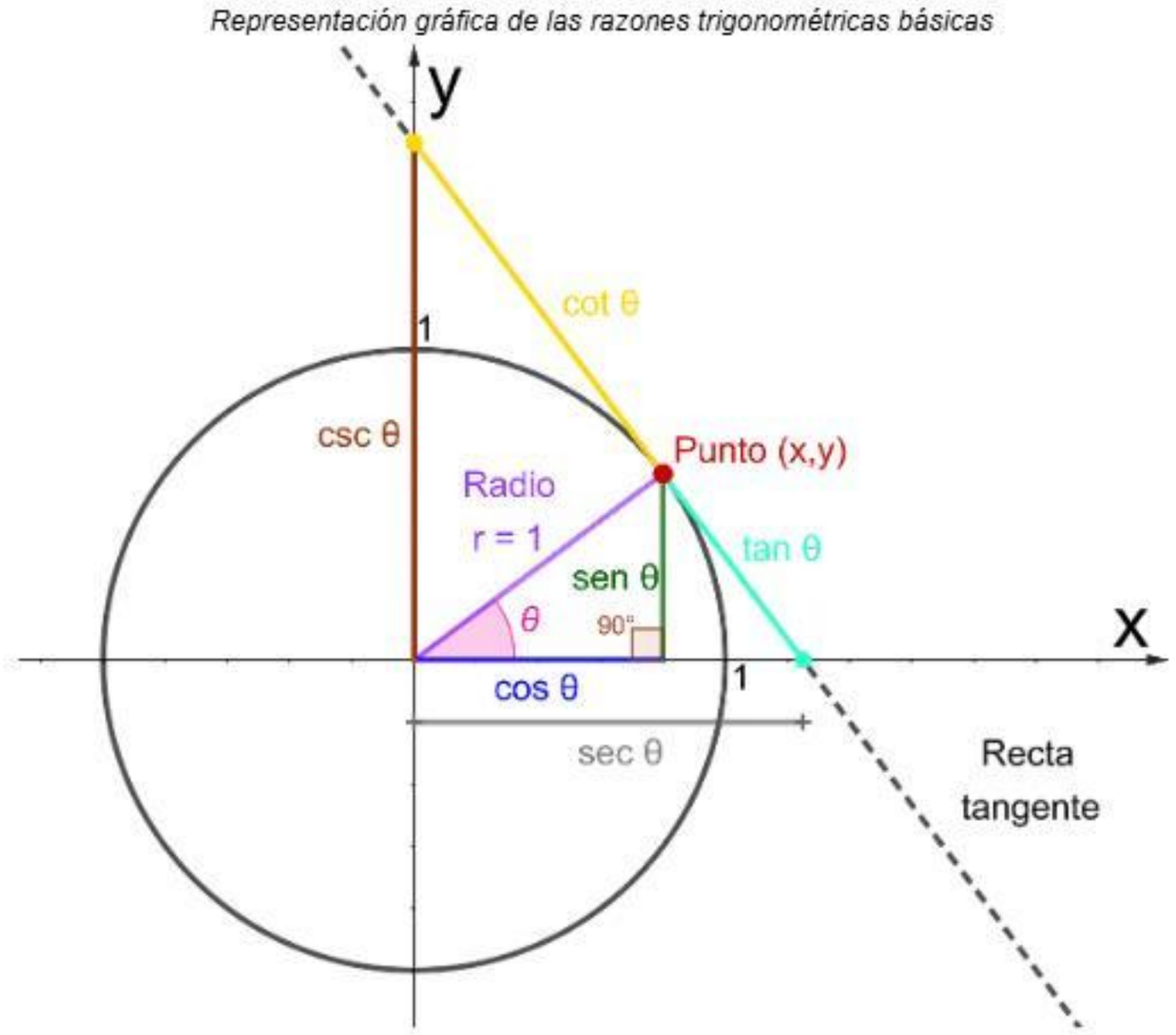
Tabla 3.
Razones trigonométricas

Directas	Recíprocas	
		donde
$sen\ \theta = \frac{co}{h}$	$csc\ \theta = \frac{co}{h}$	h = hipotenusa
$cos\ \theta = \frac{ca}{h}$	$csc\ \theta = \frac{ca}{h}$	co = cateto opuesto
$tan\ \theta = \frac{co}{ca}$	$csc\ \theta = \frac{co}{ca}$	ca = cateto adyacente

Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia [Razones trigonométricas].

Visualmente, las razones trigonométricas representan lo siguiente:

Figura 26.
Representación gráfica de las razones trigonométricas básicas



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Representación gráfica de las razones trigonométricas básicas].

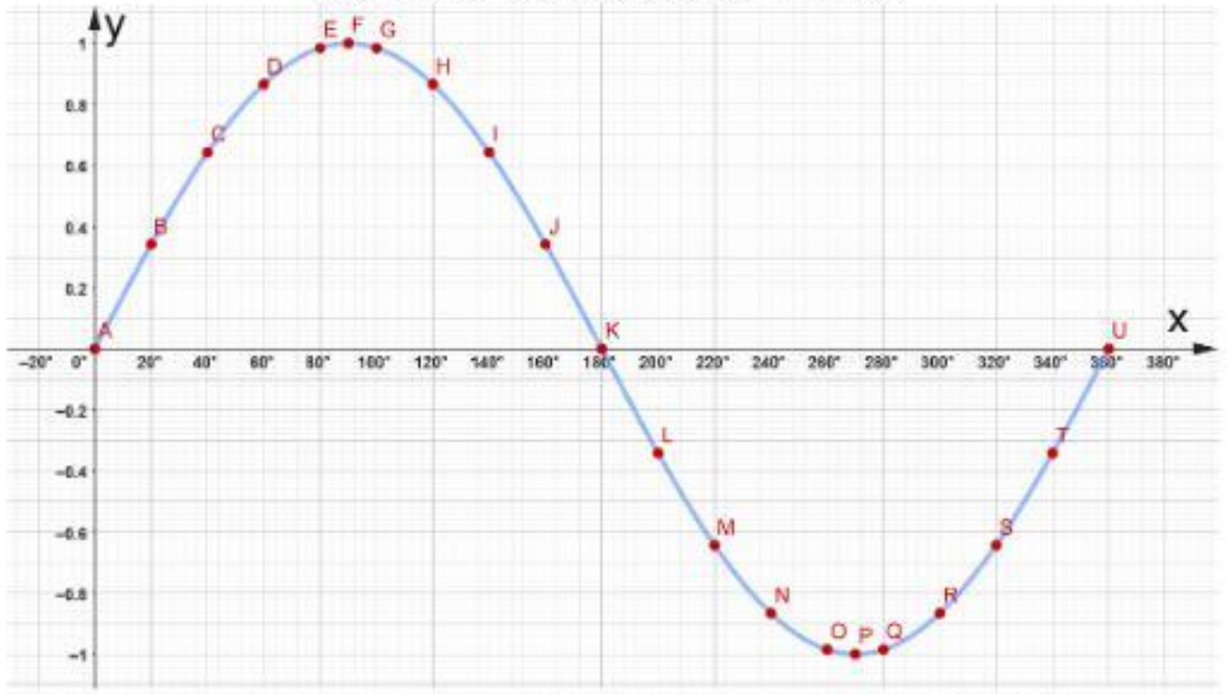
Como puedes observar, al igual que las razones vistas en Pensamiento Matemático II, una razón trigonométrica es la relación existente entre dos medidas de una circunferencia unitaria y las rectas mostradas en las figuras 25 y 26; por ejemplo, la relación entre hipotenusa y cateto opuesto se llama seno, mientras que la relación entre hipotenusa y cateto adyacente se llama coseno, entre otras. Hasta el momento se han definido y explicado qué son las razones trigonométricas, pero en sí, estas no representan funciones, para ello es importante entender que a medida que el punto $P = (x, y)$ se mueve en el contorno de la circunferencia, los valores de las seis razones trigonométricas cambian de forma proporcional. En seguida, se explicará únicamente el comportamiento de las funciones seno y coseno.

Recordemos que en una función podemos tener una variable independiente y una dependiente, hagamos que la variable independiente sea x y que la variable dependiente sea el valor del seno para esa x:

Función seno		
$y = sen\ x$		
	x	y
A	0°	0.000
B	20°	0.342
C	40°	0.643
D	60°	0.866
E	80°	0.985
F	90°	1.000

G	100°	0.985
H	120°	0.866
I	140°	0.643
J	160°	0.342
K	180°	0.000
L	200°	-0.342
M	220°	-0.643
N	240°	-0.866
O	260°	-0.985
P	270°	-1.000
Q	280°	-0.985
R	300°	-0.866
S	320°	-0.643
T	340°	-0.342
U	360°	0.000

Figura 27.
Gráfica de la función seno para 0° ≤ x ≤ 360°



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de la función seno para 0° ≤ x ≤ 360°].

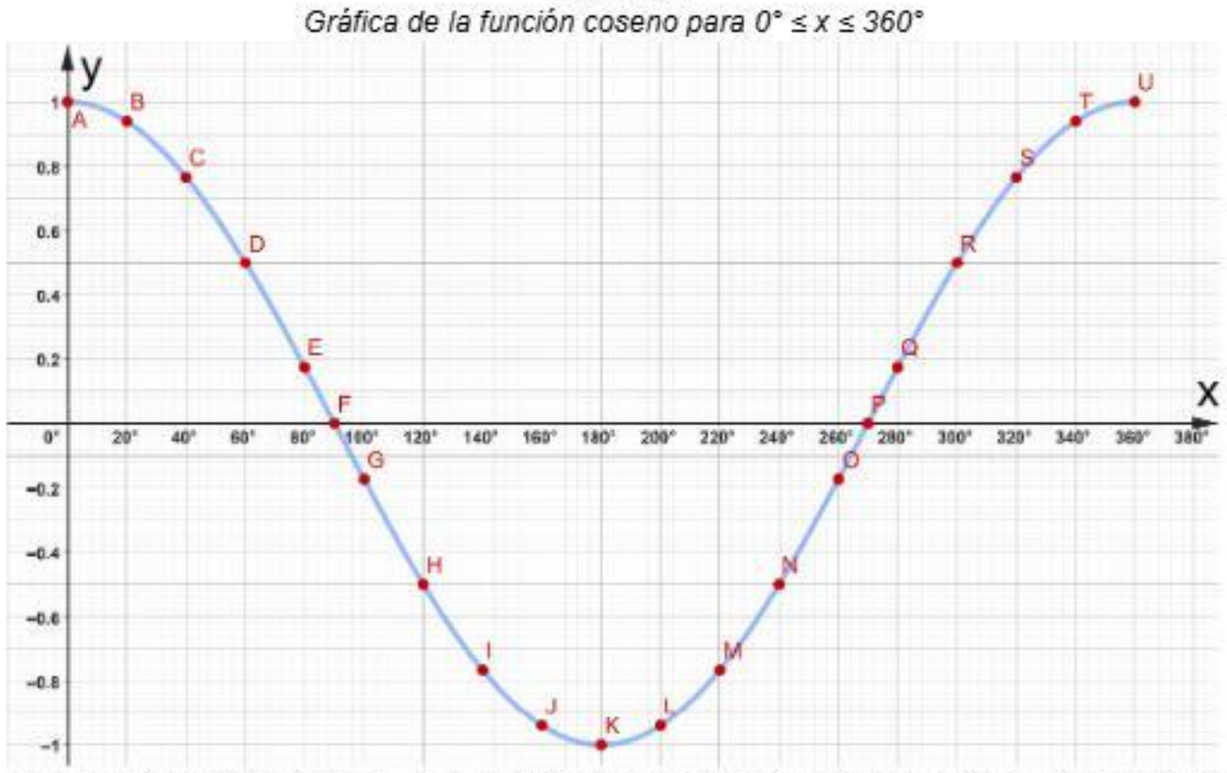
Observa que la sección mostrada de la función seno empieza por una intersección con el eje *x*, después es creciente hasta llegar a un valor de la ordenada que es mayor que el resto de los que están a su alrededor, esto se puede asociar a un máximo local como se vio en el módulo 3, posteriormente decrece a otra intersección con el eje *x* ,y continúa decreciendo hasta un mínimo que de firma análoga se asocia con un mínimo local, al final, es creciente hasta una última intersección con el eje *x* cumpliendo así una vuelta de 360°. Los conceptos de máximo y mínimo local pueden ser demostrados mediante derivadas, se hace la invitación a que con ayuda de tu docente y compañeros analicen este hecho e identifiquen por qué sí son máximos o mínimos locales.

Ahora realicemos el mismo procedimiento para el coseno:

Función coseno		
y = cos x		
	x	*y*
A	0°	1.000
B	20°	0.940
C	40°	0.766
D	60°	0.500
E	80°	0.174
F	90°	0.000
G	100°	-0.174
H	120°	-0.500
I	140°	-0.766
J	160°	-0.940

K	180°	-1.000
L	200°	-0.940
M	220°	-0.766
N	240°	-0.500
O	260°	-0.174
P	270°	0.000
Q	280°	0.174
R	300°	0.500
S	320°	0.766
T	340°	0.940
U	360°	1.000

Figura 28.
Gráfica de la función coseno para 0° ≤ x ≤ 360°

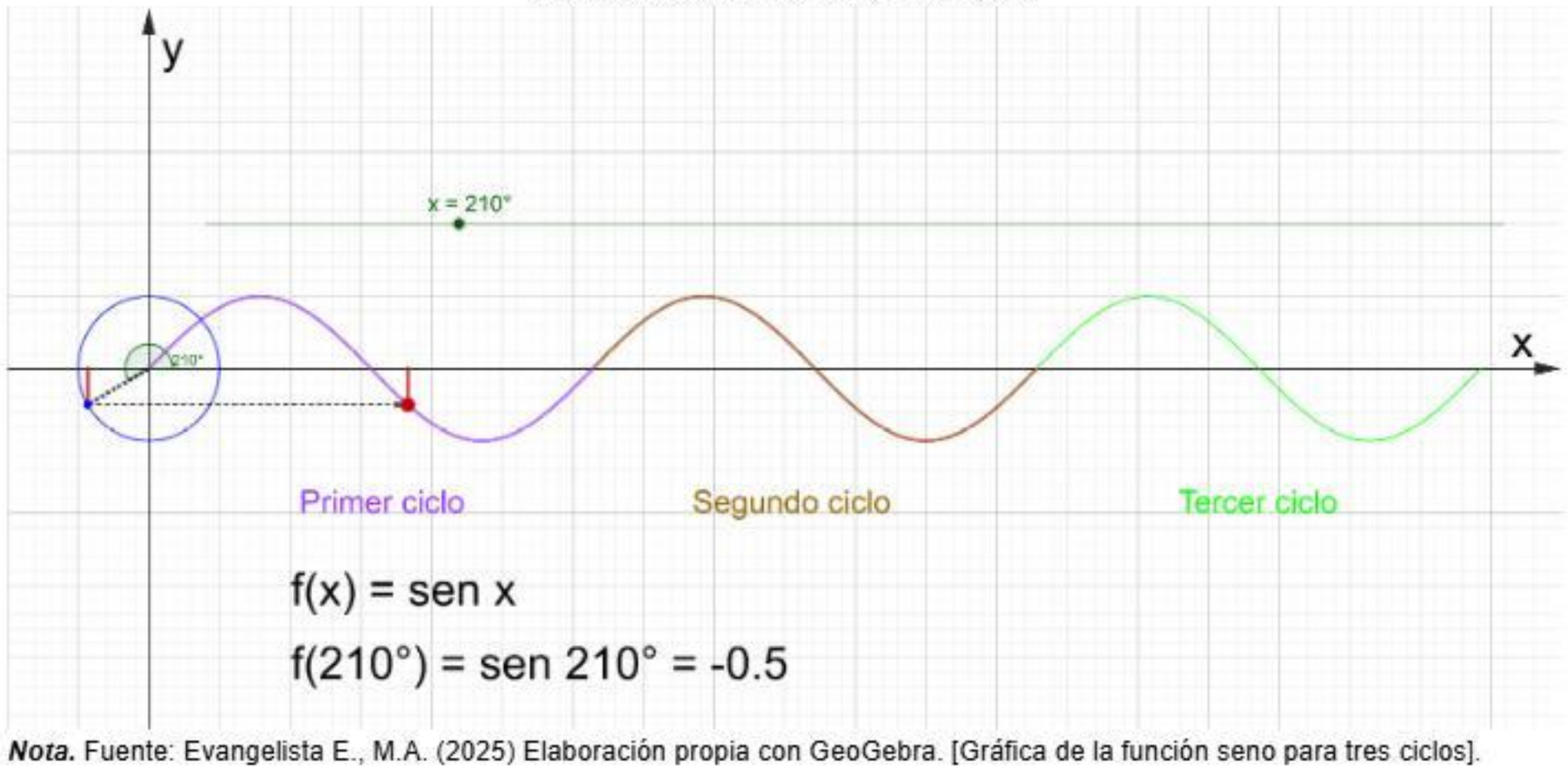


Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de la función coseno para 0° ≤ x ≤ 360°].

Observa que la sección mostrada de la función coseno empieza por un máximo local y decrece hasta una intersección con el *eje x*, después continúa decreciendo hasta llegar a un mínimo local, después crece a otra intersección con el *eje x* y, continúa creciendo hasta otro máximo local cumpliendo así una vuelta de 360°.

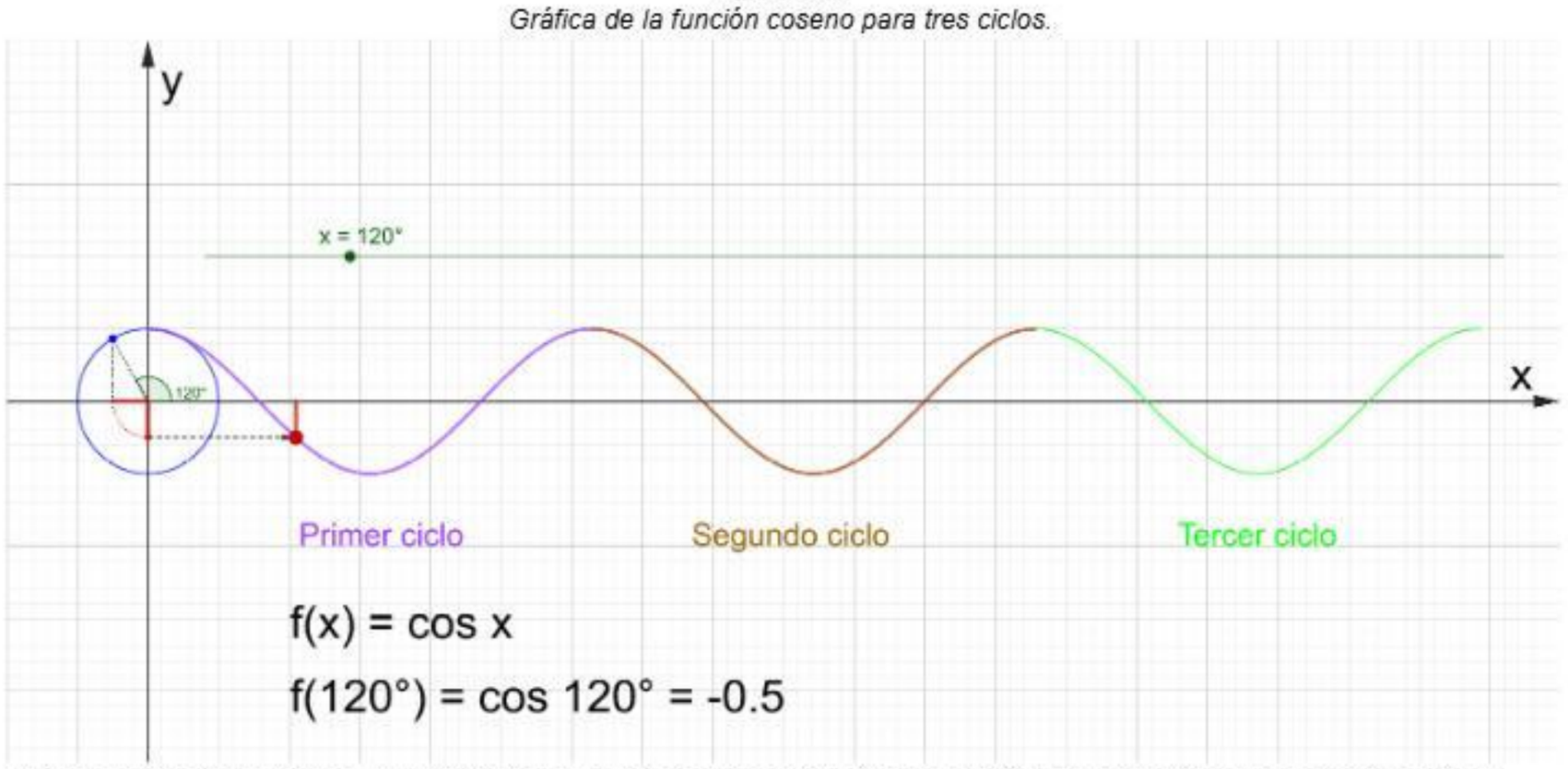
Al representar ángulos en el plano cartesiano, una vuelta va de 0 a 360° a esto se le llama un ciclo o periodo, cuando los ángulos son mayores a 360°, se inicia una segunda vuelta o segundo ciclo, pero los valores del seno y del coseno van a coincidir con los del primer periodo; por tanto, la gráfica obtenida en las figuras 28 y 29 se va a repetir tantas veces como ciclos se desee graficar; a las gráficas que tienen este comportamiento se les llama periódicas. Da clic sobre las siguientes figuras para iniciar una simulación y puedas observar cómo se generan las gráficas de la función seno y coseno respectivamente:

Figura 29.
Gráfica de la función seno para tres ciclos.



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de la función seno para tres ciclos].

Figura 30.
Gráfica de la función coseno para tres ciclos.



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de la función coseno para tres ciclos].

En las simulaciones pudiste observar cómo al cambiar el valor del ángulo (argumento de la función trigonométrica), las funciones seno o coseno se extienden de forma periódica a lo largo del ***eje*** *x*, alternando valores máximos y mínimos relativos, por intervalos, que crecen y decrecen hasta el valor de la amplitud. También que existen de forma periódica intervalos crecientes y decrecientes, así como concavidades positivas y negativas separadas por puntos de inflexión que coinciden con las intersecciones de la función con el ***eje*** *x*. Puedes notar que en las funciones trigonométricas es posible emplear varios conceptos vistos hasta ahora, ponlos en práctica con ayuda de tus compañeros y docente.

Es importante mencionar que hasta ahora se han empleado los ángulos (argumento de la función trigonométrica) medidos en grados, un sistema conocido como sistema sexagesimal; sin embargo, existen otras formas de medir ángulos, como lo es el sistema cíclico, en el que la vuelta a una circunferencia equivale a 2π radianes. En la siguiente tabla se muestran algunas equivalencias:

Tabla 4.
Equivalencias entre ángulos del sistema sexagesimal y el sistema cíclico

Grados	Radianes
0° *o* 360°	0 *o* 2π *rad*
15°	$\frac{\Pi}{12}$ *rad*
30°	$\frac{\Pi}{6}$ *rad*
45°	$\frac{\Pi}{4}$ *rad*
60°	$\frac{\Pi}{3}$ *rad*
75°	$\frac{5\Pi}{12}$ *rad*
90°	$\frac{\Pi}{2}$ *rad*
105°	$\frac{7\Pi}{2}$ *rad*

Grados	Radianes
120°	$\frac{2\Pi}{3}$ *rad*
135°	$\frac{3\Pi}{4}$ *rad*
150°	$\frac{5\Pi}{6}$ *rad*
165°	$\frac{11\Pi}{12}$ *rad*
180°	Π *rad*
195°	$\frac{13\Pi}{12}$ *rad*
210°	$\frac{7\Pi}{6}$ *rad*
225°	$\frac{5\Pi}{4}$ *rad*

Grados	Radianes
240°	$\frac{4\Pi}{3}$ *rad*
255°	$\frac{17\Pi}{12}$ *rad*
270°	$\frac{3\Pi}{2}$ *rad*
285°	$\frac{19\Pi}{12}$ *rad*
300°	$\frac{5\Pi}{3}$ *rad*
315°	$\frac{7\Pi}{4}$ *rad*
330°	$\frac{11\Pi}{6}$ *rad*
345°	$\frac{23\Pi}{12}$ *rad*

Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia. [Equivalencias entre ángulos del sistema sexagesimal y el sistema cíclico].

Además de los valores mostrados en la tabla anterior, también se puede emplear la siguiente relación y realizar una proporción para calcular el valor de cualquier ángulo entre ambos sistemas de medición:

$$\pi \ rad = 180°$$

Esta relación es importante porque el sistema cíclico suele ser empleado para casos como el de las funciones seno y coseno que se extienden longitudinalmente.

Al ser una familia de funciones, existen ciertos parámetros que modifican el comportamiento de las gráficas de la función seno y coseno, en este tema se abordan dos de ellos: la amplitud, que indica los valores máximos que puede tomar la imagen de la función, y el parámetro b (asociado al periodo), el cual indica qué tan ancha o angosta será la función para cada ciclo de la gráfica, algebraicamente se representan de la siguiente forma:

Figura 31.
Parámetros a y b en las funciones trigonométricas seno y coseno

$$y = a \operatorname{sen} bx \qquad y = a \cos bx$$

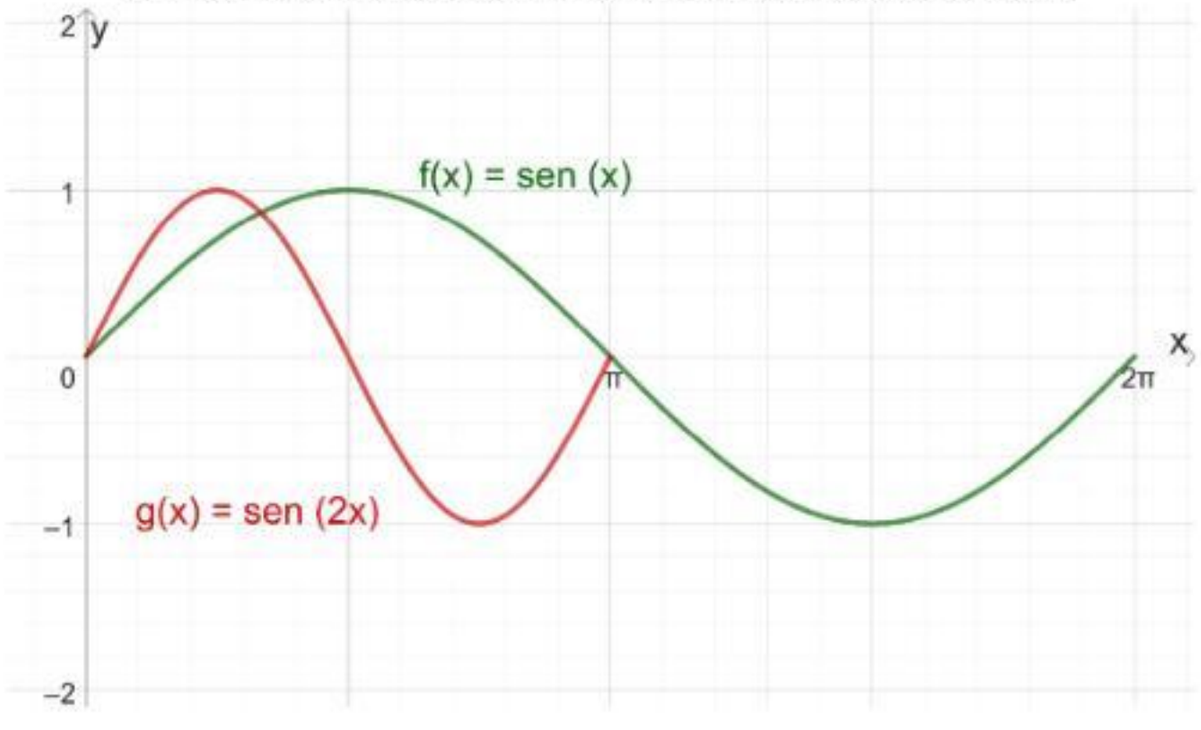
Parámetro	Parámetro	Parámetro	Parámetro
a	b	a	b
Asociado a la amplitud	Asociado al periodo	Asociado a la amplitud	Asociado al periodo

Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia. [Parámetros a y b en las funciones trigonométricas seno y coseno].

Como puedes observar, el parámetro amplitud a está multiplicando a toda la expresión seno o coseno, por lo que el valor de la función adquiere a veces el valor de la función $f(x) = sen\ x$ o $f(x) = cos\ x$, según sea el caso, por lo que decimos que la función se hace más "alta" o "baja".

Por otro lado, el parámetro b está multiplicando al argumento (ángulo) de las funciones, por lo que, si para un ciclo a las funciones $f(x) = sen$ o $f(x) = cos\ x$ les lleva ocupar 360° o 2π *rad*, a las funciones $g(x) = sen\ bx$ o $g(x) = cos\ bx$ les lleva b veces menos completar un ciclo; para ejemplificar esto, observemos el siguiente ejemplo:

Figura 32.
Gráficas comparativas de las funciones f (x) = sen (x) y g (x) = sen (2x).



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráficas comparativas de las funciones *f (x) = sen (x) y g (x) = sen (2x)*].

Definición:

"Dado que los ángulos θ y θ + 2π corresponden al mismo punto P, los valores de las funciones trigonométricas en θ y en θ + 2π son los mismos. En consecuencia, las funciones trigonométricas son funciones periódicas. El ***periodo de una función*** *f se define como el menor valor positivo p de manera que f (x + p) = f (x) para todos los valores x en el dominio de f."*

Con ayuda de la figura y definición anteriores puedes observar que para cumplirse un ciclo de la función *g* (*x*) = *sen* 2*x* se requiere la mitad de longitud que requiere la función *f* (*x*) = *sen x*, en otras palabras, decimos que el periodo de la función *g* (*x*) = *sen* 2*x* es la mitad del periodo de la función *f* (*x*) = *sen x*; por ejemplo, el punto máximo de *f* (*x*) ocurre en $x = \pi$ mientras que ese respectivo punto máximo en *g* (*x*) ocurre a la mitad de *f* (*x*) en $x = \frac{\Pi}{2}$, de igual forma, la última intersección de *f* (*x*) ocurre en $x = 2\pi$ mientras que esa respectiva intersección en *g* (*x*) ocurre a la mitad de *f* (*x*) en $x = \pi$.

Esto se puede generalizar para cualquier valor del parámetro *b* y también, de forma análoga, para la función coseno, por lo que los periodos de las familias de funciones trigonométricas seno y coseno está dado por:

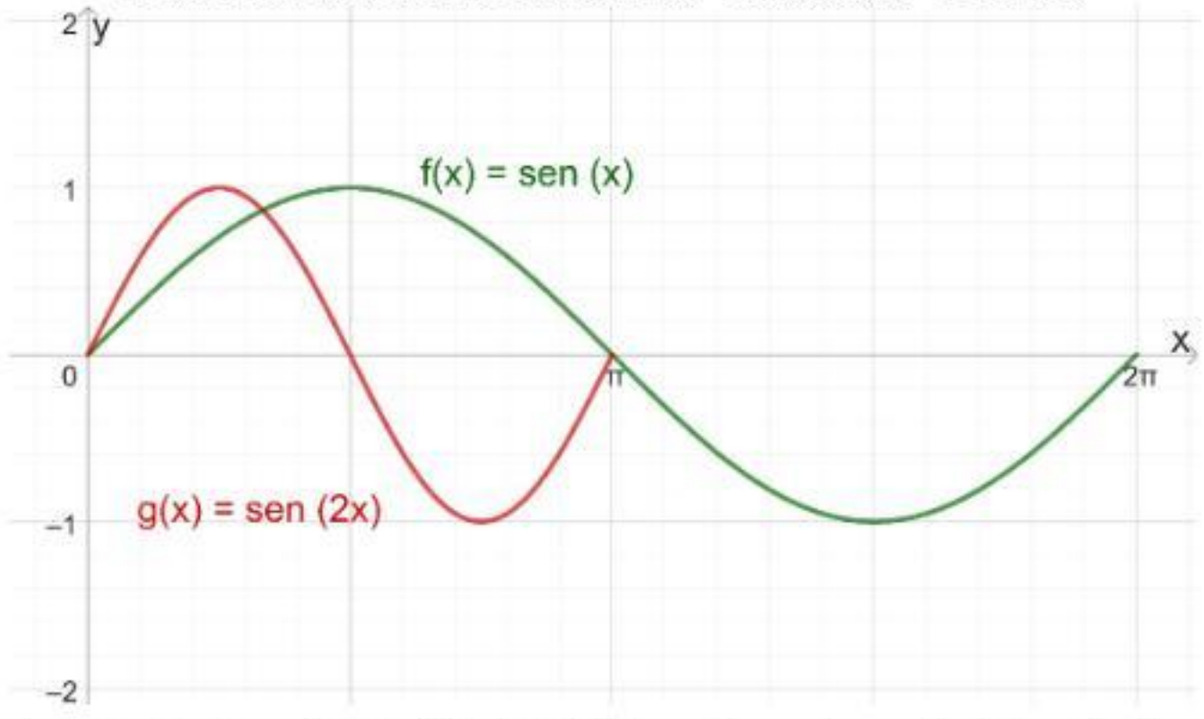
Periodo

$P = \frac{180^{\circ}}{b}$ Para el sistema sexagesimal

$P = \frac{2\Pi \ \ rad}{b}$ Para el sistema cíclico

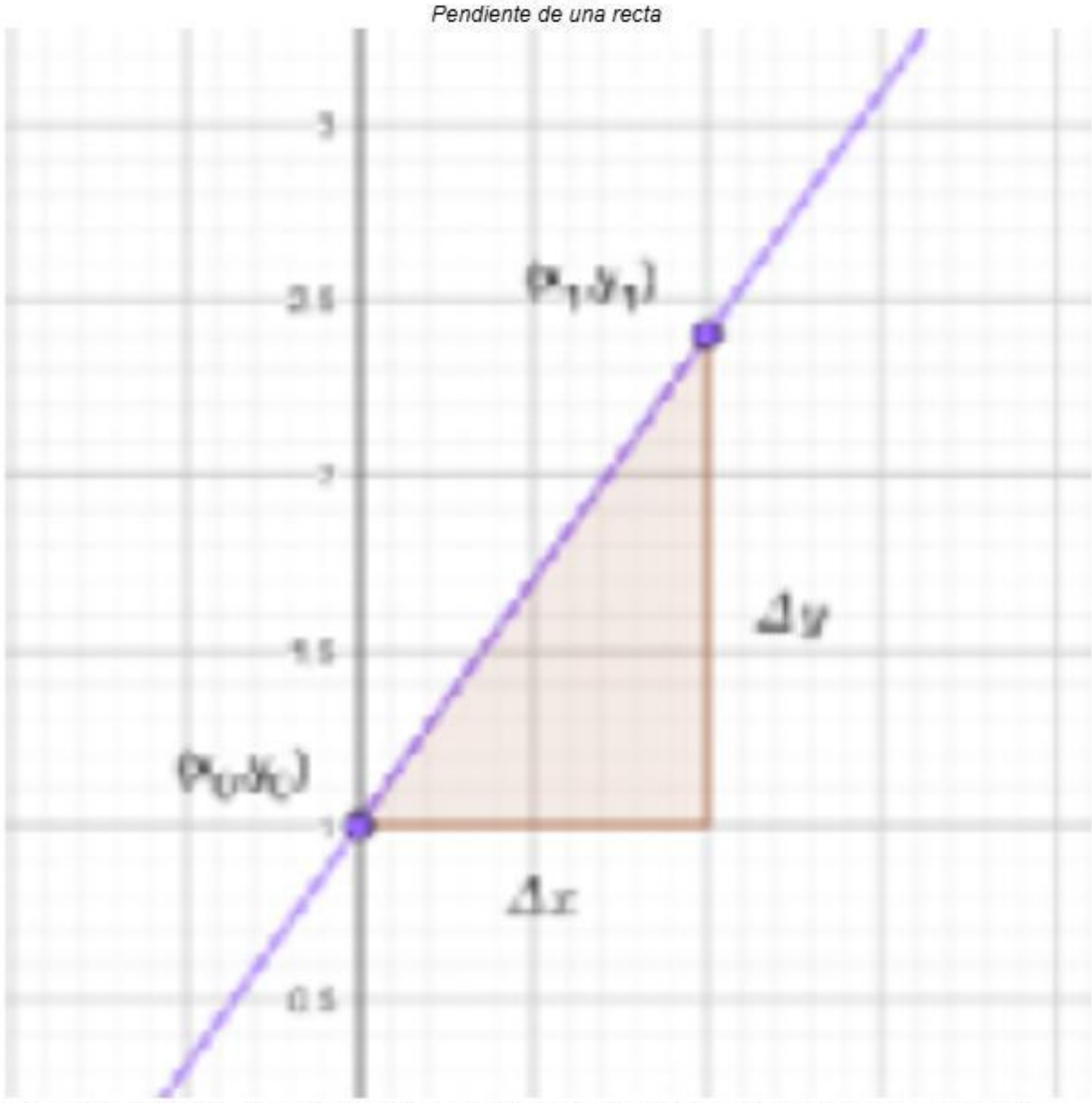
Da clic en la siguiente imagen y analiza las semejanzas y diferencias con las funciones *f* (*x*) = *sen x* y *g* (*x*) = *a sen* (*bx*), desliza los parámetros *a* y *b* para que observes cómo se comporta la gráfica de *g* (*x*) = *a sen* (*bx*):

Figura 33.
Gráficas comparativas de las funciones f (x) = sen (x) y g (x) = a sen (bx).



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráficas comparativas de las funciones *f (x) = sen (x) y g (x) = a sen (bx)*].

Figura 11.
Pendiente de una recta



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [Pendiente de una recta].

En funciones algebraicas o polinomiales la pendiente no es constante, para aproximar la pendiente en un punto, usamos dos puntos cercanos a la curva.

Un punto fijo inicial definido por $(x_0, f(x_0))$
Un segundo punto móvil cercano definido por $(\boldsymbol{x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)})$

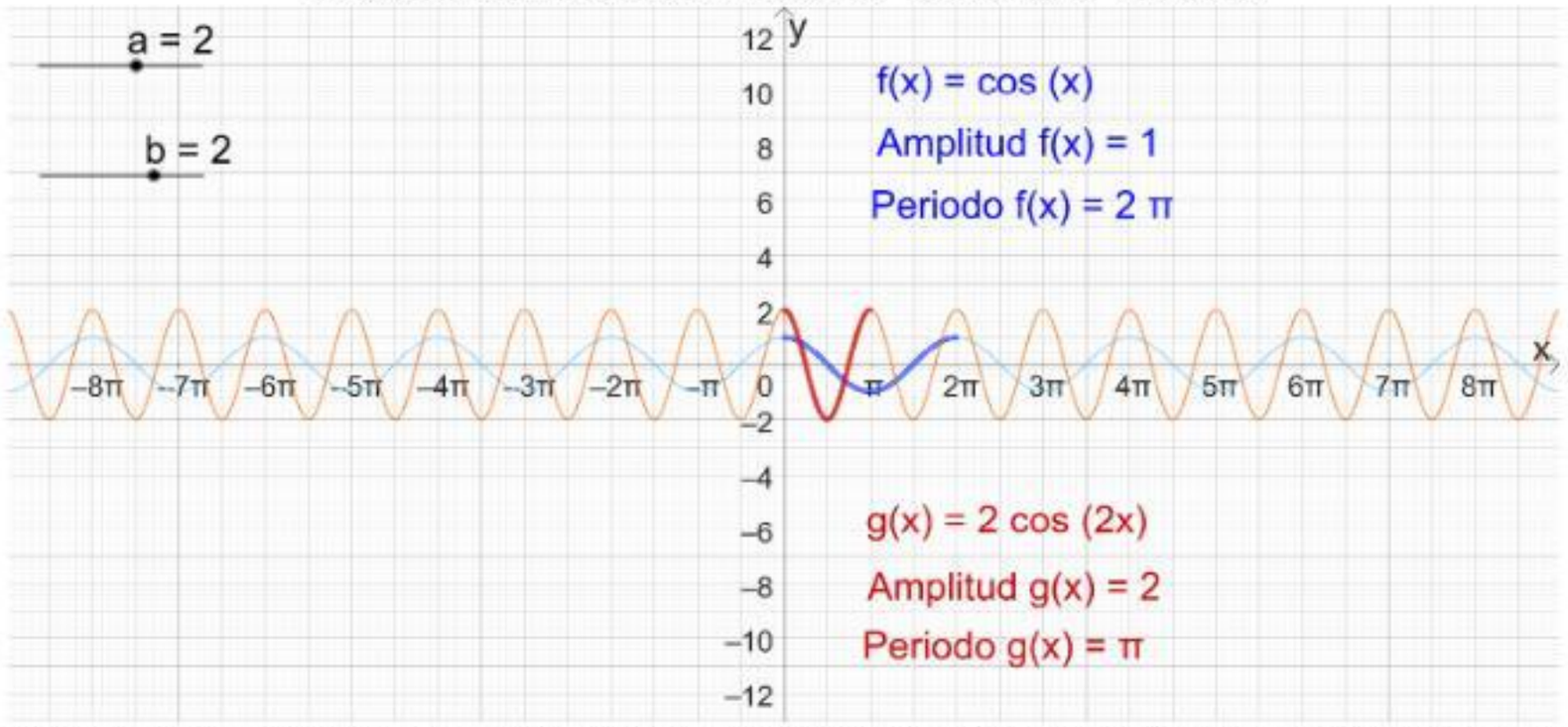
La pendiente entre estos dos puntos es: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Con esta fórmula se calcula la pendiente de la recta secante $m_{sec} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ que corta la curva entre dos puntos.

Si hacemos que se haga muy pequeño, es decir, que el segundo punto se acerque al primero, hasta **el límite**, la secante se convierte en una **recta tangente**.

Da clic en la siguiente imagen y analiza las semejanzas y diferencias con las funciones $f(x) = cos\ x$ y $g(x) = a\ cos\ (bx)$, desliza los parámetros a y b para que observes cómo se comporta la gráfica de $g(x) = a\ cos\ (bx)$:

Figura 34.
Gráficas comparativas de las funciones f (x) = cos (x) y g (x) = a cos (bx).



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráficas comparativas de las funciones *f (x) = cos (x) y g (x) = a cos (bx)*].

En las simulaciones pudiste observar que el primer ciclo coincide con el valor del periodo, mientras que el segundo, tercer y subsecuentes ciclos se obtienen sumando el periodo al valor final en de cada ciclo, por ejemplo:

Ejemplo 1:

Función: $f(v) = sen\ v$

Parámetro $a = 1$

Parámetro $b = 1$

Periodo $P = \frac{2\Pi}{b} = \frac{2\Pi}{1} = 2\ \pi$

El primer ciclo va de 0 a 2π. El segundo ciclo inicia donde terminó el primero en 2π y se extiende 2π más para cubrir el segundo ciclo, y así sucesivamente:

Primer ciclo $[0, 2\pi]$

$2\pi + 2\pi = 4\pi$

Segundo ciclo $[2\pi, 4\pi]$

$4\pi + 2\pi = 6\pi$

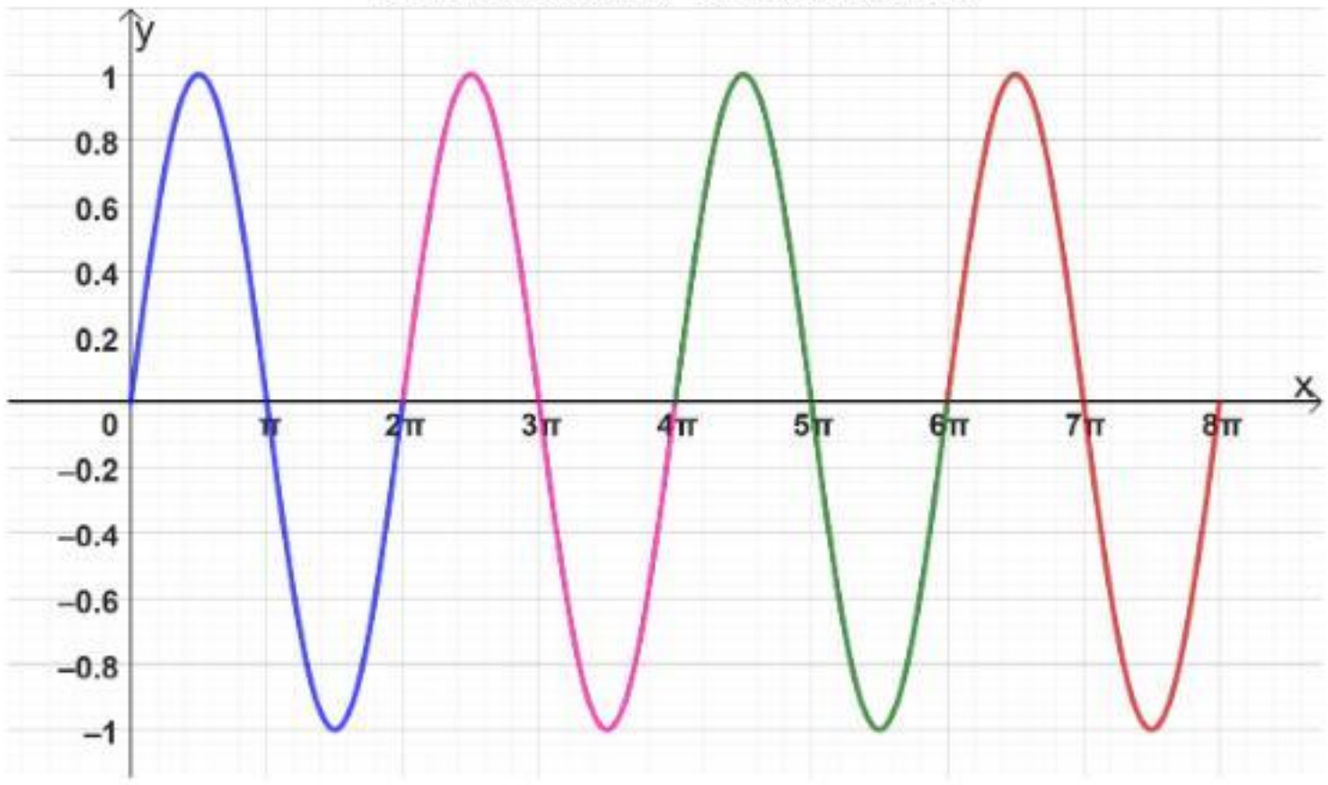
Tercer ciclo $[4\pi, 6\pi]$

$6\pi + 2\pi = 8\pi$

Cuarto ciclo $[6\pi, 8\pi]$

La gráfica correspondiente es:

Figura 35.
Gráfica la función f (x) = sen (x) para 4 ciclos.



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica la función *f (x) = sen (x)* para 4 ciclos].

Ejemplo 2:

Función: $f(x) = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Parámetro $a = 3$

Parámetro $b = \frac{1}{2}$

Periodo $P = \frac{2\Pi}{b} = \frac{2\Pi}{1/2} = 4\pi$

El primer ciclo va de 0 a 4π. El segundo ciclo inicia donde terminó el primero en 4π y se extiende 4π más para cubrir el segundo ciclo, y así sucesivamente:

Primer ciclo $[0, 4\pi]$

$4\pi + 4\pi = 8\pi$

Segundo ciclo $[4\pi, 8\pi]$

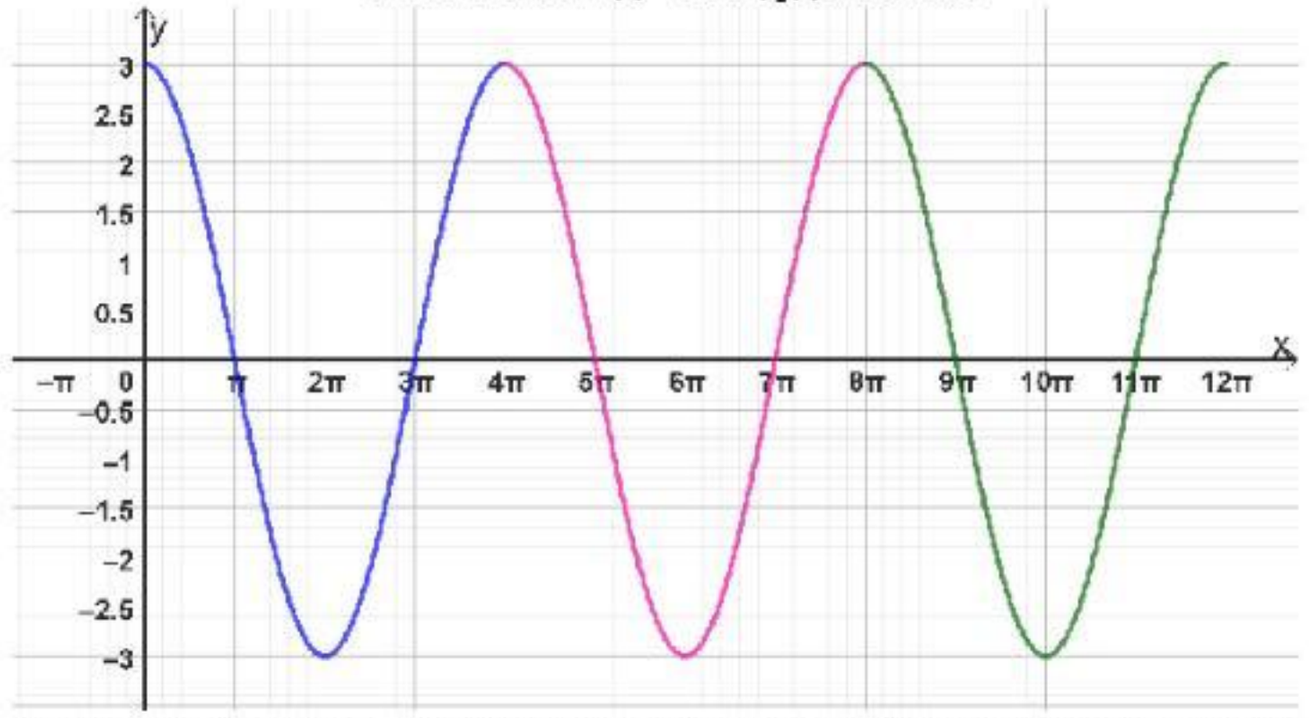
$8\pi + 4\pi = 12\pi$

Tercer ciclo $[8\pi, 12\pi]$

También identifiquemos que en la función $f(x) = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ el parámetro *a* tiene un valor de $a = 3$, por lo que los respectivos valores de las ordenadas de los puntos máximos y mínimos estarán determinados por esa cantidad, siendo positivo para los máximos y negativo para los mínimos.

También identifiquemos que en la función $f(x) = 3\ cos\ (\frac{x}{2})$ el parámetro a tiene un valor de $a =$

Figura 36.
Gráfica la función f (x) = 3 cos ($\frac{x}{2}$) para 3 ciclos



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica la función *f (x) = 3 cos ($\frac{x}{2}$)* para 3 ciclos].

Ejemplo 3:

Función: $f(x) = 5\ \text{sen}\ (4x)$

Parámetro $a = 5$

Parámetro $b = 4$

Periodo $P = \frac{2\Pi}{b} = \frac{2\Pi}{4} = \frac{\Pi}{2}$

El primer ciclo va de 0 a $\frac{\Pi}{2}$. El segundo ciclo inicia donde terminó el primero en $\frac{\Pi}{2}$ y se extiende $\frac{\Pi}{2}$ más para cubrir el segundo ciclo, y así sucesivamente:

Primer ciclo $[0, \frac{\Pi}{2}]$

$$\frac{\Pi}{2} + \frac{\Pi}{2} = \pi$$

Segundo ciclo $[\frac{\Pi}{2}, \pi]$

$$\pi + \frac{\Pi}{2} = \frac{3\Pi}{2}$$

Tercer ciclo $[\pi, \frac{3\Pi}{2}]$

$$\frac{3\Pi}{2} + \frac{\Pi}{2} = 2\pi$$

Cuarto ciclo $[\frac{3\Pi}{2}, 2\pi]$

También identifiquemos que en la función $f(x) = 5\ sen\ (4x)$ el parámetro a tiene un valor de $a = 5$, por lo que los respectivos valores de las ordenadas de los puntos máximos y mínimos estarán determinados por esa cantidad, siendo positivo para los máximos y negativo para los mínimos.

La gráfica correspondiente es:

Figura 37.
Gráfica la función f (x) = 5 sen (4x) para 4 ciclos

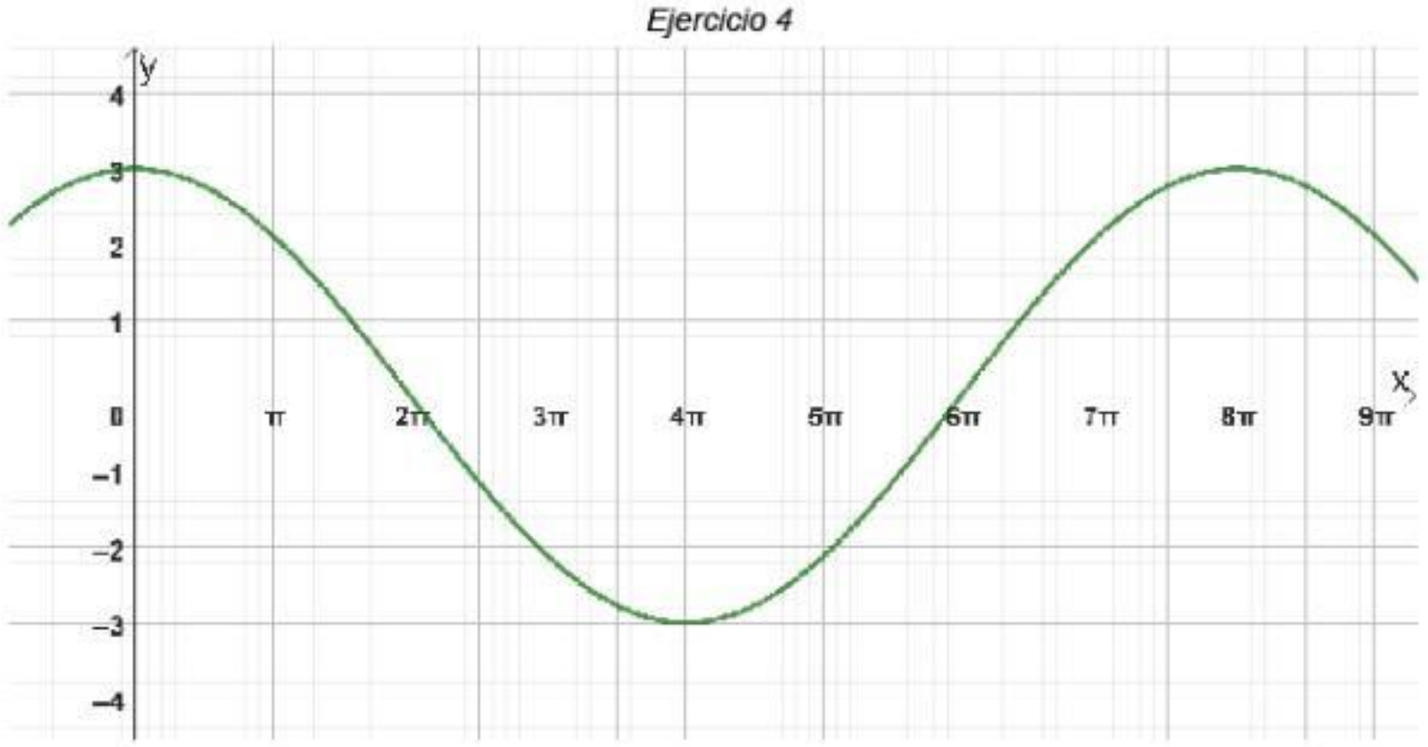


Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica la función *f (x) = 5 sen (4x)* para 4 ciclos].

Ejemplo 4:

Obtener la función que representa a la siguiente gráfica:

Figura 38.
Ejercicio 4



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Ejercicio 4].

Se puede observar que la función empieza con un punto máximo en x = 0, por lo que se trata de una función coseno, además el punto en el que la gráfica cruza al *eje* y es 3, por lo tanto, la amplitud *a* es *a* = 3. Después, el siguiente punto máximo representa el final del primer ciclo de la función coseno, el cual se encuentra en $x = 8\pi$, por lo que el periodo *P* es $P = 8\pi$, ahora solo basta despejar al parámetro b de la fórmula del periodo:

$$P = \frac{2\Pi}{b}$$

$$b = \frac{2\Pi}{P}$$

$$b = \frac{2\Pi}{8\Pi}$$

$$b = \frac{1}{4}$$

En conclusión, la función que representa a la gráfica dada es:

$$f(x) = a \cos(bx) \qquad con\ a = 3 \ \wedge \ b = \frac{1}{4}$$

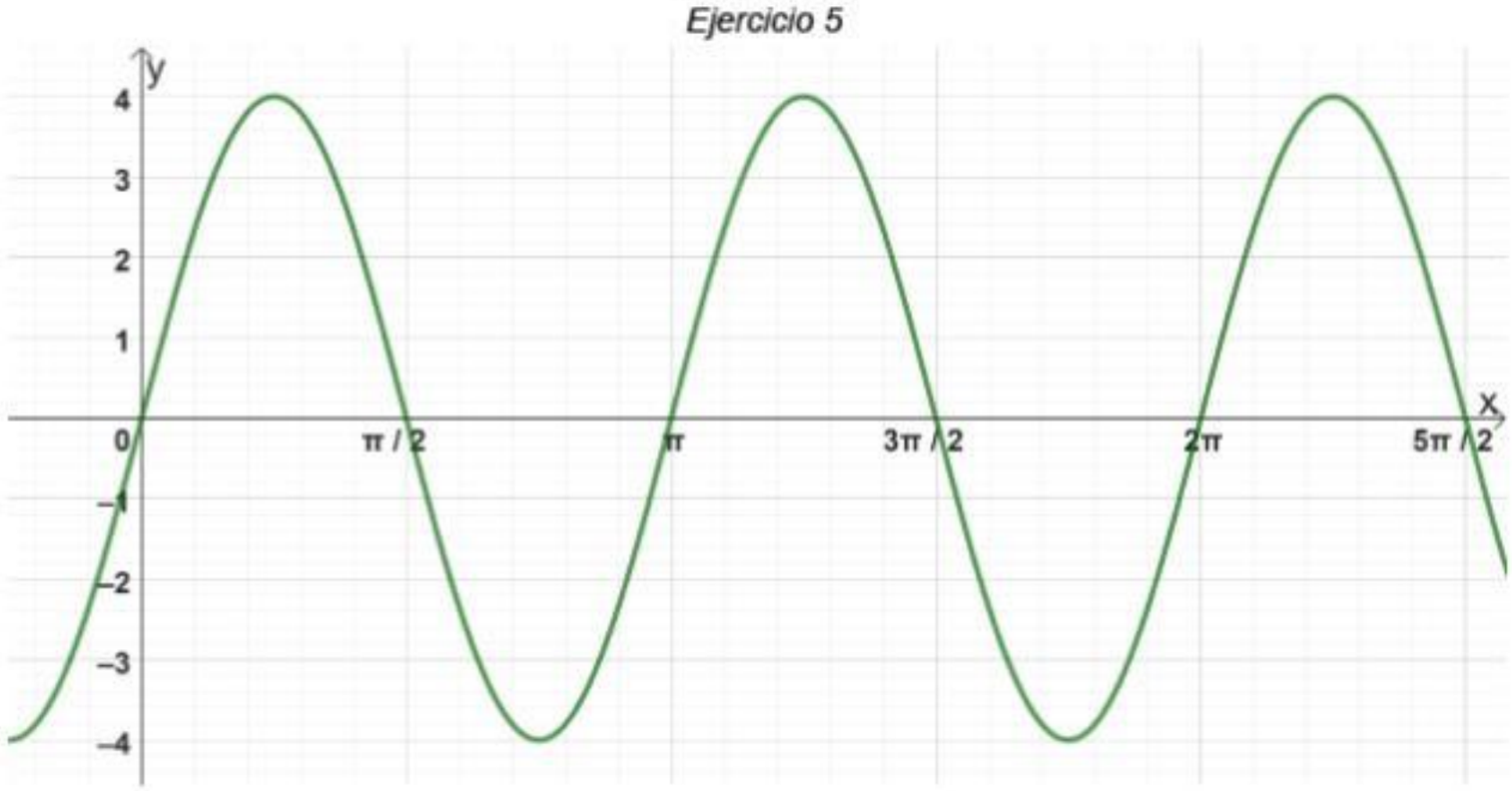
$$f(x) = 3 \cos\left(\frac{1}{4}\ x\right)$$

$$f(x) = 3 \cos\left(\frac{x}{4}\right)$$

Ejemplo 5:

Obtener la función que representa a la siguiente gráfica:

Figura 39.
Ejercicio 5



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Ejercicio 5].

Se puede observar que la función empieza con una intersección en x = 0, por lo que se trata de una función seno, además el punto en el que la gráfica cruza al *eje* y es 4, por lo tanto, la amplitud *a* es *a* = 4. Después, el tercer punto de intersección representa el final del primer ciclo de la función seno, el cual se encuentra en $x = \pi$, por lo que el periodo *P* es $P = \pi$, ahora solo basta despejar al parámetro *b* de la fórmula del periodo:

$$P = \frac{2\Pi}{b}$$

$$b = \frac{2\Pi}{P}$$

$$b = \frac{2\Pi}{\Pi}$$

$$b = 2$$

En conclusión, la función que representa a la gráfica dada es:

$$f(x) = a\ sen\ (bx) \qquad con\ a = 4 \ \wedge \ b = 2$$

$$f(x) = 4\ sen\ (2\ x)$$

Ahora tienes una mejor comprensión de las funciones trigonométricas seno y coseno, existen otros parámetros que las afectan, por ejemplo, el denominado ángulo de desfasamiento, el cual recorre horizontalmente a la gráfica ya sea a la izquierda cuando este ángulo es positivo, o a la derecha cuando es negativo, estos y más temas los podrás analizar en tus siguientes cursos de Temas selectos de matemáticas o en los siguientes cursos de matemáticas de tu bachillerato.



Actividad 10. Periodo de la gráfica de las funciones: *y = a Sen bx y = a Cos bx*

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para iniciar el ejercicio.



4.6 Problemas de modelación-optimización (estableciendo la función)

A lo largo de este texto has examinado el comportamiento de diferentes tipos de funciones: polinomiales, racionales, irracionales, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas; también has aprendido que son útiles para diferentes contextos. En este apartado analizaremos algunas situaciones en las que se puede inferir o definir un modelo matemático que las represente, con el objetivo de que se optimice algún parámetro de la situación planteada; por ejemplo, reducir los costos de producción de contenedores, calcular cuál es el tamaño apropiado de un envase para su almacenamiento y transporte, entre otros. Empecemos analizando la siguiente situación.

Ejemplo 1

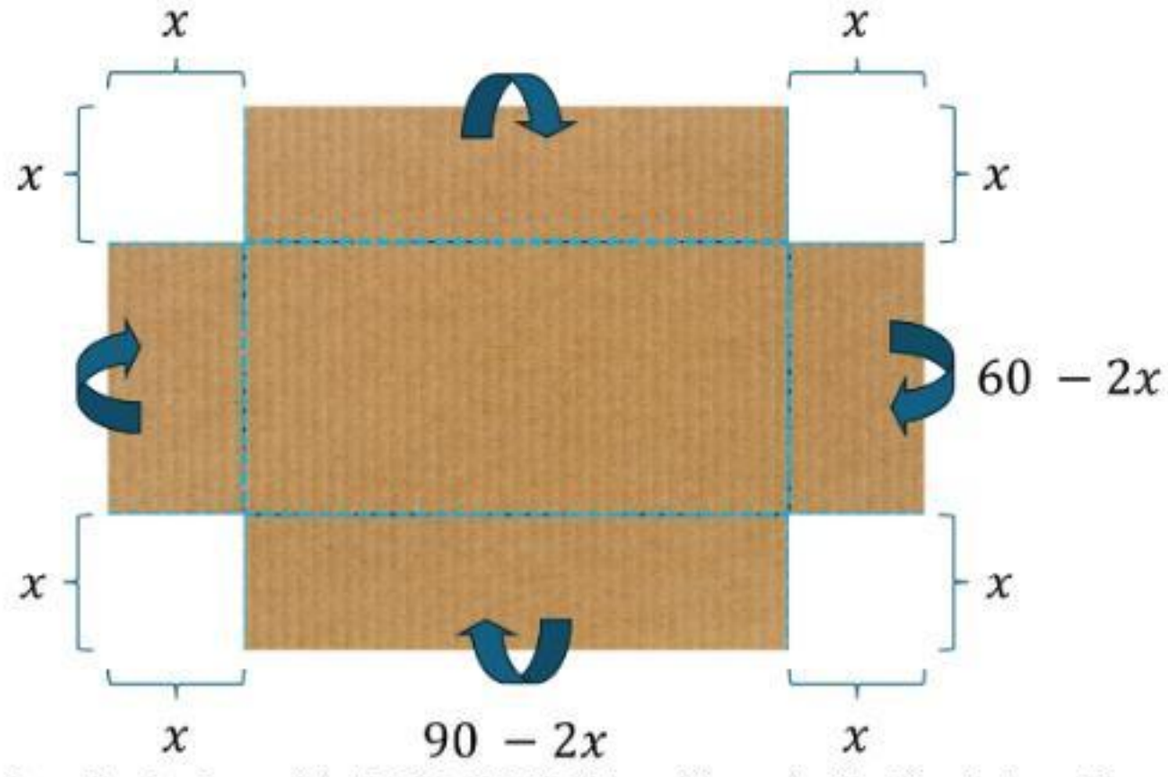
Se tiene un rectángulo de cartón de 90 cm × 60 cm, con él se desea construir una caja sin tapa cortando un cuadrado en cada esquina y doblando hacia arriba las pestañas resultantes. ¿Cuál es la medida del lado de los cuadrados de las esquinas que permite que el volumen de la caja resultante sea el máximo posible? ¿Cuál es el valor del volumen máximo?

Solución:

Identifiquemos que se desea optimizar el volumen, en este caso, que sea el máximo posible, por lo que el objetivo principal del ejercicio es modelar la función del volumen de la caja en términos de la medida del lado del cuadrado que se requiere cortar en las esquinas.

Primero realicemos un bosquejo del rectángulo indicado, en el que se muestren los cuadrados solicitados en las esquinas, dado que no se conoce la medida que debe tener, se asignará la variable x (en cm) para representarla; además, como se van a cortar estos cuadrados, la medida de cada lado se reduce en $2x$:

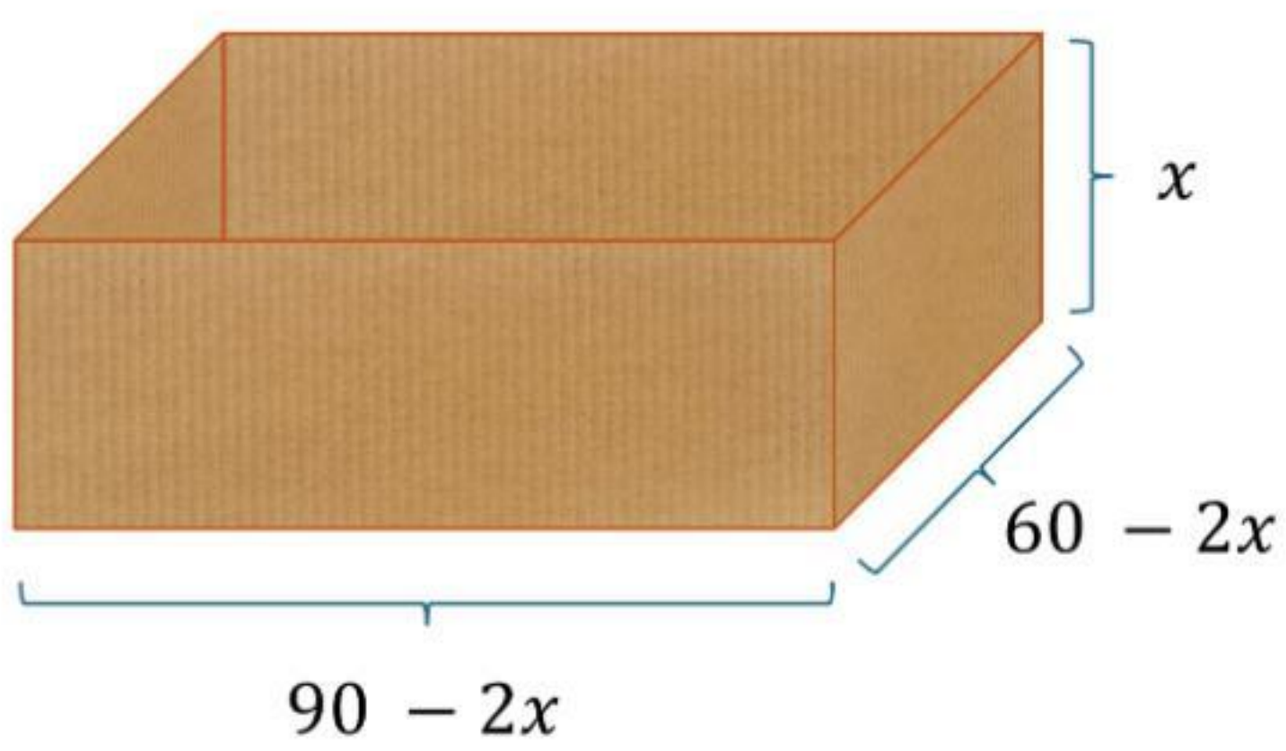
Figura 40.
Rectángulo de cartón con cortes cuadrados en las esquinas para formar una caja



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia. [Rectángulo de cartón con cortes cuadrados en las esquinas para formar una caja].

Al realizar los dobleces con las pestañas resultantes se obtiene una caja, donde la altura corresponde precisamente a esa medida desconocida *x*:

Figura 41.
Caja de cartón



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia. [Caja de cartón].

De la caja resultante, podemos obtener la función que representa el volumen en términos de la variable *x*:

Caja

Fórmula del volumen

$V = largo \times ancho \times alto$

Función del volumen

$$V(x) = (90 - 2x)(60 - 2x)(x)$$

$$V(x) = 4x^3 - 300x^2 + 5400x$$

Una vez obtenida la función que se desea optimizar, recurrimos a los procedimientos que aprendimos sobre máximos y mínimos.

Derivamos a la función $V(x)$:

$$V'(x) = 12x^2 - 600x + 5400$$

Recordamos que una función tendrá un máximo o un mínimo cuando $f'(x) = 0$, por lo que igualamos la derivada con 0:

$$12x\,x^2 - 600x + 5400 = 0$$

Con la finalidad de simplificar un poco la ecuación cuadrática se reducirán ambos miembros al dividirlos entre 12:

$$\frac{12x^2-600x+5400}{12} = \frac{0}{12}$$

$$x^2 - 50x + 450 = 0$$

Obtenemos los valores de *xx* con alguno de los métodos vistos en apartados anteriores, en este caso se empleará la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-\left(-50\right) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4\left(1\right)\left(450\right)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{50 \pm \sqrt{700}}{2}$$

$$x = \frac{50 \pm 26.45}{2}$$

De donde los posibles valores de x son:

$$x = \frac{50-26.46}{2} \qquad x = \frac{50+26.46}{2}$$

$$x = \frac{23.54}{2} \qquad x = \frac{76.42}{2}$$

$$x = 11.77 \qquad x = 38.23$$

Desde este momento se podrían deducir algunas cosas importantes, por ejemplo, darse cuenta que si la medida del lado del cuadrado fuese de x = 38.23 cm y debido a que se deben cortar dos trozos de ese tamaño por cada lado, el total del corte sería de 76.46 cm, lo cual excede el ancho del rectángulo de cartón original, por lo tanto ese valor no es un resultado posible; no obstante, aplicaremos los conocimientos aprendidos sobre el criterio de la segunda derivada para confirmar que x = 11.77 cm maximiza el volumen de la caja.

Calculamos la segunda derivada de $V(x)$:

$$V'(x) = 12x^2 - 600x + 5400$$

$$V''(x) = 24x - 600$$

Sustituimos los valores obtenidos de x en la segunda derivada:

x = 11.77	x = 38.23
$V''(x) = 24x - 600$	$V''(x) = 24x - 600$
$V''(11.77) = 24\ (11.77) - 600$	$V''(38.23) = 24\ (38.23) - 600$
$V''(11.77) = -317.52$	$V''(38.23) = 317.52$
Como -317.52 < 0 se tiene un valor máximo en x = 11.77	Como 317.52 > 0 se tiene un valor mínimo en x = 38.23

Con la finalidad de simplificar un poco la ecuación cuadrática se reducirán ambos miembros al dividirlos entre 12:

$$\frac{12x^2-600x+5400}{12} = \frac{0}{12}$$

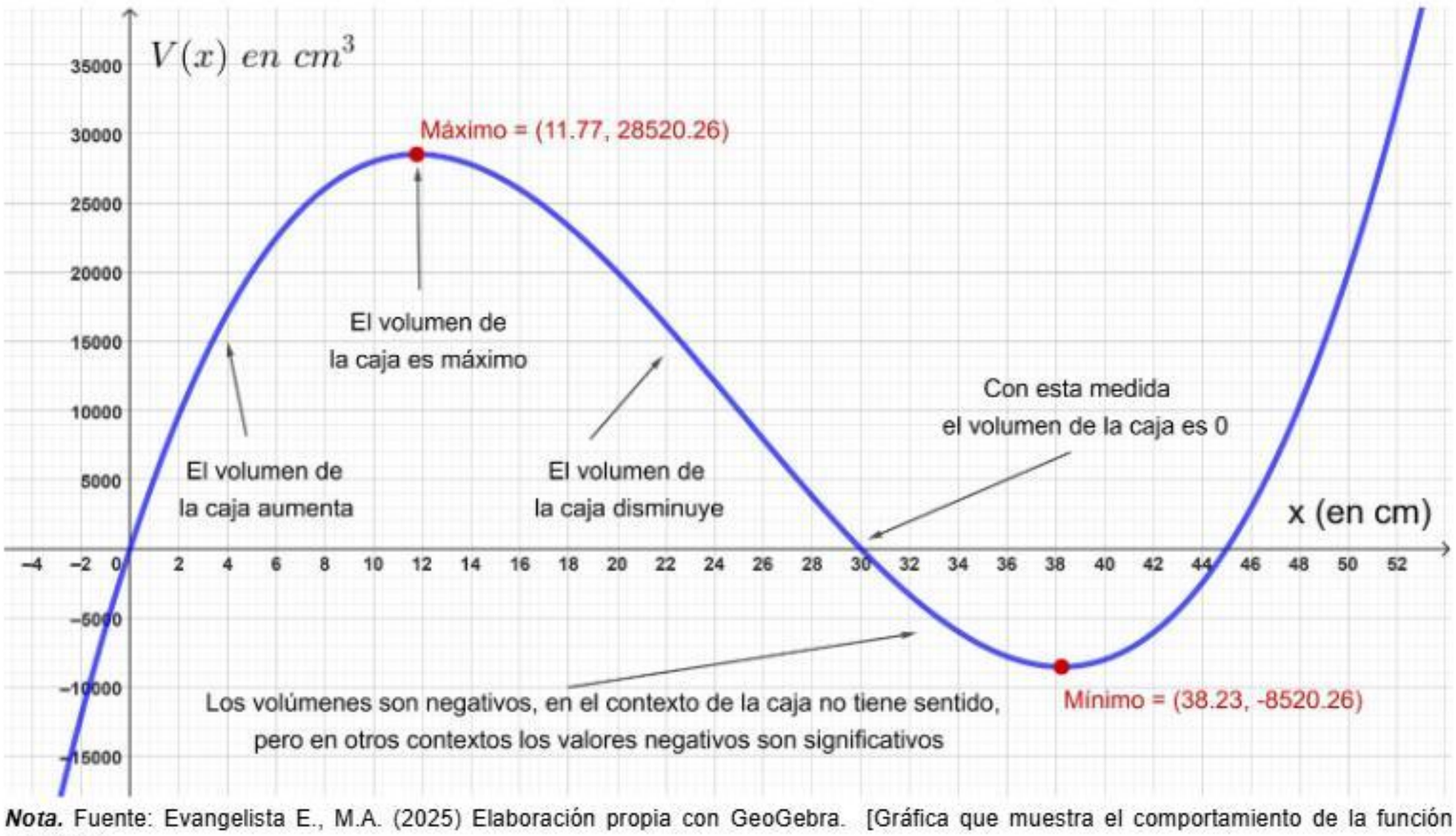
$$x^2 - 50x + 450 = 0$$

Obtenemos los valores de *xx* con alguno de los métodos vistos en apartados anteriores, en este caso se empleará la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

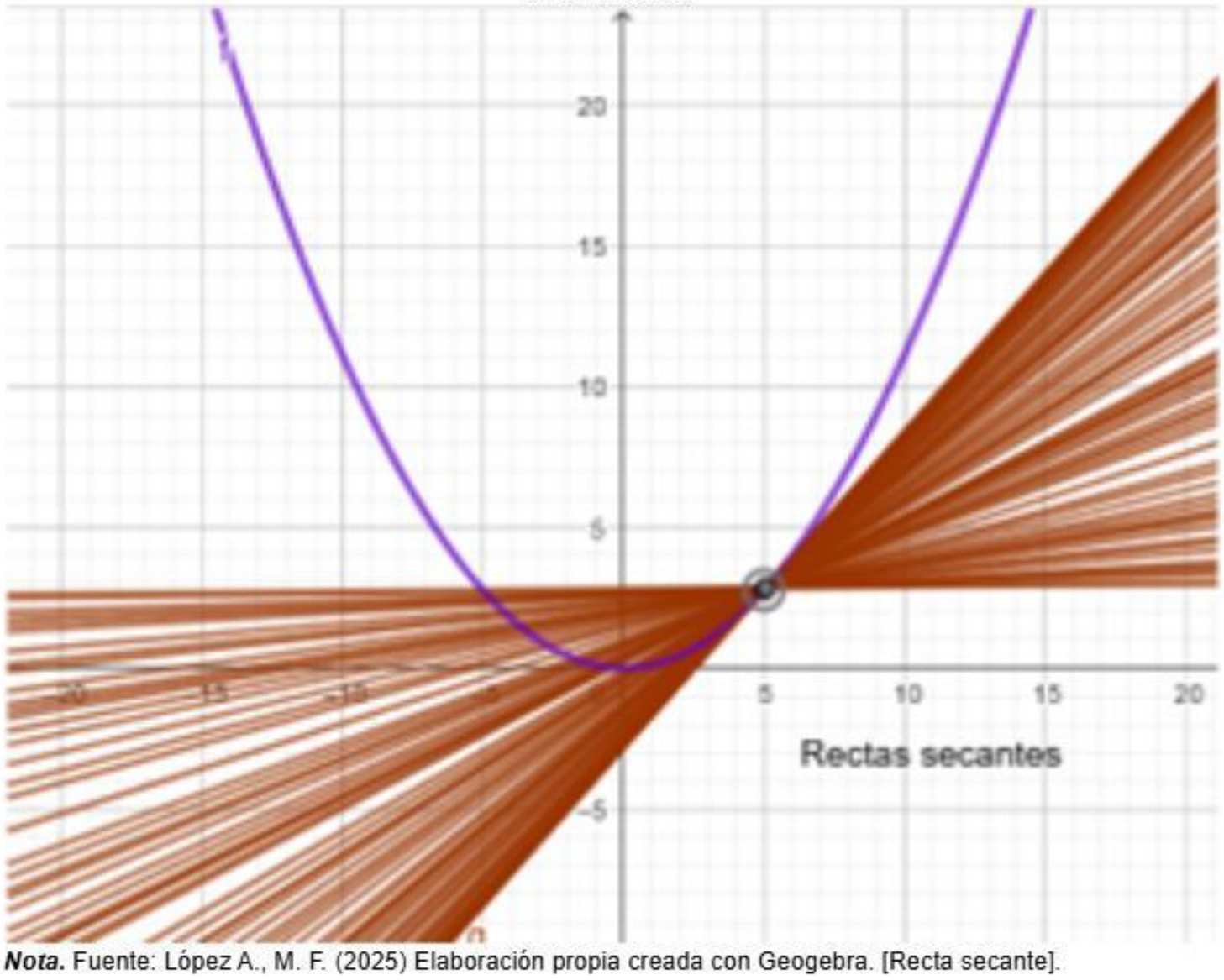
Figura 42.

Gráfica que muestra el comportamiento de la función volumen



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica que muestra el comportamiento de la función volumen].

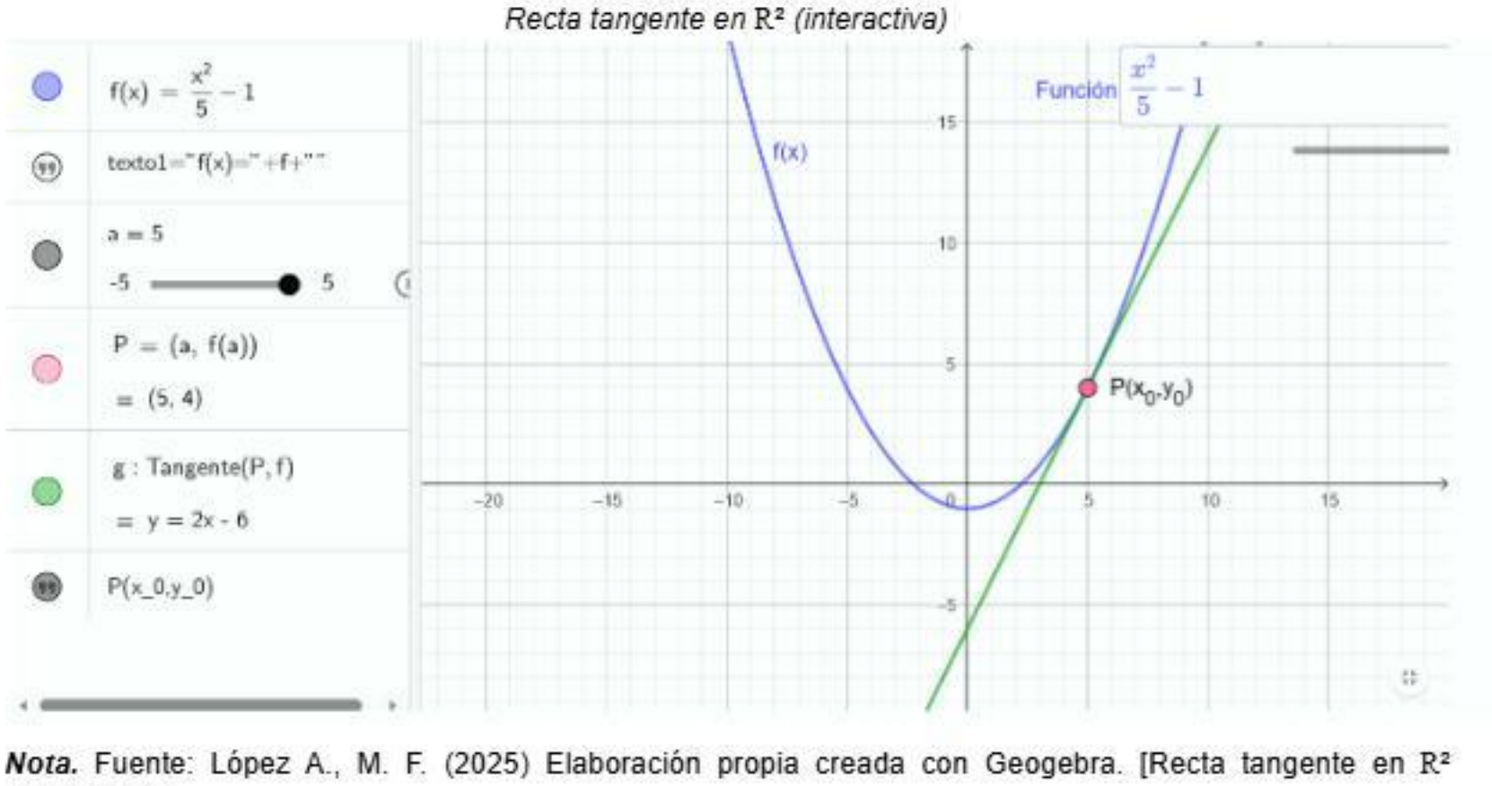
Figura 12.
Recta secante



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [Recta secante].

Interactúa en la siguiente gráfica moviendo el punto donde se encuentra la recta tangente a la función.

Figura 13.
Recta tangente en $\mathbb{R}^2$ *(interactiva)*



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [Recta tangente en $\mathbb{R}^2$ (interactiva)].

Ejemplo 2.

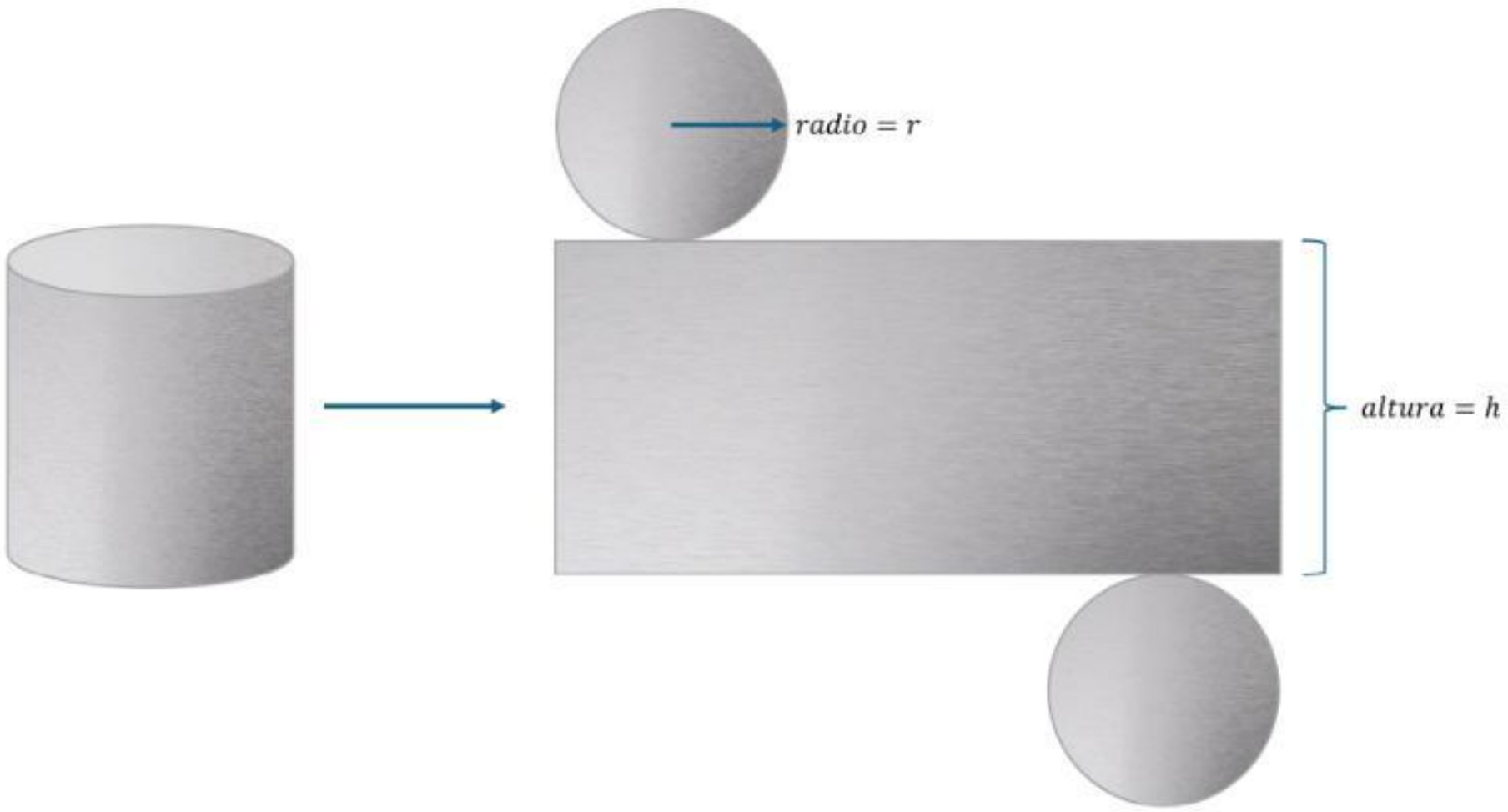
Se desea construir un envase cilíndrico de aluminio con tapa, la capacidad debe ser de 2 litros ¿Cuáles deben ser las medidas del radio y la altura del cilindro que minimicen la cantidad de material para la fabricación del envase? ¿Cuál es el área del material requerido?

Solución:

En este ejercicio se solicita minimizar la cantidad de aluminio a emplear para la fabricación, lo cual representa el contorno del envase; es decir, su área, por lo tanto, debemos modelar una expresión para el cálculo del área del cilindro que dependa del radio o de la altura de este, no sería posible resolver el ejercicio si el área dependiera al mismo tiempo del radio y de la altura, se requiere que esté expresado únicamente en términos de una de esas variables.

Vamos a representar el área de la superficie del cilindro "desdoblando" al cilindro en los componentes de su área:

Figura 43.
Rectángulo y circunferencias que forman al área de un cilindro



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia. [Rectángulo y circunferencias que forman al área de un cilindro].

Como puedes observar, se requieren dos círculos, uno para la base y otro para la tapa, como el radio también es desconocido se representa con la variable r; también se requiere un rectángulo cuya longitud equivale al perímetro del círculo $2\pi r$ (dado que lo debe envolver) y altura desconocida, la cual se identificará con la variable h.

Ahora debemos obtener una expresión que permita calcular el área total del cilindro:

Área cilindro	=	Área base	+	Área tapa	+	Área cuerpo
		este es un círculo		este es un círculo		este es un rectángulo
Área cilindro	=	πr^2	+	πr^2	+	$2\pi rh$

$$\text{Área cilindro} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

En este punto tenemos una complicación, porque al intentar expresar el área del cilindro quedaría en función de dos variables *r* y *h*, para solventar la situación nos valemos del dato del volumen:

$$\text{Volumen cilindro} = \pi r^2 h$$

El volumen es de 2 litros, aplicando la relación 1 L = 1000 cm^3 tenemos que el volumen es de 2000 cm^3:

$$2000 = \pi r^2 h$$

De esta expresión podemos despejar alguna de las variables y sustituirla en la expresión del área del cilindro. Sin pérdida de generalidad despejaremos a *h*:

$$h = \frac{2000}{\Pi \ r^2}$$

Sustituimos esta variable en la expresión del área del cilindro:

$$\text{Área cilindro} = 2\pi r^2 h + 2\pi r \left(\frac{2000}{\Pi \ r^2}\right)$$

De donde se obtiene una función del área del cilindro que solo depende del valor del radio:

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{4000}{r}$$

Esta es la función que se desea optimizar, en este caso, lo que se busca es que el área sea la mínima posible y eso dependerá del valor que demos al radio. Para calcularlo recurrimos a los procedimientos que aprendimos sobre máximos y mínimos.

Derivamos a la función *A (r)*:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{4000}{r^2}$$

En este punto tenemos una complicación, porque al intentar expresar el área del cilindro quedaría en función de dos variables *r* y *h*, para solventar la situación nos valemos del dato del volumen:

$$\text{Volumen cilindro} = \pi r^2 h$$

El volumen es de 2 litros, aplicando la relación 1 L = 1000 cm^3 tenemos que el volumen es de 2000 cm^3:

$$2000 = \pi r^2 h$$

De esta expresión podemos despejar alguna de las variables y sustituirla en la expresión del área del cilindro. Sin pérdida de generalidad despejaremos a *h*:

$$h = \frac{2000}{\Pi \ r^2}$$

Sustituimos esta variable en la expresión del área del cilindro:

$$\text{Área cilindro} = 2\pi r^2 h + 2\pi r \left(\frac{2000}{\Pi \ r^2}\right)$$

De donde se obtiene una función del área del cilindro que solo depende del valor del radio:

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{4000}{r}$$

Esta es la función que se desea optimizar, en este caso, lo que se busca es que el área sea la mínima posible y eso dependerá del valor que demos al radio. Para calcularlo recurrimos a los procedimientos que aprendimos sobre máximos y mínimos.

Derivamos a la función *A (r)*:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{4000}{r^2}$$

Recordamos que una función tendrá un máximo o un mínimo cuando $f'(x) = 0$, por lo que igualamos la derivada con 0:

$$4\pi r - \frac{4000}{r^2} = 0$$

Despejamos *r*:

$$4\pi r = \frac{4000}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{4000}{\Pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{4\Pi}}$$

$$r = 6.83 \text{ cm}$$

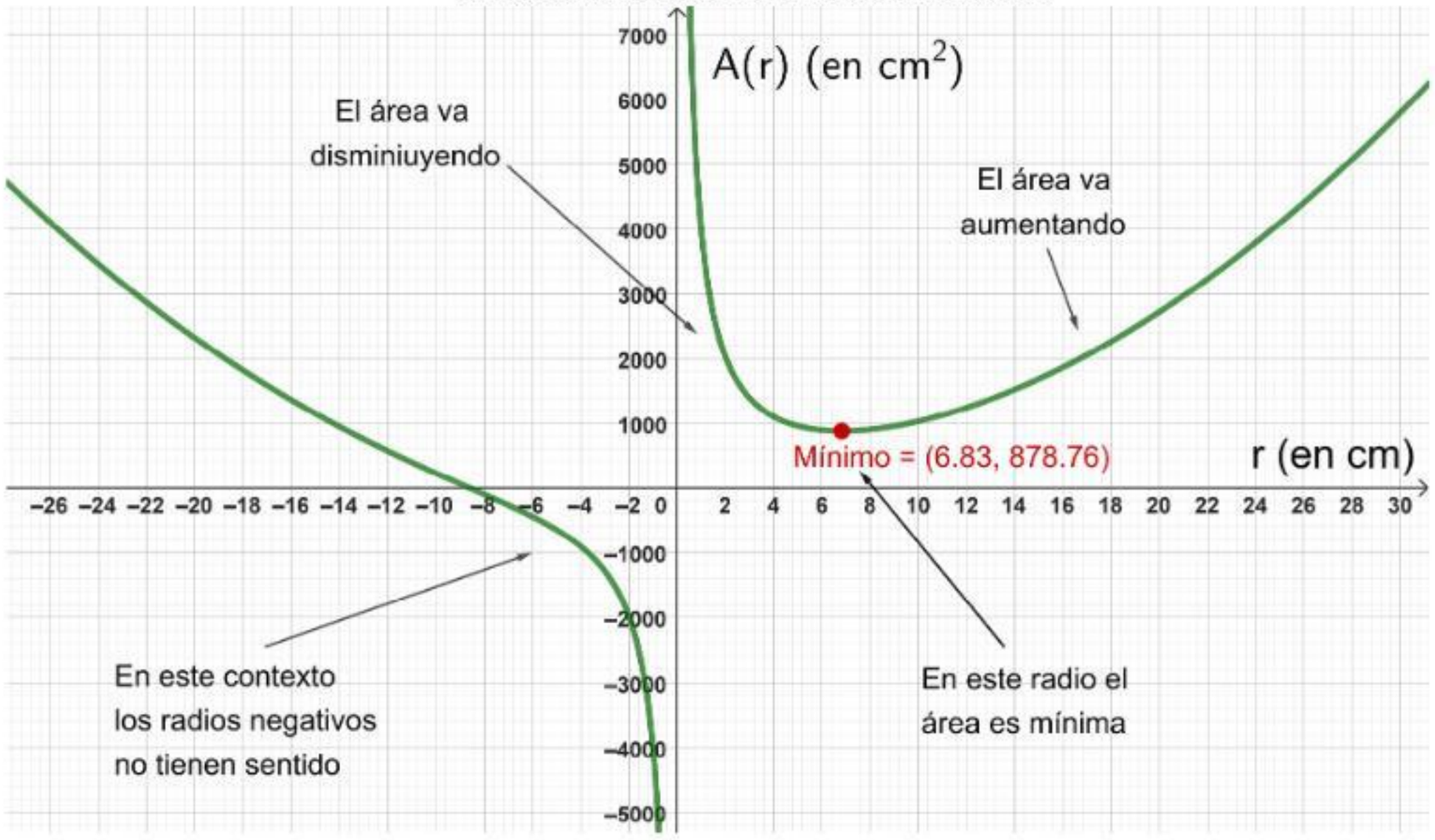
Vamos a confirmar que este radio genera un volumen mínimo para el área de la superficie del cilindro aplicando el criterio de la segunda derivada.

Calculamos la segunda derivada de *A* (*r*):

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{4000}{r^2}$$

En este punto tenemos una complicación, porque al intentar expresar el área del cilindro quedaría en función de dos variables *r* y *h*, para solventar la situación nos valemos del dato del volumen:

Figura 44.
Gráfica que muestra el comportamiento de la función área



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica que muestra el comportamiento de la función área].

Ejemplo 3.

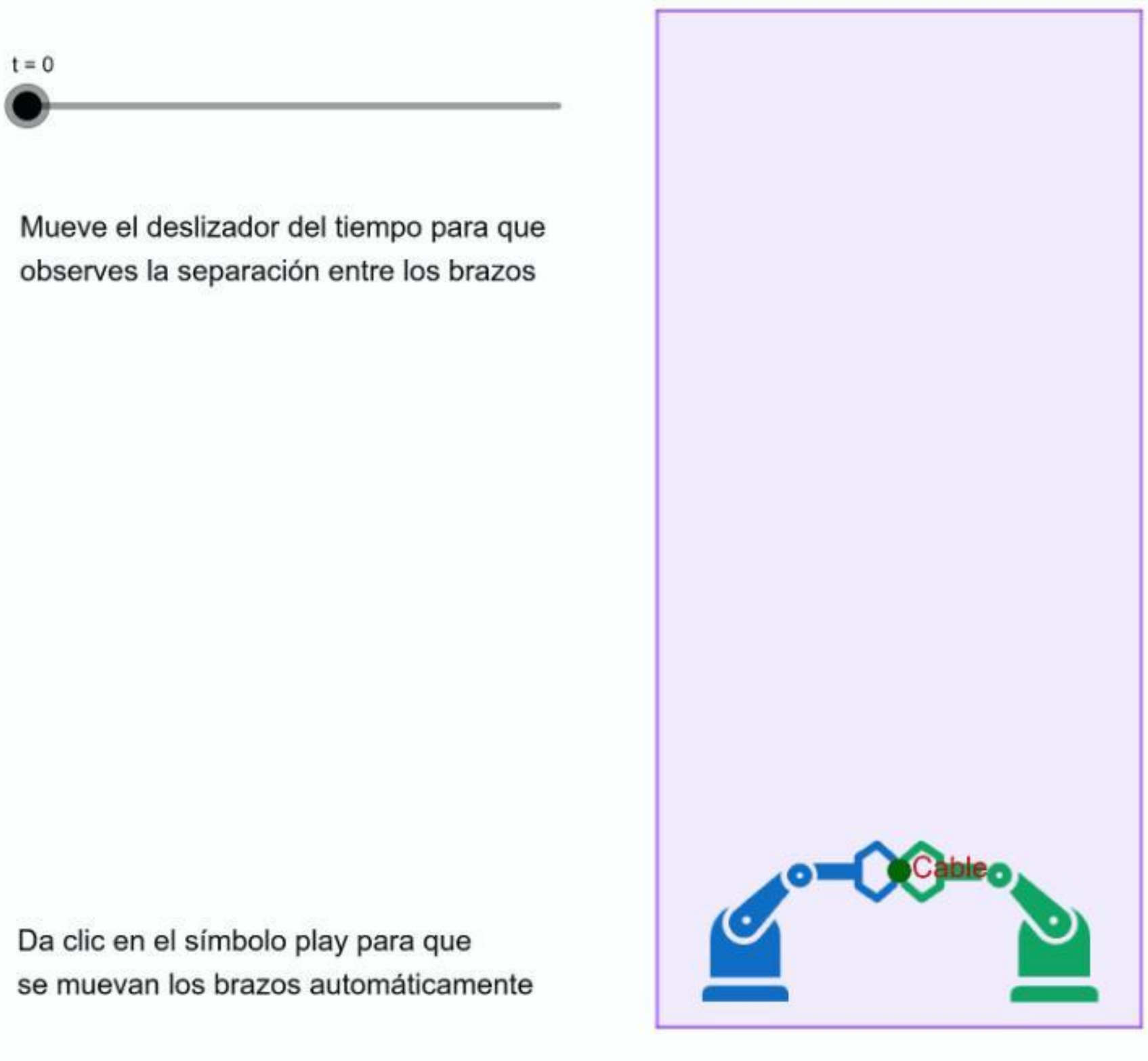
En una empresa se han automatizado un par de brazos mecánicos que se deslizan sobre un riel, inician en un extremo del riel y llegan al otro extremo en 20 segundos, el brazo A se mueve a una velocidad constante de 5 cm/s y el brazo B inicia con una velocidad de 2 cm/s y una aceleración constante de 0.3 cm/s². Ambos brazos siempre deben mantener comunicación mediante un cable cuyo costo es de $3 500 el metro ¿Cuál es la longitud óptima del cable que minimiza su costo?

Solución:

Este ejercicio requiere fórmulas de un área de la física conocida como cinemática, con la finalidad de que observes que el cálculo puede ser empleado en diversos contextos, no es necesario que te especialices en cinemática, pero sí muy recomendable que leas sobre el tema para una experiencia más enriquecedora con este ejercicio.

En este caso debemos optimizar el costo; sin embargo, este en realidad está en función de la longitud del cable, que no es otra cosa que la separación entre los brazos mecánicos. En otras palabras, se debe calcular la distancia máxima entre los brazos lo cual representará la longitud mínima del cable. Analiza esto con tus compañeros y docente, da clic en la siguiente imagen y observen cuál es el comportamiento del cable:

Figura 45.
Brazos mecánicos en riel



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Brazos mecánicos en riel].

La separación entre los brazos está determinada por sus funciones de movimiento, en específico por la distancia que recorren, en uno es rectilíneo uniforme y en el otro es uniformemente acelerado, las fórmulas respectivas para estos movimientos son:

Movimiento rectilíneo uniforme	Movimiento uniformemente acelerado
$d_1(t) = v_1 t$	$d_2(t) = v_2 t + \frac{at^2}{2}$
Posición del brazo 1:	Posición del brazo 2:
$d_1(t) = 5t$	$d_2(t) = 2t + \frac{0.3^2}{2}$
	$d_2(t) = 2t + 0.15t^2$

La distancia que los separa está dada por la distancia que recorre el que va más rápido menos la distancia que recorre el que va más lento. En este caso, el brazo 1 va más rápido porque tiene mayor velocidad inicial; por tanto, la función distancia de separación entre los brazos es:

Esta es la función que se desea optimizar; en este caso, lo que se busca es calcular la distancia máxima entre los brazos ya que equivale a la longitud mínima del cable que se puede emplear para unirlos. Para calcularla recurrimos a los procedimientos que aprendimos sobre máximos y mínimos.

Derivamos a la función $d(t)$:

$$d'(t) = -0.3t + 3$$

Recordamos que una función tendrá un máximo o un mínimo cuando $f'(x) = 0$, por lo que igualamos la derivada con 0:

$$-0.3t + 3 = 0$$

Despejamos t:

$$-0.3t = -3$$

$$t = -\frac{3}{-0.3}$$

$$t = 10\ s$$

Vamos a confirmar que este tiempo genera una distancia máxima aplicando el criterio de la segunda derivada.

Calculamos la segunda derivada de $d(t)$:

$$d'(t) = -0.3t + 3$$

$$d''(t) = -0.3$$

Como $-0.3 < 0$ se tiene un valor máximo en $t = 10$.

Ahora, para calcular la separación entre los brazos sustituimos ese tiempo en la función correspondiente:

$$d(t) = -0.15t^2 + 3t$$

$$d(10) = -0.15(10)^2 + 3(10)$$

$$d(10) = 15\ cm$$

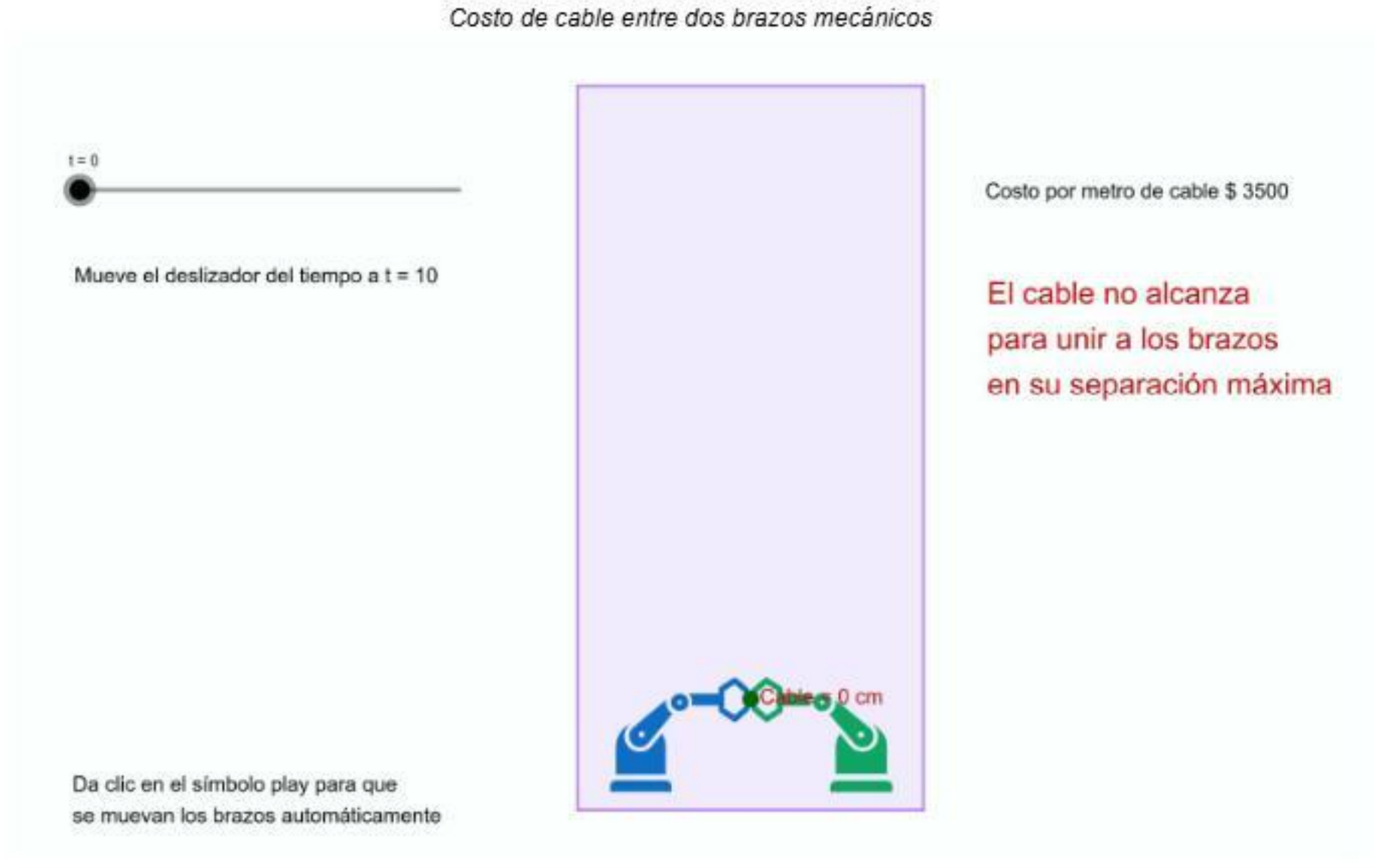
Por lo que la longitud mínima que debe tener el cable es de 15 *cm*. Para calcular el costo expresamos esta medida en metros y la multiplicamos por el precio de cada metro:

$$Costo = (0.15)\ 3500 = 525$$

El costo mínimo que se pagaría por el cable es de $525.

Por último, da clic en la siguiente imagen para que analices el comportamiento del cable, su longitud y su costo:

Figura 46.
Costo de cable entre dos brazos mecánicos



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Costo de cable entre dos brazos mecánicos].



Actividad 11. Problemas de modelación-optimización (estableciendo la función)

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para iniciar el ejercicio.



4.7 Teorema fundamental del cálculo para funciones polinomiales simples

De forma intuitiva el teorema fundamental del cálculo implica que existe una operación contraria a la derivada, la cual es conocida como antiderivada o función primitiva.

Decimos de forma intuitiva, porque existen ciertas condiciones que es necesario cumplir para que esta afirmación sea válida; por ejemplo, la función debe ser continua en el intervalo en el que se desea obtener la antiderivada, o a lo más, tener un finito número de puntos de discontinuidad. Por otro lado, la antiderivada genera una familia de funciones primitivas; es decir, no es única, pero se puede particularizar bajo ciertas condiciones (Spivak, 2005). De forma común la notación es:

Función	Función primitiva
$f(x)$	$F(x)$

Por lo tanto:

$$F'(x) = f(x)$$

Analiza el siguiente ejemplo:

Sea la función $f(x) = 6x^2 + 4x - 3$ su antiderivada será una función que al derivarla nos dé como resultado nuevamente a $f(x)$:

	Función primitiva	Derivada
Familia de funciones primitivas	a) $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 3$	$F'(x) = 6x^2 + 4x - 3$
	b) $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 2$	$F'(x) = 6x^2 + 4x - 3$
	c) $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1$	$F'(x) = 6x^2 + 4x - 3$
	d) $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x$	$F'(x) = 6x^2 + 4x - 3$
	e) $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$	$F'(x) = 6x^2 + 4x - 3$
	f) $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$	$F'(x) = 6x^2 + 4x - 3$
	g) $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 3$	$F'(x) = 6x^2 + 4x - 3$

Como puedes observar, la única diferencia entre estas funciones primitivas es el término independiente al cual le solemos denominar constante, esto tiene lógica porque recordemos que la derivada de una constante es cero, por lo tanto, podemos decir de forma general que la antiderivada de la función $f(x)$ es:

Función	Antiderivada
$f(x) = 6x^2 + 4x - 3$	$F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x + c$

Para los polinomios, es relativamente sencillo calcular la antiderivada por dos razones:

1) Los polinomios son continuos —esto ya se había mostrado en módulos anteriores—, característica clave para obtener la antiderivada.

2) Los "pasos" para calcular la antiderivada de un polinomio son contrarios a los que se requieren para derivarlo si aceptamos que la derivada y la antiderivada son procesos opuestos.

Analicemos cómo se obtienen derivadas y funciones primitivas de polinomios con algunos ejemplos:

Para obtener la derivada:

Para obtener la derivada:

- Primero: el exponente pasa multiplicando.

- Segundo: se resta 1 al exponente.

Ejemplo:

$$f(x) = 12x^3$$

$$f'(x) = 3\,(12x^{3-1})$$

$$\therefore f'(x) = 36x^2$$

Para obtener una función primitiva lo hacemos al revés y se invierte el orden, en lugar de restar, se suma, en lugar de multiplicar. se divide:

- Primero: se suma 1 al exponente.

- Segundo: el exponente aumentado en 1 se pasa dividiendo.

Ejemplo:

$$f(x) = 36x^2$$

$$F(x) = \frac{36x^{2+1}}{2+1}$$

$$F(x) = \frac{36x^3}{3}$$

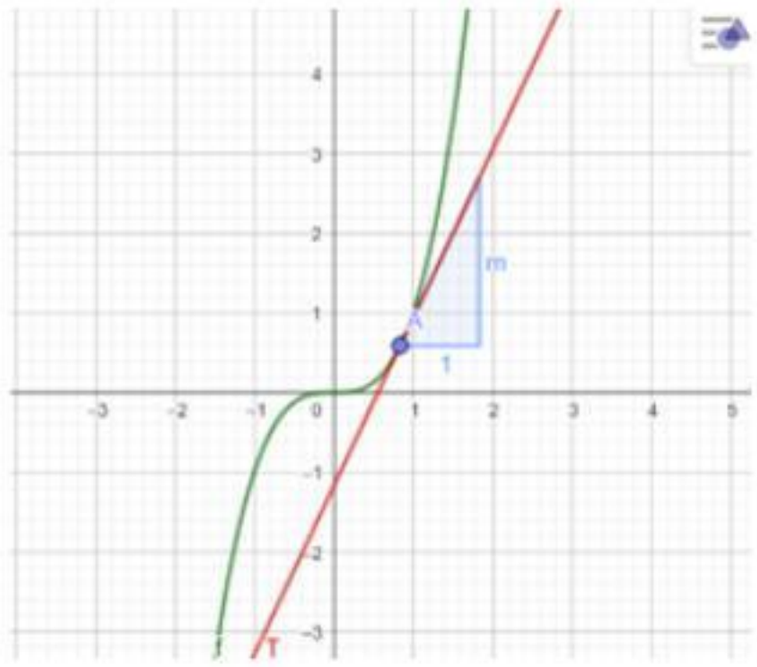
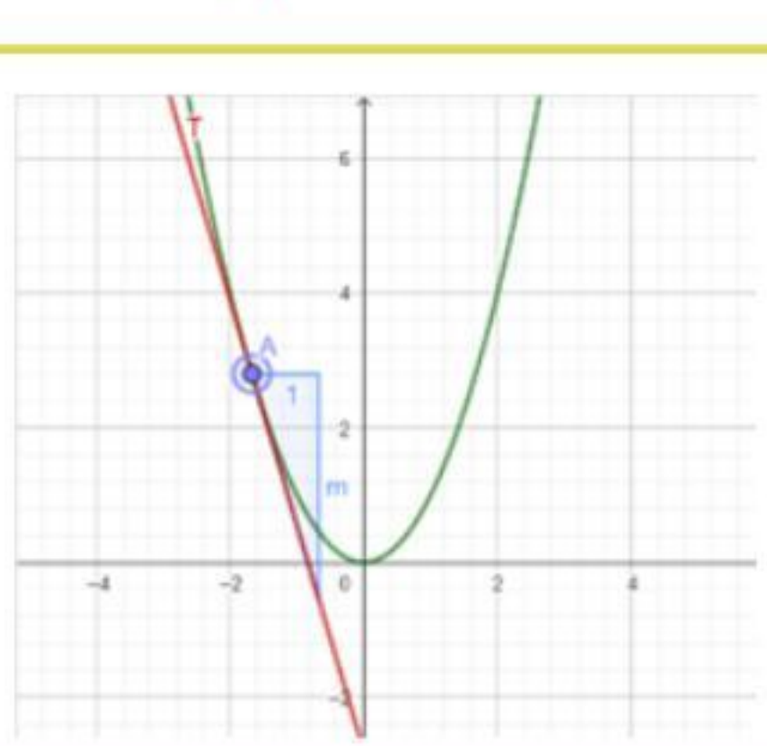
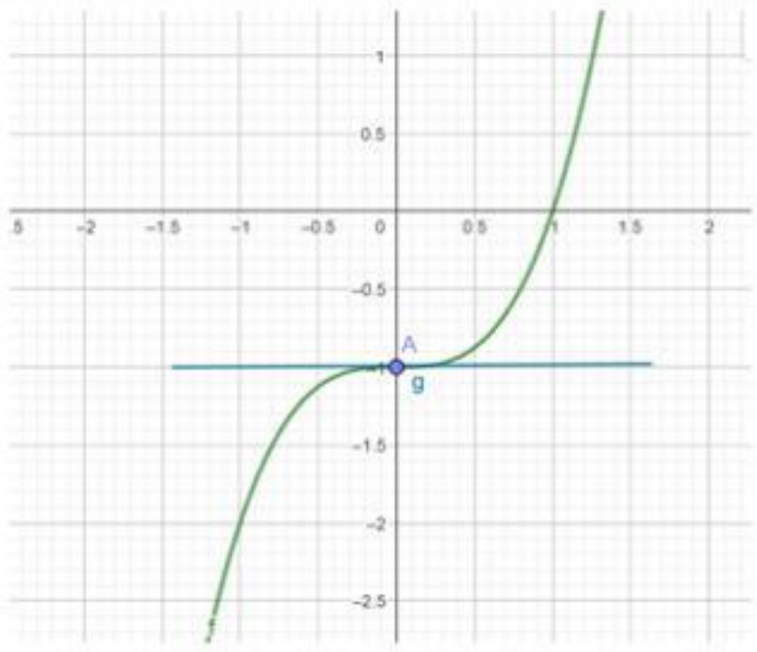
$$\therefore F(x) = 12x^3$$

Recordemos que esta es una de infinidad de funciones primitivas que se diferencian la suma o resta de una constante c, por lo que la antiderivada resulta ser:

$$f(x) = 12x^3 + c$$

Por medio del valor de la pendiente (m) podemos saber el comportamiento de la función de acuerdo con la inclinación de la recta, teniendo los siguientes casos:

Comportamiento de una función de acuerdo con su pendiente.

Si, la pendiente (m) es positiva.	
Si, la pendiente (m) es negativa.	
Si, la pendiente (m) es cero, representa una recta horizontal.	

Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia. [Comportamiento de una función de acuerdo con su pendiente].

Puedes observar que $f(x) = 12x^3$ y $f(x) = 12x^3 + c$ no son estrictamente iguales, este es un inconveniente que no podemos evitar debido a las características propias de las derivadas y las antiderivadas, es una situación que será resuelta en otro curso de matemáticas; con este ejemplo pudimos mostrar que la derivada y la antiderivada se obtienen con "procesos inversos".

El **Teorema fundamental del cálculo** es una conclusión que resulta de un proceso llamado integración, "el cual es el conjunto de métodos mediante los cuales es posible calcular la función primitiva" (Guerrero, 2019) y su notación es:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Esto se conoce como la **integral indefinida** de $f(x)$, indefinida porque incluye a las infinitas primitivas que puede tener la función.

De forma intuitiva hemos descifrado un método de integración, la integral de un término de un polinomio, cuando hicimos el análisis inverso de la derivada y la antiderivada que en términos de integrales es:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Donde (Guerrero, 2019):

$\int$ es el símbolo de integral

x^n es el integrando

dx es la diferencial dx

De esta integral se pueden deducir dos casos particulares importantes:

1) La integral de una constante k: ya que no cuenta explícitamente con la variable χ, pero se puede hacer que la tenga siempre y cuando $x \neq 0$:

$$\int k\,dx = \int k\,(1)\,dx = \int k\,x^0\,dx = k\int x^0\,dx = k\cdot\frac{x^{0+1}}{0+1} + c = k\cdot\frac{x^1}{1} + c$$

En conclusión:

$$\int k\,dx = kx + c$$

2) La integral de $k\,x^n$:

$$\int k\,x^n\,dx = k\int x^n\,dx = k\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

En conclusión:

$$\int k\,x^n\,dx = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + c$$

Estas expresiones se pueden aplicar de forma independiente a cada término de un polinomio para obtener la integral del polinomio completo, analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Obtener la integral indefinida de $f(x) = 9x^2$

$$\int (9x^2)\,dx = \int 9x^2\,dx = \frac{9x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{9x^3}{3} + c = 3x^3 + c$$

Ejemplo 2:

Obtener la integral indefinida de $f(x) = \frac{4x^3}{3}$

$$\int \frac{4x^3}{3}\,dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{3} + c$$

Ejemplo 3:

Obtener la integral indefinida de $f(x) = 8x - 2$

$$\int (8x - 2)\,dx = \int (8x)\,dx - \int 2\,dx = \frac{8x^{1+1}}{1+1} - 2x + c = \frac{8x^2}{2} - 2x + c = 4x^2 - 2x + c$$

Ejemplo 4:

Obtener la integral indefinida de $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$

$$\int (4x^2 - 5x + 3)\,dx = \int (4x^2)\,dx - \int (5x)\,dx + \int 3dx$$

$$= \frac{4x^{2+1}}{2+1} - \frac{5x^{1+1}}{1+1} + 3x + c = \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + c$$

Ejemplo 5:

Obtener la integral indefinida de $f(x) = \frac{6x^2+4x-5}{2}$

$$\int \frac{6x^2+4x-5}{2}\,dx = \int (3x^2 + 2x - \frac{5}{2})\,dx = \int (3x^2)\,dx + \int (2x)\,dx - \int \frac{5}{2}\,dx$$

$$= \frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} - \frac{5}{2}x + c = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - \frac{5}{2}x + c = x^3 + x^2 - \frac{5}{2}x + c$$

Actividad 12. Teorema fundamental del cálculo

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza los siguientes ejercicios, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da clic aquí para iniciar el ejercicio.



Actividad 13. Ejercicio autoevaluable

Instrucciones: para reforzar los temas vistos en este Módulo IV se te pide realizar el siguiente ejercicio, para comenzar, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada MIV Ejercicio Autoevaluable.

Resumen

A lo largo del capítulo descubrimos que las matemáticas son una guía para entender y resolver problemas reales, y que muchos de ellos los empleamos en varios temas para llegar a un objetivo, como te pudiste dar cuenta, empezamos por razón de cambio en el cual aplicaste lo aprendido con derivadas, teoremas básicos, de igual forma aplicaste funciones, leyes de los exponentes, aplicaste factorización y productos notables. Esto lo aplicamos en un problema de un movimiento en una partícula, y como ello se puede aplicar en muchos problemas de física o ingeniería.

Si nos damos cuenta, para el caso de la recta tangente y normal podemos resolver problemas de movimientos, de fuerzas y vemos que estos conceptos son aplicados en la vida real.

Si nos referimos a los eventos naturales estos pueden predecirse con la aplicación de función creciente y decreciente con ello máximo y mínimo, esto es solo cuestión de enfocarlo.

Las funciones exponenciales y logarítmicas te permiten explicar fenómenos como el crecimiento de una población, el comportamiento de tus ahorros en una cuenta bancaria o la intensidad de un terremoto.

Visualizar el comportamiento de una función es una manera de predecir, planear y comprender el mundo que te rodea. Una vez que dominas una herramienta matemática, estás obteniendo confianza para enfrentar desafíos. Vemos pues, que las matemáticas son importantes, están en el celular, los airpods, la laptop que usas, en las decisiones que tomas y en el futuro que construyes.



Glosario

- **Cambio:** algo que se modifica.
- **Cinemática:** parte de la mecánica que estudia los tipos de movimiento sin atender las causas que lo producen.
- **Concavidad:** propiedad de una función que describe la forma gráfica de la función.
- **Creciente:** que crece.
- **Criterios:** norma.
- **Decreciente:** declinante.
- **Definición:** exponer con claridad las características de algo.
- **Discontinuidad:** punto donde la función no es continua.
- **Exponencial:** crece o decrece rápidamente.
- **Factorización:** descomponer en factores.
- **Inflexión:** punto donde cambia la concavidad / torcimiento.
- **Inversa:** alterado.
- **Logaritmo:** exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva.
- **Máximo y mínimo:** valores más altos o bajos que toma una función en un intervalo.
- **Máximo:** más grande.
- **Mínimo:** más pequeño, no hay ninguno menor.
- **Normal:** está en su estado ordinario o habitual.
- **Optimización:** mejor manera de realizar una actividad.
- **Razón:** relación entre dos cantidades.
- **Segunda:** lugar número dos.
- **Tangente:** que toca.

Referencias

- Casteleiro, J. (2006). *Introducción al análisis matemático I: Cálculo diferencial de una variable*. 1a edición. Ed. ESIC.
- Contreras, A., et al. (2006). *Geometría y trigonometría*. Ed. Umbral.
- Guerrero, G. (2019). *Cálculo integral. Un nuevo enfoque.* 1a edición. Ed. Patria Educación.
- Neuhauser, C. (2004). *Matemáticas para ciencias.* Ed. Pearson. Prentice Hall. 2a edición.
- Larson, R., y Edwards, B. H. (2010). *Cálculo 1: De una variable*. 9a ed. McGraw-Hill Interamericana de España S.L. uop.edu.pk+6Amazon+6AbeBooks UK+6
- Spivak, M. (2006). *Calculus. Cálculo infinitesimal*. 2a edición. Ed. Reverté.
- Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. Thomson. biblioteca.ufm. edu+9WorldCat+9Google Books+9
- Thomas, G. B., Weir, M. D., y Hass, J. (2010). *Cálculo de una variable*. 11a ed. Pearson Educación.

Resumen General

El cálculo diferencial es una herramienta matemática que permite comprender cómo cambian las cantidades en distintos contextos, es parte esencial de las matemáticas modernas, ya que permite analizar situaciones en las que interviene un cambio continuo.

Con los conocimientos adquiridos puedes comprender cómo una cantidad varía respecto a otra, lo cual es clave para interpretar y resolver problemas reales. Este conocimiento parte del análisis del comportamiento de las funciones y la forma en que se aproximan a distintos valores, lo que nos lleva a conceptos como el límite, la continuidad y las derivadas. Es probable que al principio te haya parecido complejo interpretar estos conceptos, pero en cada ejercicio has desarrollado habilidades que te permiten comprenderlos mejor, operarlos y aplicarlos.

No solo has aprendido números, ahora razonas conceptos como aproximación, infinito, optimización, entre otros; estas herramientas te permiten describir con exactitud fenómenos dinámicos. El cálculo diferencial tiene aplicaciones prácticas fundamentales en diferentes áreas.

Ayudarte a ver que detrás de una fórmula hay una idea y que detrás de cada idea hay una aplicación real, es uno de los grandes objetivos del cálculo diferencial, por ello, te invitamos a seguir explorando este campo con curiosidad y confianza, cada concepto que aprendes hoy te prepara para enfrentar con mayor claridad los retos del mañana.

Doctor en Tecnología e Innovación de la Educación
Arturo Mejía Zamora
Plantel "Lic. Adolfo López Mateos"

Maestro en Ciencias de la Educación
Erick Vieyra Méndez
Plantel "Nezahualcóyotl"

Doctor en Educación
Raúl Juárez Toledo
Plantel "Cuauhtémoc"

Doctora en Ciencias de la Educación
María del Rocio García de León Pastrana
Plantel "Ignacio Ramírez Calzada"

Doctor en Ciencias de la Educación
Alejandro Morales Velázquez
Plantel "Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana"

Maestro en Educación con Orientación en Innovación y Tecnología Educativa
Sergio Luis Roldán Vásquez
Plantel "Texcoco"

Maestro en Docencia
Erick Rodolfo Sánchez Cortés
Plantel "Sor Juana Inés de la Cruz"

Química Farmacéutica Bióloga
Janette Jaimes García
Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel "Dr. Pablo González Casanova"

Doctora en Educación
María del Rosario Sotelo Hurtado
Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel "Isidro Fabela Alfaro"

Ingeniera en Sistemas Computacionales
Patricia Domínguez Garduño
Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel "Mtro. José Ignacio Pichardo Pagaza"

Doctora en Educación
Norma Lizbet González Corona
Plantel "Tecámac"

Universidad Autónoma del Estado de México

La pendiente de la recta tangente tiene diferentes aplicaciones de acuerdo con el área de conocimiento. Algunos ejemplos son:

Física: se utiliza para calcular la densidad de un alambre, cambios en energía y temperatura, entre otros.

Figura 14.
Área de física



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Microsoft Designer. [*Área de física*]

Química: se pone en práctica en los cambios de energía en procesos químicos y en el estudio de la velocidad de reacción.

Figura 15.
Área de Química



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Microsoft Designer. [*Área de Química*]

Biología: se emplea para la modelación de la tasa de crecimiento de un organismo, entre otros usos.

Figura 16.
Área de Biología



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Microsoft Designer. [*Área de Biología*]

Economía: indica la variación de un bien respecto a cambios en el precio.

Figura 17.
Área de Economía



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Microsoft Designer. [*Área de Economía*]



Actividad 3.
Pendiente de la recta tangente

Instrucciones: realiza la siguiente actividad, para iniciar **da clic** en el enlace.



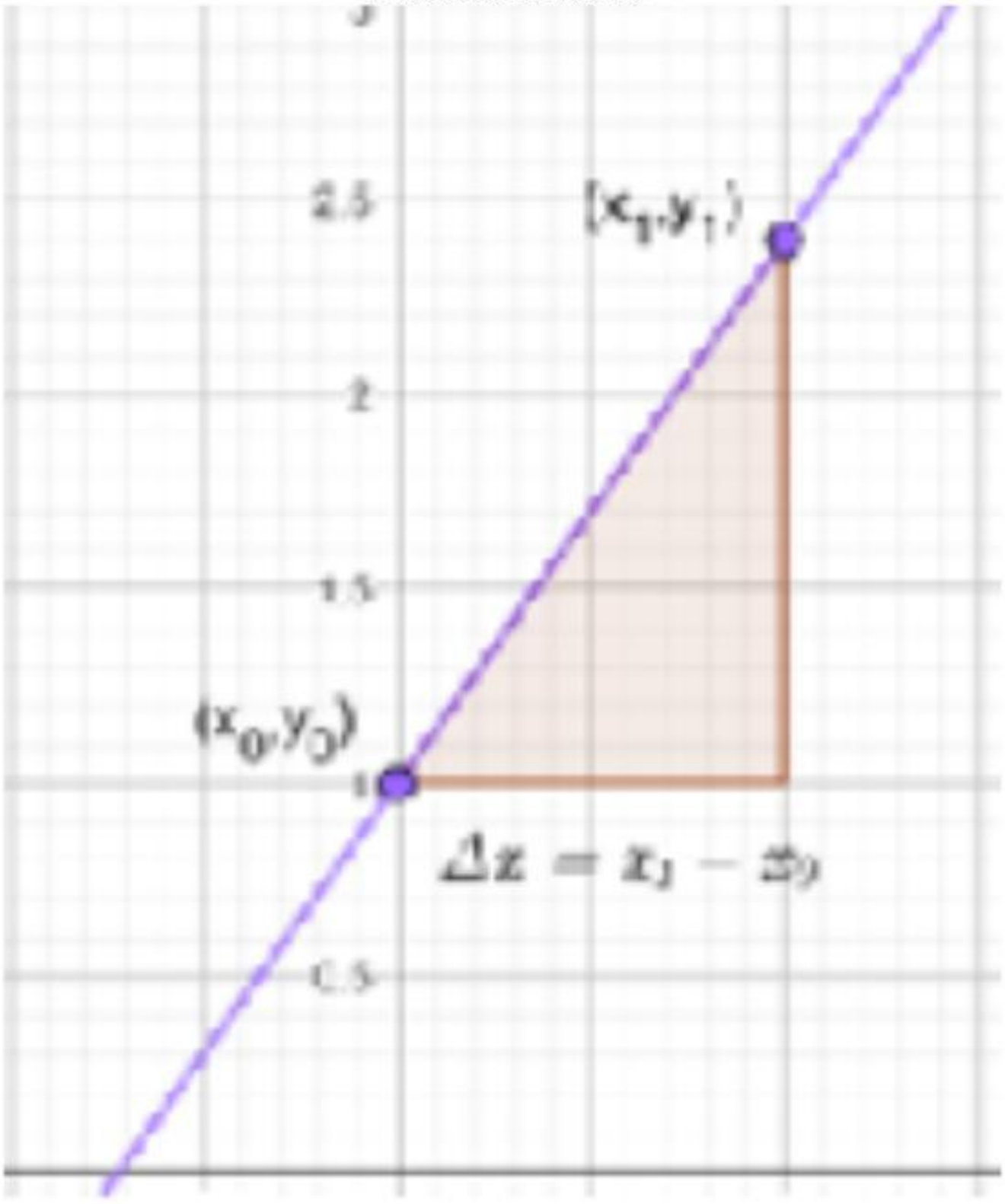
PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

1.2 Incremento de una función: interpretación gráfica

Un **incremento** es el cambio en el valor de una variable, como lo vimos en la definición de la pendiente para la variable independiente x el incremento se define como (Δx) que es el cambio cuando esta crece o decrece a partir de un valor inicial x_0 hasta un valor final x_1. Así, tenemos:

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

Figura 18.
Incremento en la variable x

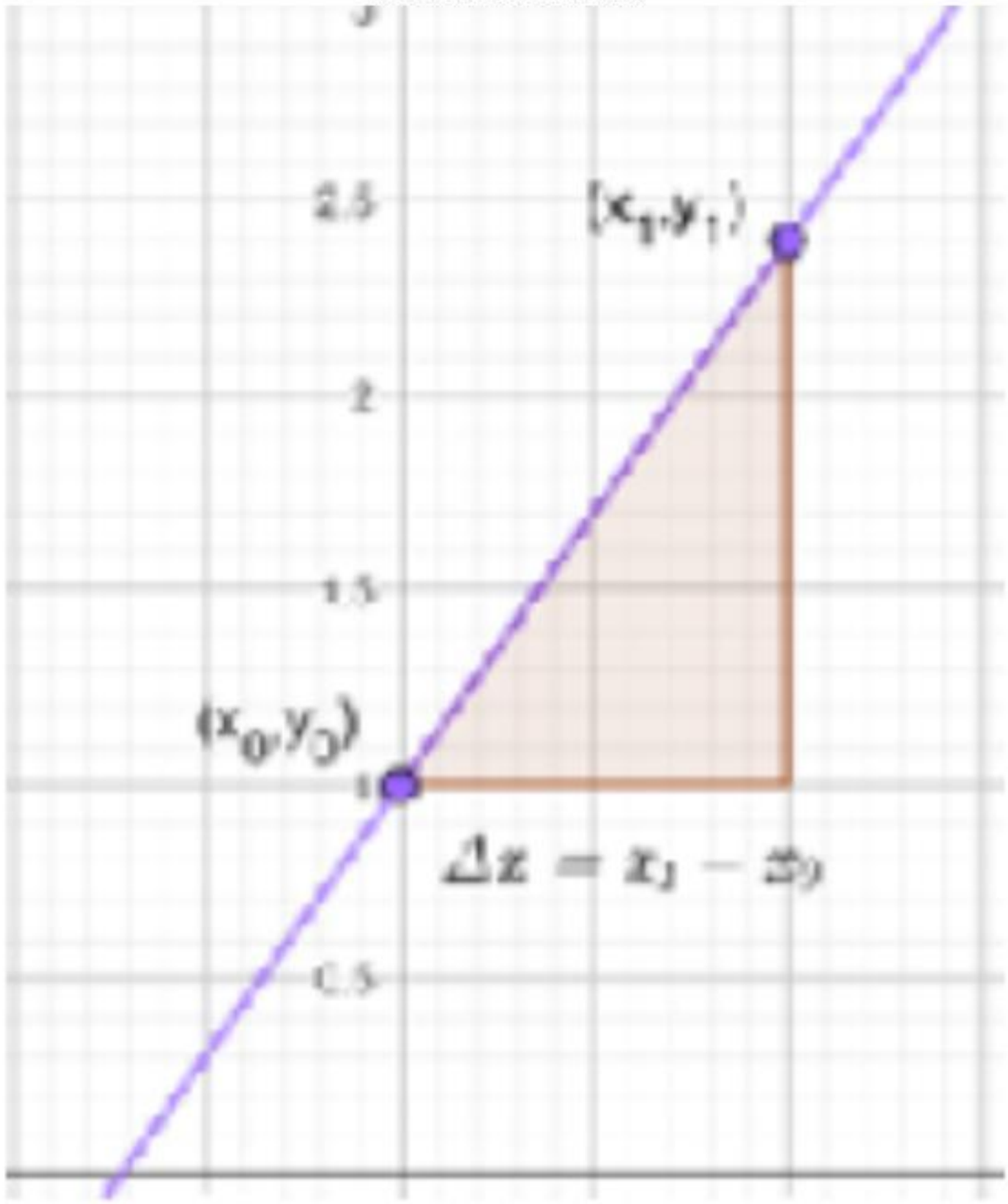


Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [*Incremento en la variable x*]

De igual manera para la variable dependiente y, el incremento se define como (Δy). Definido por:

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

Figura 19.
Incremento en la variable y



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [Incremento en la variable y]

Recordemos que una función $y = f(x)$ se forma por una variable independiente (donde se asigna un valor arbitrario) y una variable dependiente (su valor depende de la primera).

Figura 20.
Tipos de variable



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia. [*Tipos de variable*]

Lo que queremos determinar es el **incremento** de una función $y = f(x)$ cuando cambiamos el valor de x .

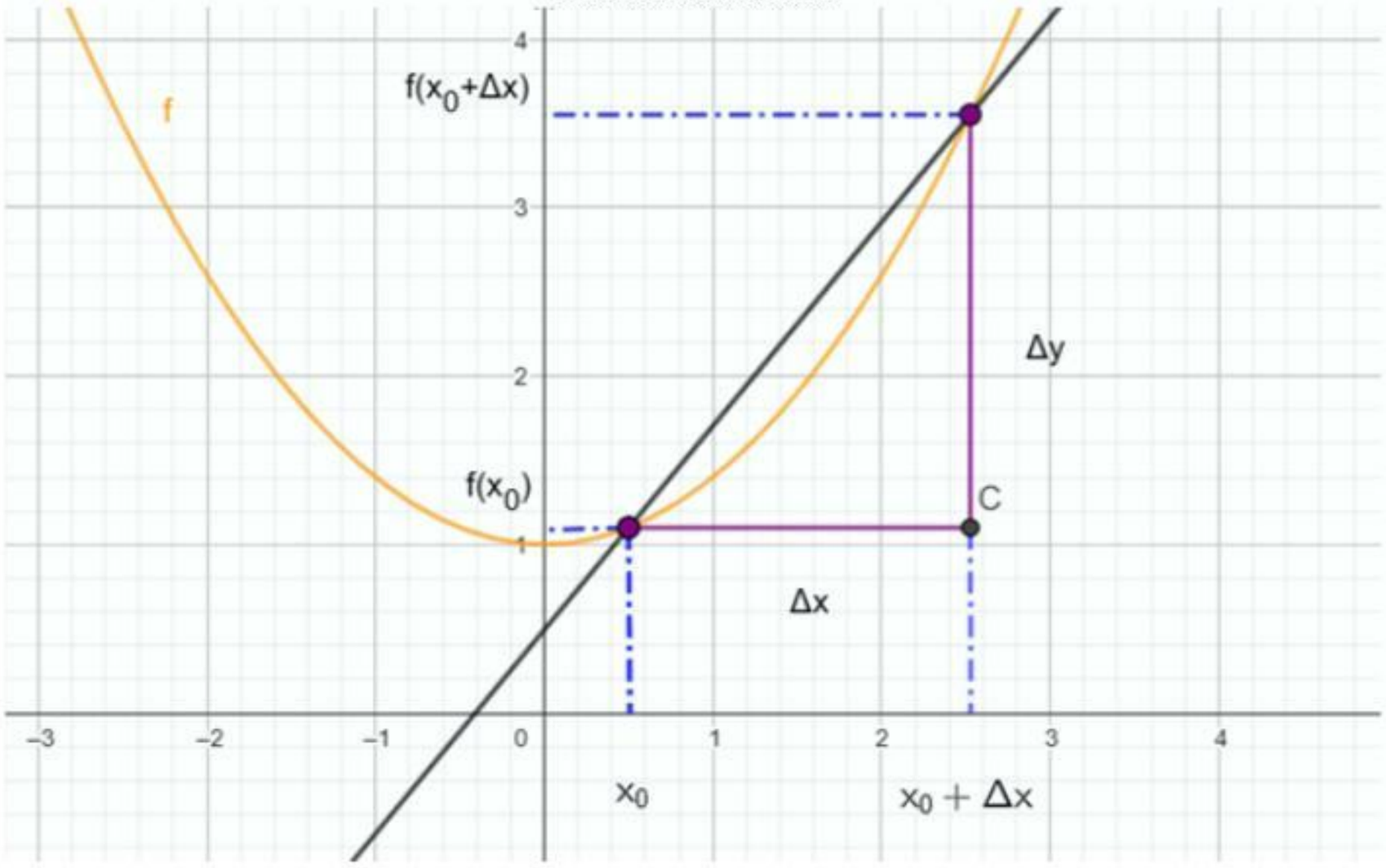
Partimos de conocer el valor de la función en un punto especifico $x = x_0$, por lo que podemos saber el valor de $f(x_0)$.

Hacemos un pequeño cambio en la variable x , es decir, avanzamos a un nuevo valor $x = x_0 + \Delta x$, Δx es un incremento que sumamos a x . Obtenemos el valor de la función en el nuevo valor, es decir: $f(x_0 + \Delta x)$.

La diferencia entre el nuevo valor y el valor original de la función es el **incremento de la función** denotado por Δy, o sea:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Figura 21.
Incremento de una función



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [*Incremento de una función*]

En la figura anterior se muestra gráficamente la representación del incremento para cada variable, de manera analítica veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.

Calcular el incremento Δx cuando x cambia de 1.0 a 1.01

Solución:

El primer valor corresponde a x_0 $\quad x_0 = 1.0$

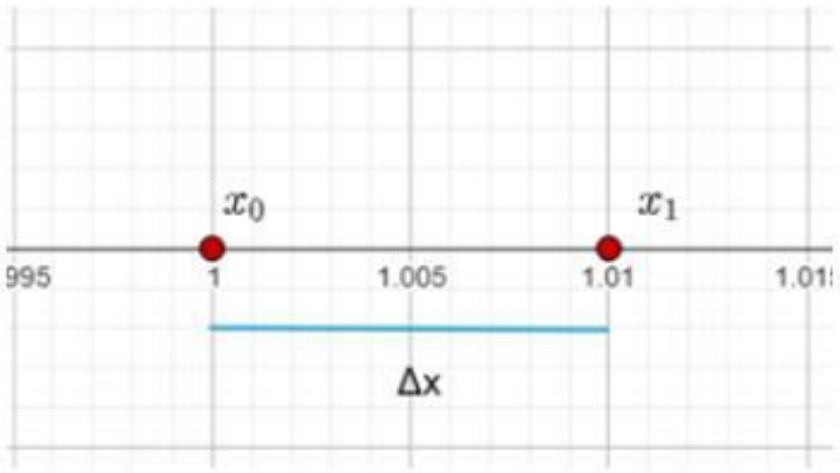
El segundo valor corresponde a x_1 $\quad x_1 = 1.01$

Sustituimos en Δx $\quad \Delta x = x_1 - x_0$

Sustituimos el valor de x $\quad \Delta x = 1.01 - 1.0$

$$\Delta x = 0.01$$

Figura 22.
Ejemplo 1



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [*Ejemplo 1*]

Ejemplo 2.

Calcular el incremento Δy para la función $y = 3x - \frac{1}{2}$

Solución:

La fórmula por utilizar es:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Sustituimos $x = x_0$ y $x = x_0 + \Delta x$ en la función:

$$f(x_0) = 3x_0 - \frac{1}{2}$$
$$f(x_0 + \Delta x) = 3(x_0 + \Delta x) - \frac{1}{2}$$

Reemplazamos los valores:

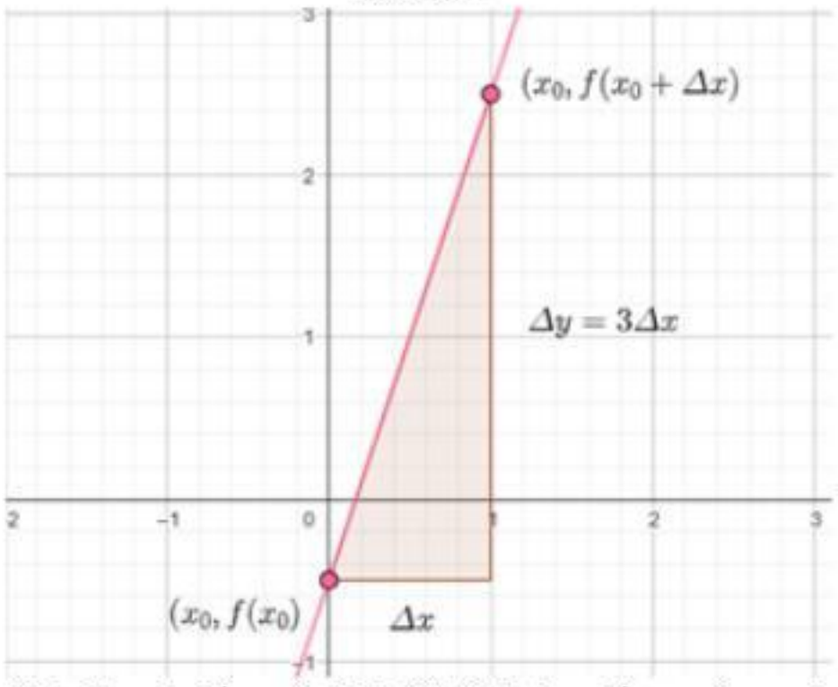
$$\Delta y = \left[3(x_0 + \Delta x) - \frac{1}{2}\right] - \left[3x_0 - \frac{1}{2}\right]$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$\Delta y = 3x_0 + 3\Delta x - \frac{1}{2} - 3x_0 + \frac{1}{2}$$
$$\Delta y = 3x_0 + 3\Delta x - \frac{1}{2} - 3x_0 + \frac{1}{2}$$

$$\Delta y = 3\Delta x$$

Figura 23.
Ejemplo 2



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [*Ejemplo 2*]

El **incremento relativo** de una función es el cociente de sus incrementos $\frac{\Delta(Variable\ dependiente)}{\Delta(Variable\ independiente)}$
el incremento relativo de y con respecto a x es: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Para $y = f(x)$, el incremento relativo de la función respecto de la variable independiente x, es la transformación que experimenta la función por cada unidad de cambio en x.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ejemplo 3.

Calcular el incremento relativo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para la función $y = -2x + 5$

Solución:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Sustituimos $x = x_0$ y $x = x_0 + \Delta x$ en la función:

$$f(x_0) = -2x_0 + 5$$
$$f(x_0 + \Delta x) = -2(x_0 + \Delta x) + 5$$

Sustituimos en la fórmula:

$$\Delta y = [-2(x_0 + \Delta x) + 5] - [-2x_0 + 5]$$

Simplificamos

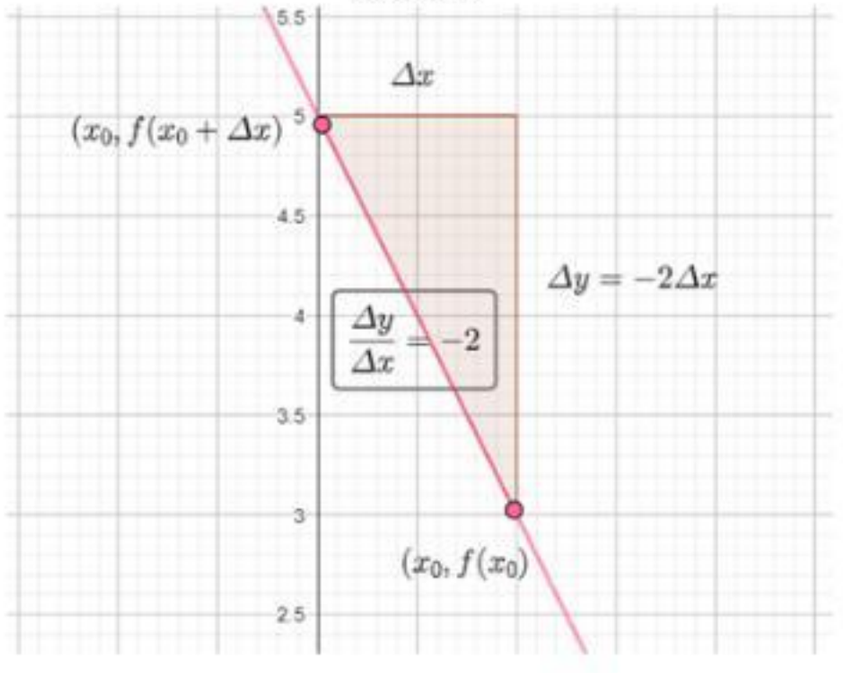
$$\Delta y = -2x_0 - 2\Delta x + 5 + 2x_0 - 5$$
$$\Delta y = -2x_0 - 2\Delta x + 5 + 2x_0 - 5$$
$$\Delta y = -2\Delta x$$

Dividimos entre $\Delta\chi$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2$$

Figura 24.
Ejemplo 3



Nota. Fuente: López A., M. F. (2025) Elaboración propia creada con Geogebra. [*Ejemplo 3*]



Actividad 4. Pendiente de la recta tangente

Instrucciones: realiza la siguiente actividad, para iniciar **da clic** en el enlace.



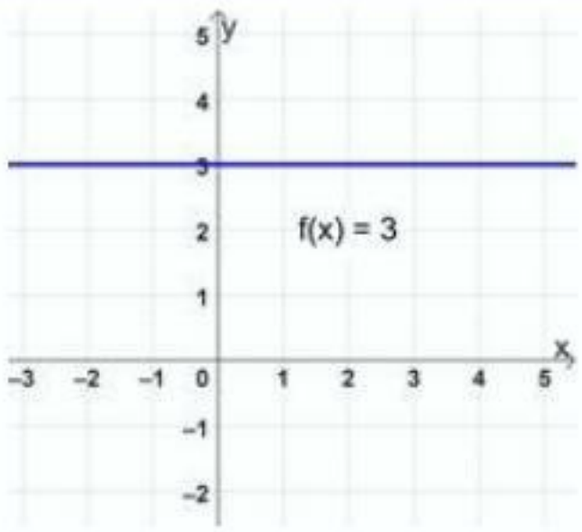
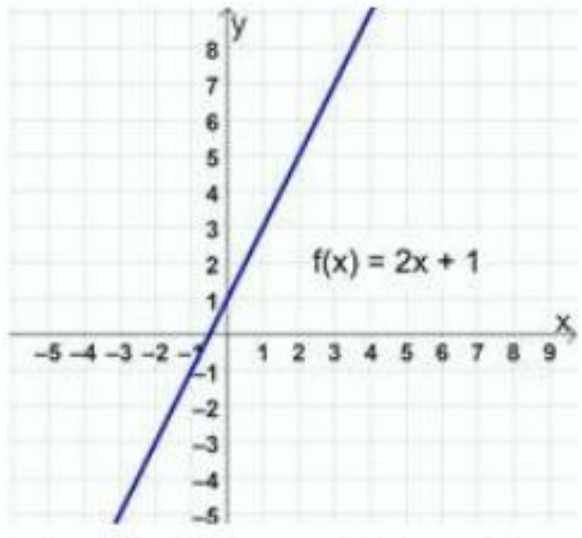
1.3 Análisis y características de las funciones polinomiales (continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades)

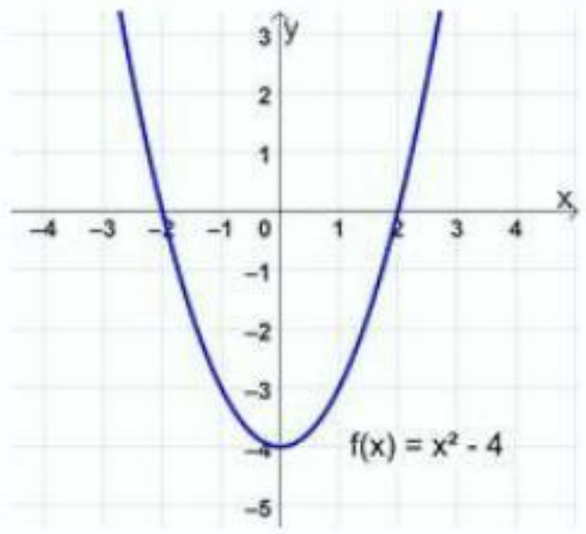
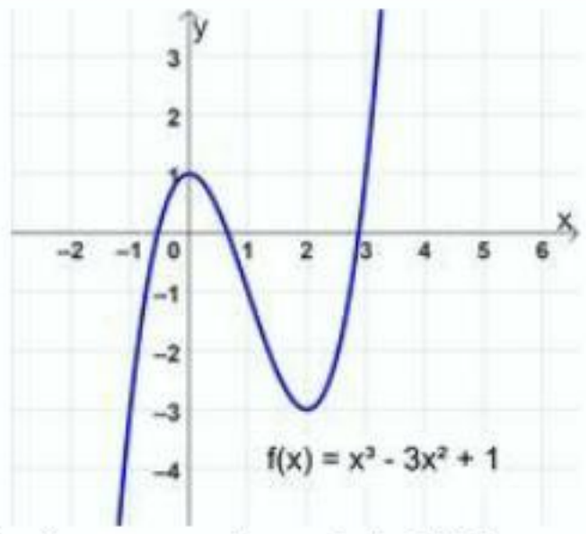
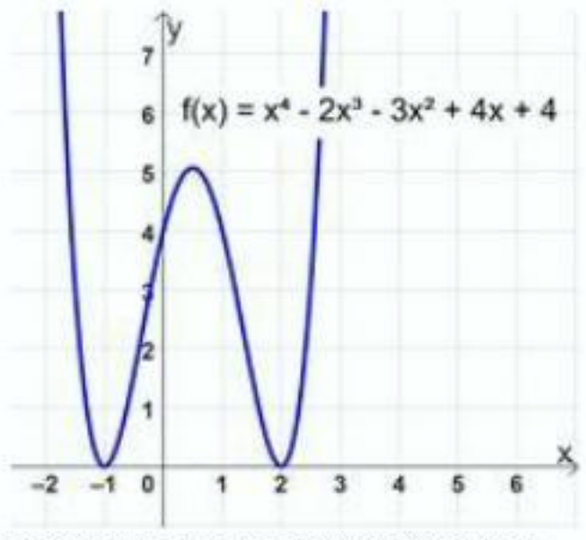
Una función polinomial de grado n es aquella que posee una sucesión de términos de variable real con coeficientes reales y exponentes enteros positivos o cero (Goodman, 1994), es decir:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ con } n \text{ entero positivo o 0}$$

Cada una de estas funciones genera una gráfica que resulta ser semejante para funciones con el mismo grado, por ejemplo (da clic sobre las gráficas para iniciar una simulación a fin de que analices cómo se comportan las funciones semejantes):

Tabla 2.
Recorrido (gráfica) de funciones polinomiales.

Grado de la función	Ejemplo	Forma de la gráfica
0	$f(x) = 3$ Función constante: Línea recta horizontal (pendiente =0)	 https://www.geogebra.org/m/jtmfyabz
1	$f(x) = 2x + 1$ Función lineal: Línea recta con inclinación (pendiente ≠ 0)	 https://www.geogebra.org/m/pjcgzg8x

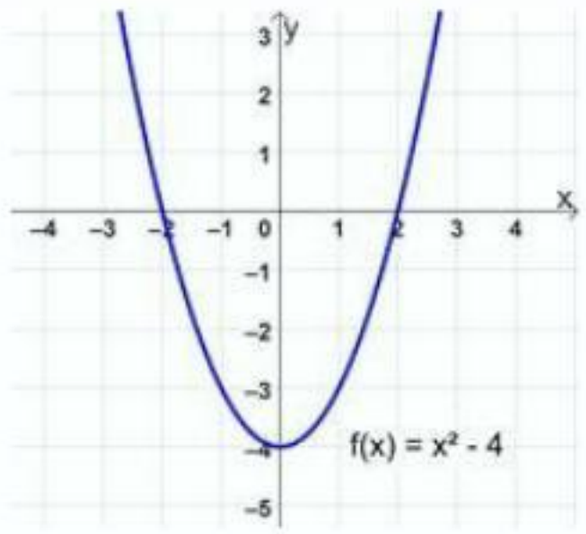
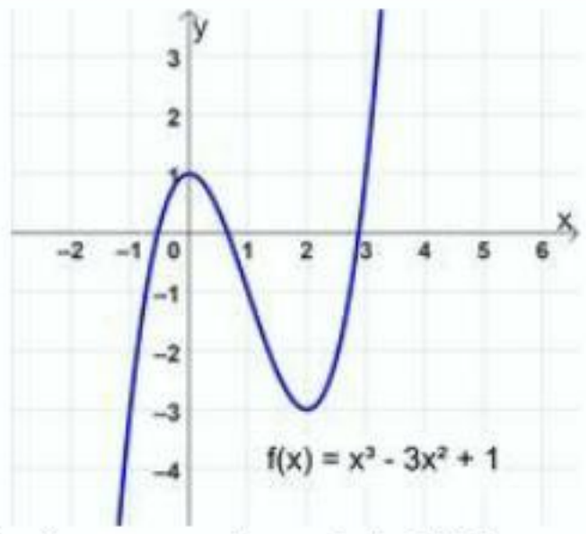
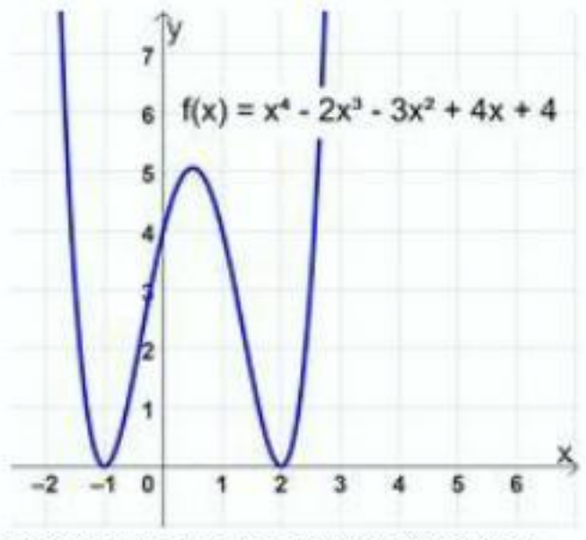
2	$f(x) = x^2 - 4$ Función cuadrática: Parábola	 https://www.geogebra.org/m/bkvyhdpu
3	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$	 https://www.geogebra.org/m/ysbkk9zw
4	$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$	 https://www.geogebra.org/m/e5myduau

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Recorrido (gráfica) de funciones polinomiales*].

Estas gráficas permiten identificar propiedades y características de las funciones polinomiales, cuyo estudio facilita la comprensión de los fenómenos representados por esas funciones. Algunas de estas características son: **continuidad**, **crecimiento**, **decrecimiento**, **máximos y mínimos relativos**, **concavidades**, entre otras; a continuación, se explica cada una de ellas.

Continuidad

> "La continuidad de una función es una propiedad fundamental que describe cómo se comporta la función en relación con los valores cercanos de su dominio. Así, una función se considera continua si no presenta saltos, puntos indefinidos o discontinuidades en su gráfica" (Resueltoos, 2025).

2	$f(x) = x^2 - 4$ Función cuadrática: Parábola	 https://www.geogebra.org/m/bkvyhdpu
3	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$	 https://www.geogebra.org/m/ysbkk9zw
4	$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$	 https://www.geogebra.org/m/e5myduau

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Recorrido (gráfica) de funciones polinomiales*].

Estas gráficas permiten identificar propiedades y características de las funciones polinomiales, cuyo estudio facilita la comprensión de los fenómenos representados por esas funciones. Algunas de estas características son: **continuidad**, **crecimiento**, **decrecimiento**, **máximos y mínimos relativos**, **concavidades**, entre otras; a continuación, se explica cada una de ellas.

Continuidad

> "La continuidad de una función es una propiedad fundamental que describe cómo se comporta la función en relación con los valores cercanos de su dominio. Así, una función se considera continua si no presenta saltos, puntos indefinidos o discontinuidades en su gráfica" (Resueltoos, 2025).

Dirección de Publicaciones Universitarias
Editorial de la Universidad Autónoma del Estado de México

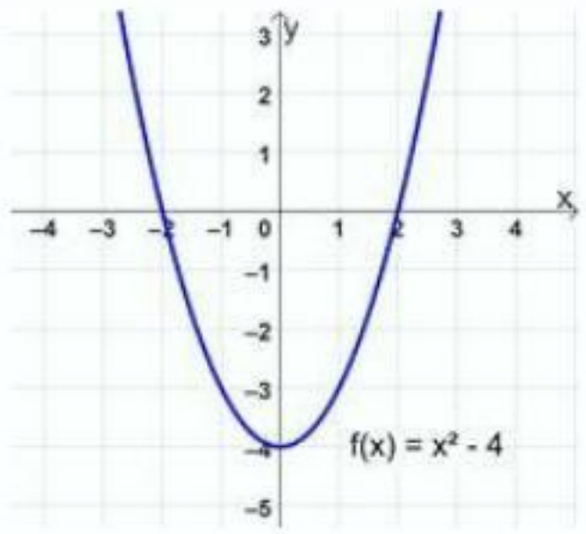
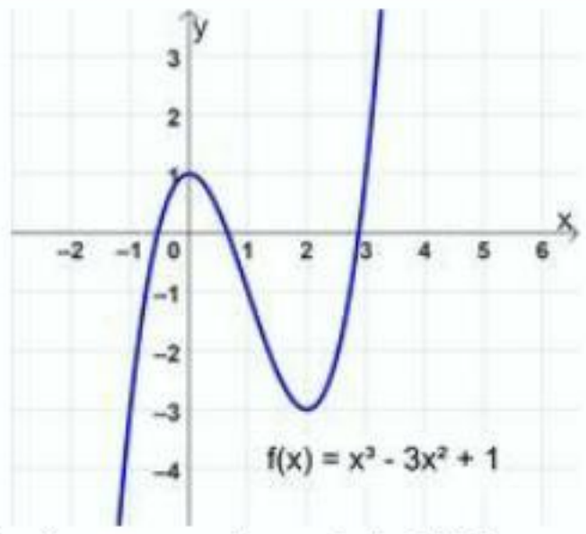
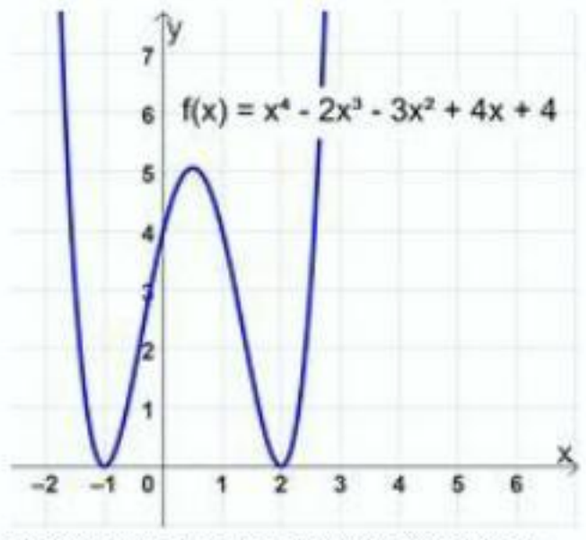
Doctora en Ciencias Sociales
Martha Patricia Zarza Delgado
Rectora

Doctora en Estudios Latinoamericanos
Cinthya Ortega Salgado
Secretaria de Identidad y Cultura

Doctor en Administración
Jorge Eduardo Robles Alvarez
Director de Publicaciones Universitarias

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Estudios de Nivel Medio Superior

Maestro en Tecnología Educativa
Alberto Torres Gutierrez
Director de Educación Continua y Digital

2	$f(x) = x^2 - 4$ Función cuadrática: Parábola	 https://www.geogebra.org/m/bkvyhdpu
3	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$	 https://www.geogebra.org/m/ysbkk9zw
4	$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$	 https://www.geogebra.org/m/e5myduau

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Recorrido (gráfica) de funciones polinomiales*].

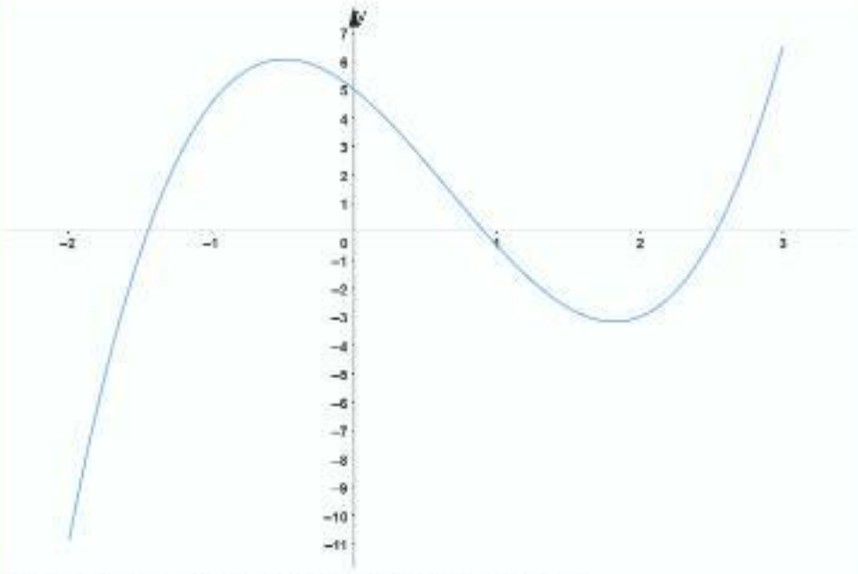
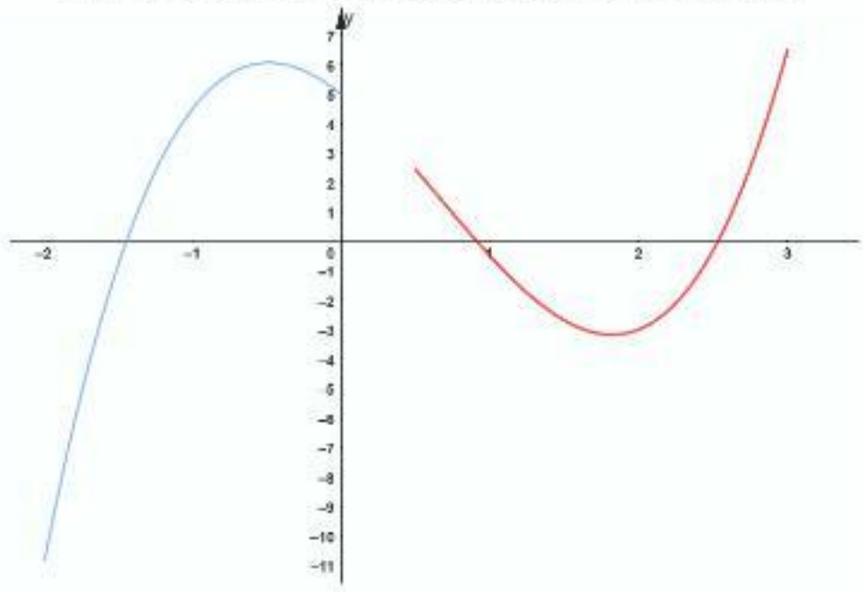
Estas gráficas permiten identificar propiedades y características de las funciones polinomiales, cuyo estudio facilita la comprensión de los fenómenos representados por esas funciones. Algunas de estas características son: **continuidad**, **crecimiento**, **decrecimiento**, **máximos y mínimos relativos**, **concavidades**, entre otras; a continuación, se explica cada una de ellas.

Continuidad

> "La continuidad de una función es una propiedad fundamental que describe cómo se comporta la función en relación con los valores cercanos de su dominio. Así, una función se considera continua si no presenta saltos, puntos indefinidos o discontinuidades en su gráfica" (Resueltoos, 2025).

En este módulo I, que tiene carácter introductorio, se definirá como función continua en un intervalo a toda función cuya gráfica **se puede realizar en un solo trazo del lápiz**; es decir, sin levantarlo, por ejemplo:

Tabla 3.
Continuidad y discontinuidad de funciones.

Función continua en un intervalo	Función discontinua en un intervalo
 https://www.geogebra.org/m/s8jew4ug	 https://www.geogebra.org/m/wkytng8y
La gráfica de la función (línea azul) en el intervalo mostrado se puede dibujar en un solo trazo sin levantar el lápiz. Da clic sobre la gráfica para iniciar una simulación.	La gráfica de la función en el intervalo mostrado NO se puede dibujar en un solo trazo sin levantar el lápiz, para pasar de la sección azul a la roja se debe levantar el lápiz. Da clic sobre la gráfica para iniciar una simulación.

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Continuidad y discontinuidad de funciones*].

Por sus características algebraicas, **todas las funciones polinomiales son continuas**. Regresa a las simulaciones de la tabla 1 y ¡verifícalo!

Es importante resaltar que existen diferentes tipos de discontinuidades, por ejemplo, evitable, asintótica o de salto; no obstante, en este módulo, tanto el concepto continuidad como el resto abordados en este apartado, harán referencia a un intervalo.

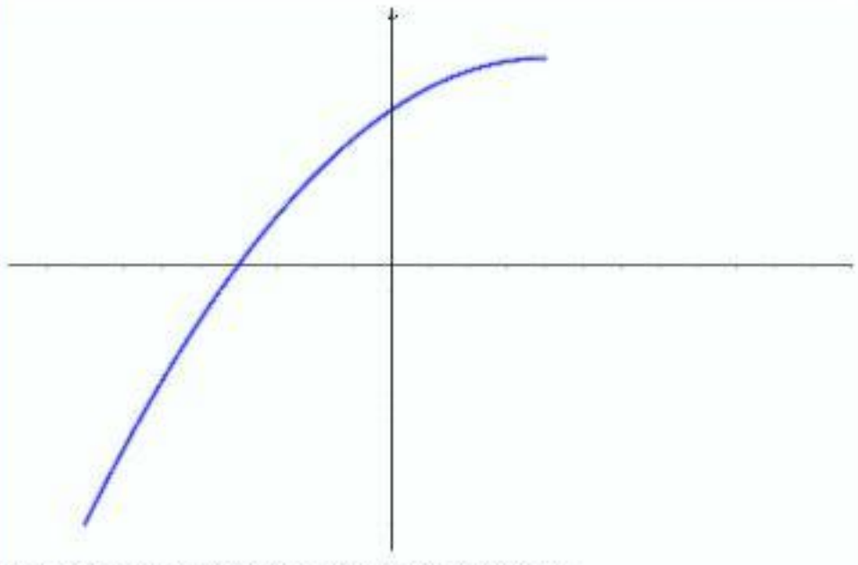
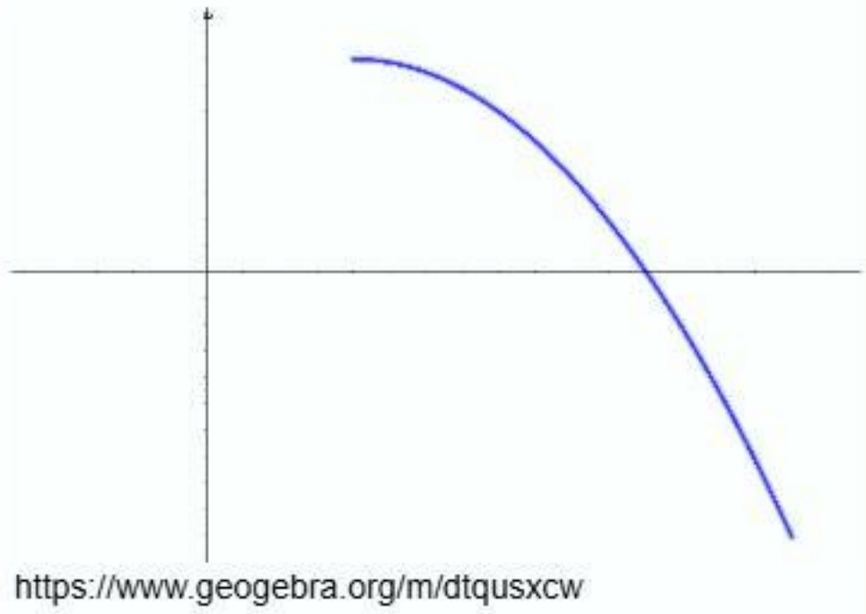
Crecimiento y decrecimiento de funciones

Definición:

> "Sea *f* una función definida en un intervalo *I*, y sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera en *I*:
> Si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, entonces se dice que *f* es creciente en *I*.
> Si $f(x_2) < f(x_1)$ siempre que $x_1 < x_2$, entonces se dice que *f* es decreciente en *I*."
> (Thomas, 1998).

Cuando se sigue la gráfica de una función, el valor de las abscisas (x) aumenta, mientras que el valor de las ordenadas (y) dependerá de la regla de correspondencia que guarda la función; analiza las siguientes simulaciones e identifica cuándo un intervalo de una función es creciente y cuándo es decreciente:

Tabla 4.
Intervalos creciente y decreciente de funciones

Crecimiento	Decrecimiento
	
https://www.geogebra.org/m/aky5jqzq	https://www.geogebra.org/m/dtqusxcw
Intervalo creciente de una función. Da clic sobre la gráfica para iniciar una simulación.	Intervalo decreciente de una función. Da clic sobre la gráfica para iniciar una simulación.

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Intervalos creciente y decreciente de funciones*].

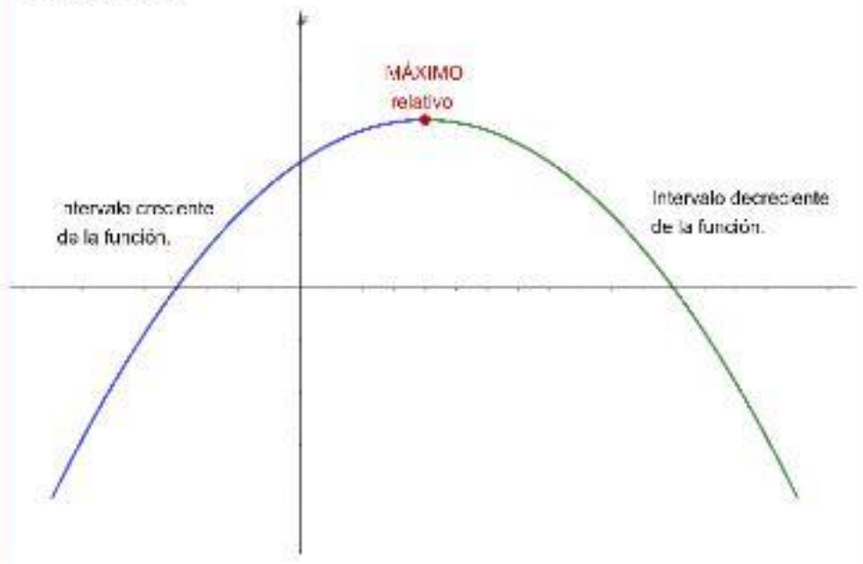
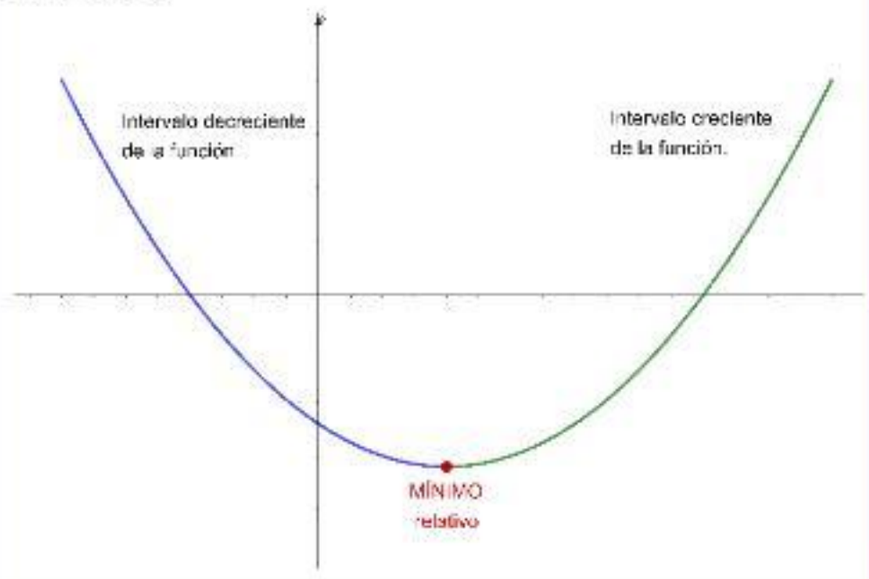
Regresa a las simulaciones de la Tabla 2 y analiza el comportamiento de las gráficas polinomiales, con ayuda de tus compañeros y docente identifiquen intervalos crecientes y decrecientes.

Máximos y mínimos relativos

> "Se dice que una función $f(x)$ tiene un máximo en el punto x_1, si su valor es aquí mayor que en cualquier otro punto de cierto intervalo que comprende el punto x_1. Es decir, la función tiene un máximo en $x = x_1$, si $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ para todo valor de Δx (positivo o negativo) suficientemente pequeño en valor absoluto. Del mismo modo una función $f(x)$ tiene un mínimo para $x = x_2$, si $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ para cualquier valor de Δx (positivo o negativo) suficientemente pequeño en valor absoluto" (Piskunov,1983).

Cuando una función posee intervalos crecientes y decrecientes existen puntos en los que esos cambios ocurren, aquí estudiaremos dos casos:

Tabla 5.
Máximos y mínimos relativos de funciones.

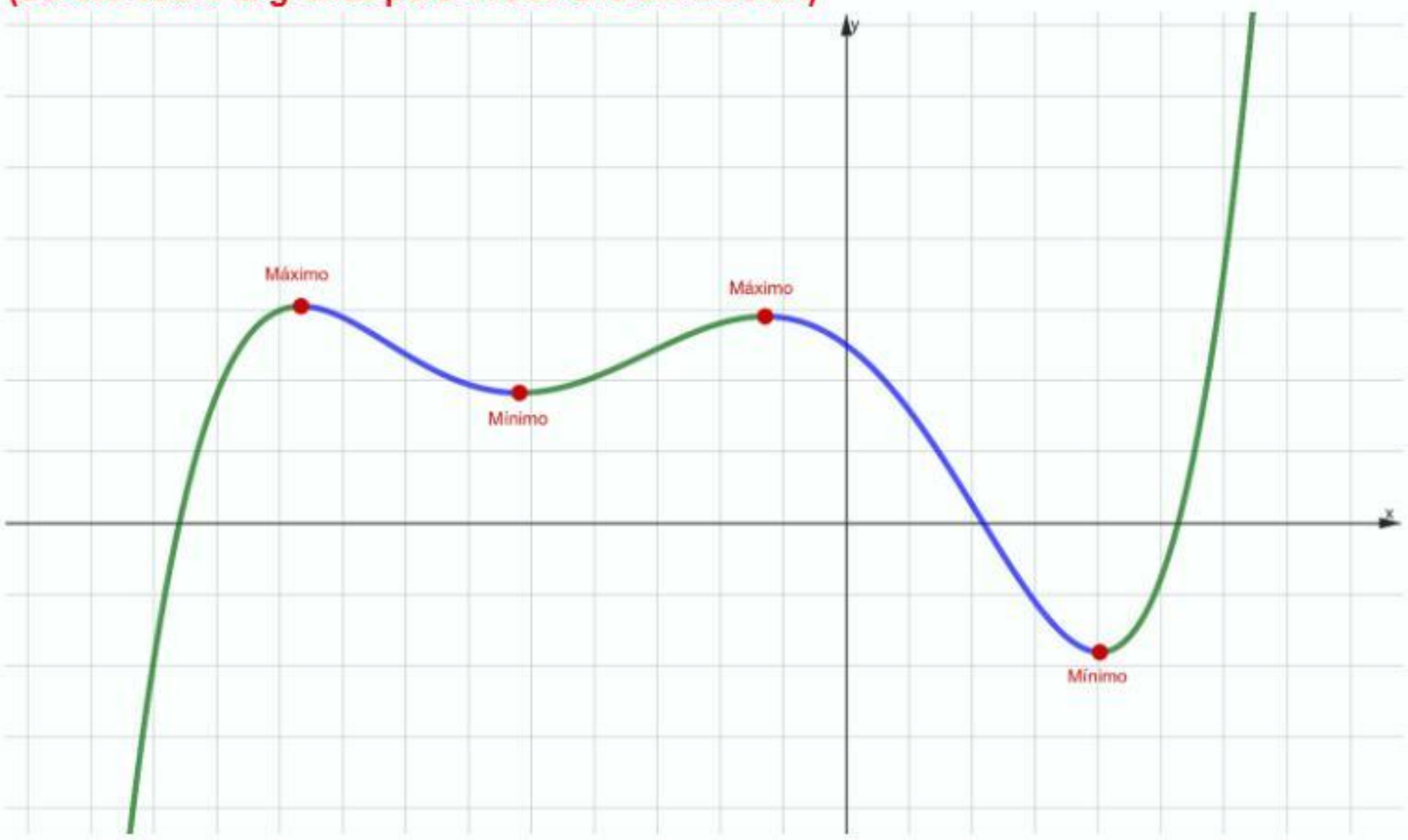
Máximo relativo	Mínimo relativo
Se denomina **máximo relativo** al punto de una función en un intervalo en el que la función pasa de ser creciente a decreciente, ejemplo: 	Se denomina **mínimo relativo** al punto de una función en un intervalo en el que la función pasa de ser decreciente a creciente, ejemplo: 

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Máximos y mínimos relativos de funciones*].

En la siguiente figura se muestra una función polinomial de grado cinco, los intervalos verdes son intervalos crecientes y los azules son decrecientes, estos están separados por los puntos máximos y mínimos relativos:

Figura 25.
Máximos y mínimos relativos de una función.

(Da clic sobre la gráfica para iniciar una simulación)



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Máximos y mínimos relativos de una función*].

Algunos aspectos importantes para considerar sobre las funciones polinomiales son:

- Las funciones constantes no poseen máximos ni mínimos relativos.

- Las funciones lineales no poseen máximos ni mínimos relativos.

- Las funciones cuadráticas y de grados superiores pueden presentar uno o más máximos y mínimos relativos.

- Puede darse el caso de que las funciones polinomiales cúbicas y de grados superiores, no presenten máximos ni mínimos relativos.

Regresa a las simulaciones de la Tabla 2 y analiza el comportamiento de los máximos y mínimos relativos de las gráficas polinomiales.

Concavidades

"La concavidad proporciona información acerca de la forma en la que la gráfica de una función se flexiona, es decir, se vuelve una curva. Si trazamos rectas tangentes a una gráfica y ésta (sic) se encuentra siempre por arriba de las rectas tangentes, se dice que la gráfica es cóncava hacia arriba. De manera similar, si trazamos rectas tangentes a una gráfica y ésta (sic) se encuentra siempre por debajo de las rectas tangentes, se dice que la gráfica es cóncava hacia abajo" (Galván et al, 2006).

Como se ha visto, las funciones que presentan máximos y mínimos relativos poseen intervalos crecientes y decrecientes en sus recorridos (gráficas). Dependiendo de la transición de uno a otro tipo de intervalo, la función tendrá **concavidades positivas o negativas**. Es importante recalcar que:

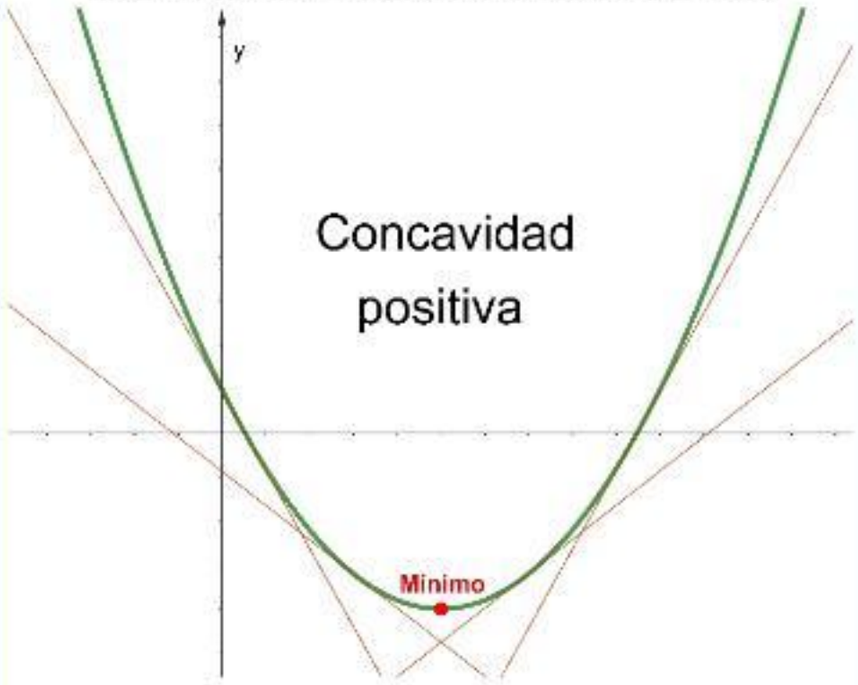
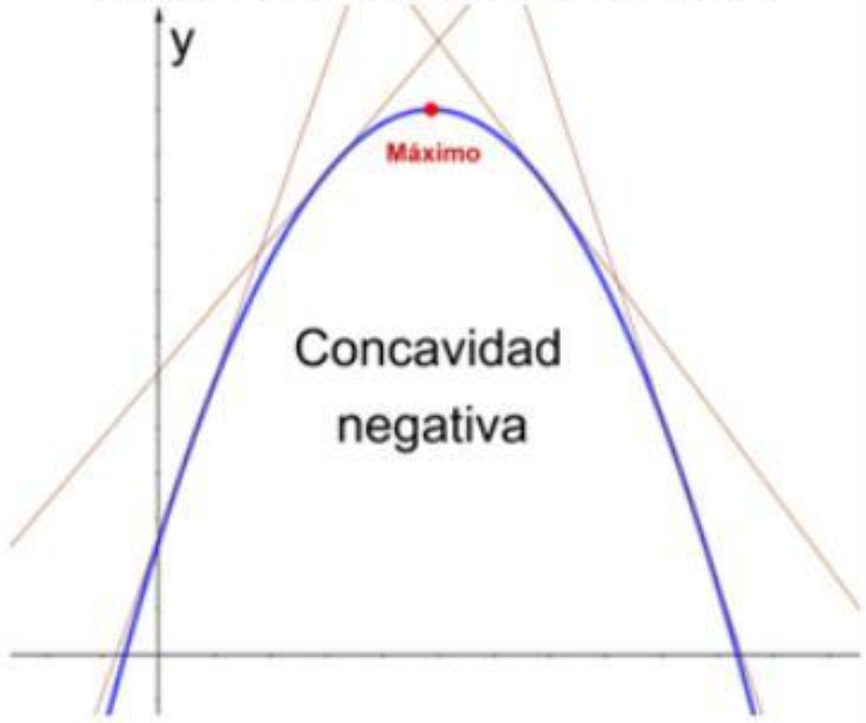
- Las funciones polinomiales constantes y lineales NO presentan concavidades.

- Las funciones polinomiales cuadradas presentan solo un tipo de concavidad.

- Las funciones polinomiales cúbicas presentan entre sus concavidades un punto llamado **punto de inflexión**, el cual permite identificar precisamente ese cambio de concavidad.

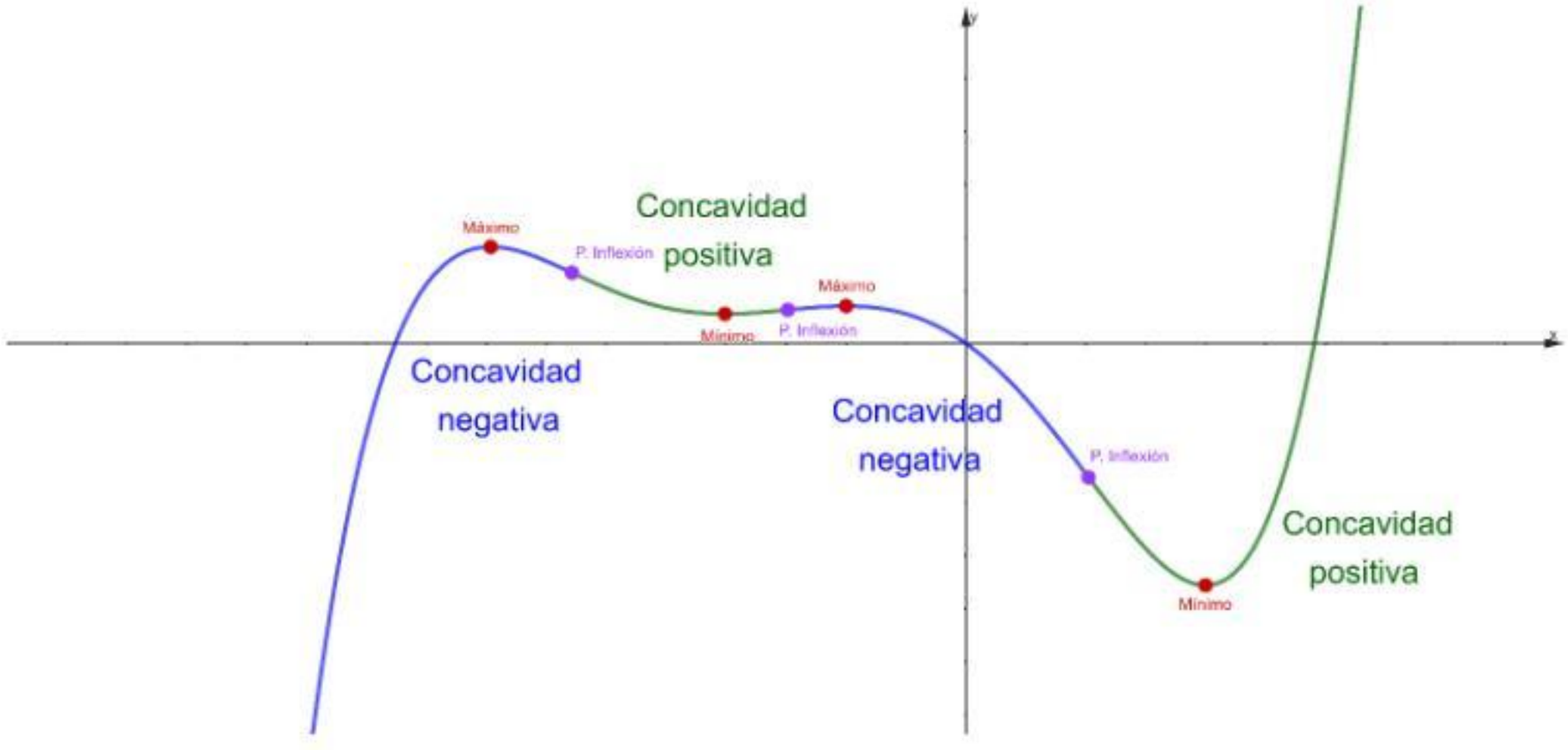
En este módulo se hablará del punto de inflexión únicamente de forma intuitiva, en el entendido de que su análisis más detallado se abarcará en módulos posteriores.

Tabla 6.
Concavidades.

Concavidad positiva (hacia arriba)	Concavidad negativa (hacia abajo)
	
En la periferia de un punto mínimo relativo, el intervalo decreciente (rama izquierda) pasa a ser intervalo creciente (rama derecha) a partir de ese punto, creando así una concavidad positiva. Observa que la gráfica se encuentra por arriba de rectas tangentes a ella.	En la periferia de un punto máximo relativo, el intervalo creciente (rama izquierda) pasa a ser intervalo decreciente (rama derecha) a partir de ese punto, creando así una concavidad negativa. Observa que la gráfica se encuentra por debajo de rectas tangentes a ella.

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Concavidades*].

Figura 26.
Concavidades en función polinomial de grado 5.

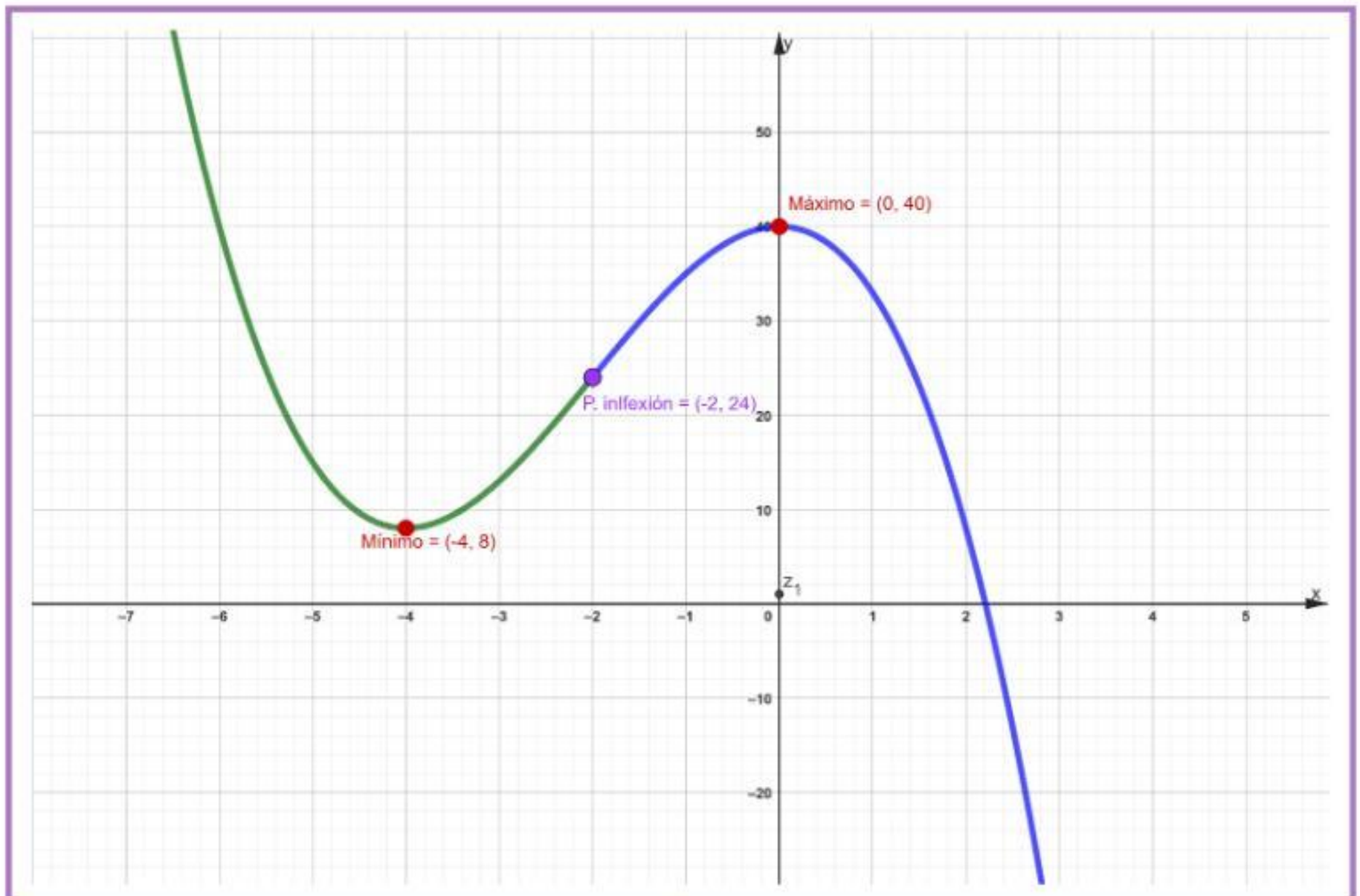


Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Concavidades en función polinomial de grado 5*].

Como pudiste comprobar en la simulación anterior, los cambios de concavidades ocurren en los puntos llamados puntos de inflexión.

A continuación, se muestra un par de ejemplos de cómo se interpretan geométricamente en una gráfica los temas vistos:

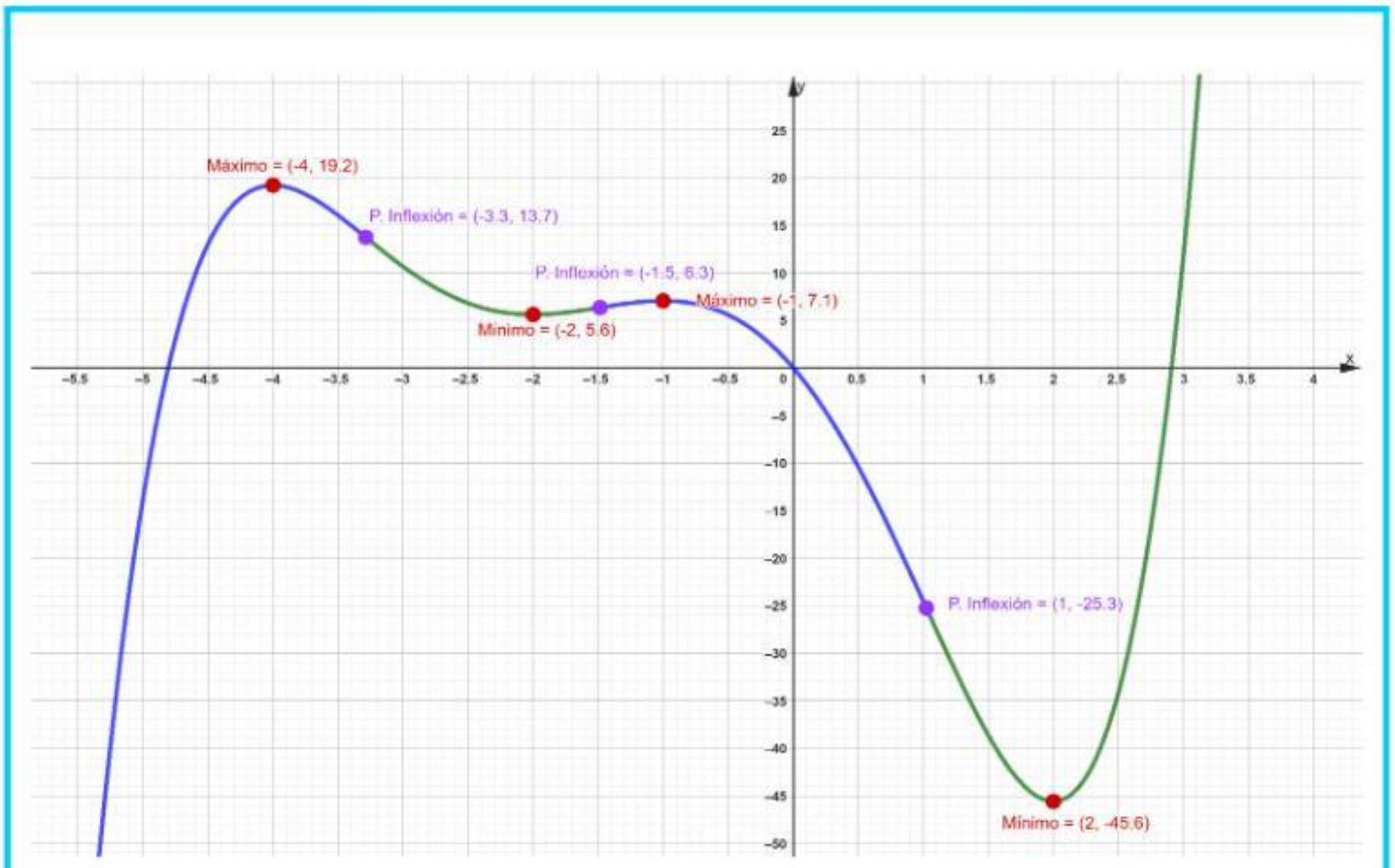
Figura 27.
Ejemplo de los elementos del tema en una función cúbica.



Continuidad:	La función es continua en todo su dominio
Intervalos de crecimiento:	Dominio: (-4,0)
Intervalos de decrecimiento:	Dominio: $(-\infty,-4) \cup (0,\infty)$
Punto de inflexión:	(-2,24)
Máximo relativo:	(0,40)
Mínimo relativo:	(-4,8)
Concavidad positiva:	Dominio: $(-\infty,-2)$
Concavidad negativa:	Dominio: $(-2,\infty)$

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Ejemplo de los elementos del tema en una función cúbica*].

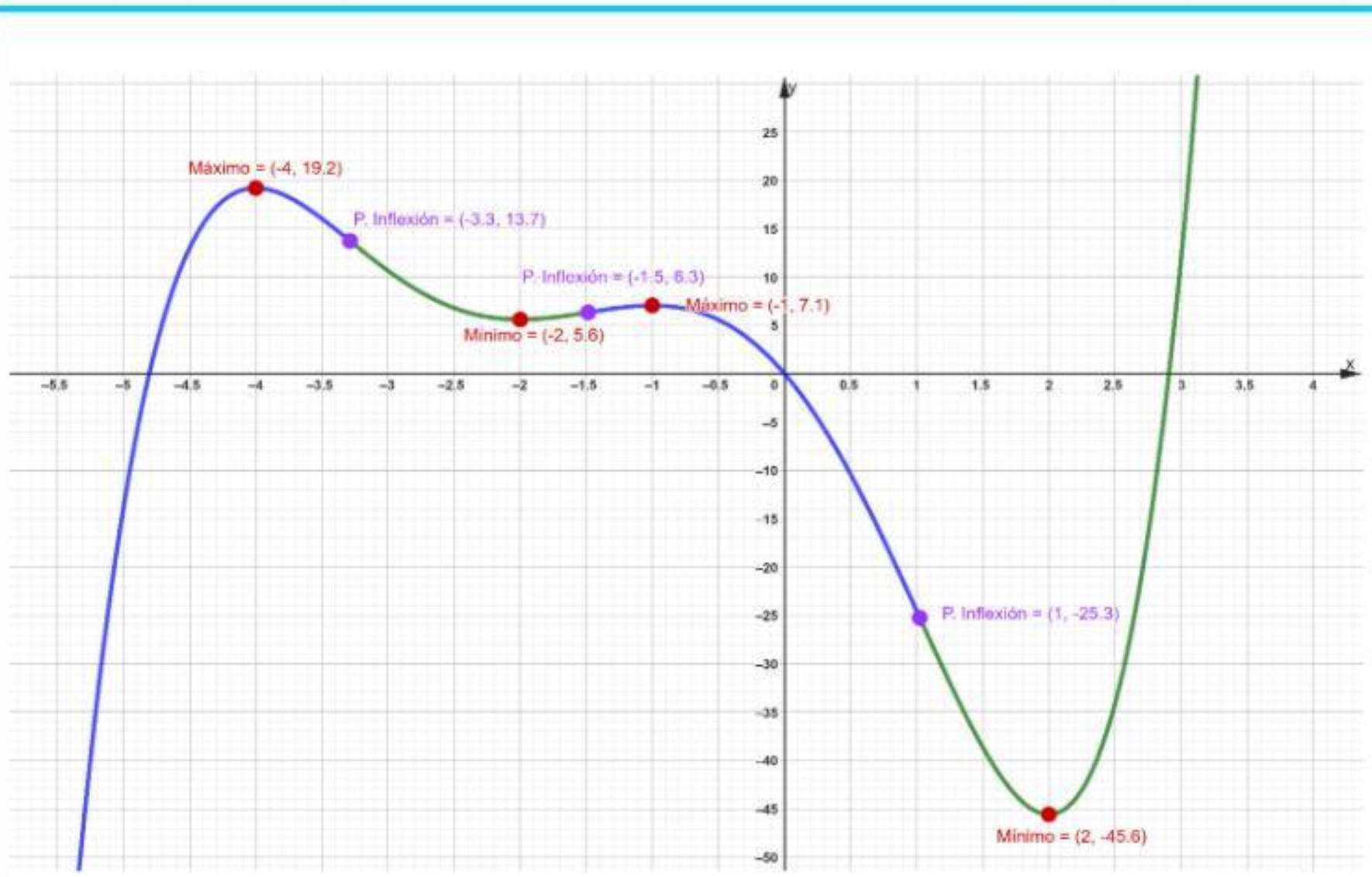
Figura 28.
Ejemplo de los elementos del tema en una función de grado 5.



Continuidad:	La función es continua en todo su dominio
Intervalos de crecimiento:	Dominio: $(-\infty,-4) \cup (-2,-1) \cup (2,\infty)$
Intervalos de decrecimiento:	Dominio: $(-4,-2) \cup (-1,-2)$
Puntos de inflexión:	(-3.3, 13.7) (-1.5, 6.3) (1, -25.3)
Máximos relativos:	(-4,19.2) (-1, 7.1)
Mínimo relativo:	(-2,5.6) (2, -45.6)
Concavidades positivas:	Dominio: $(-3.3, -1.5) \cup (1, \infty)$
Concavidades negativas:	Dominio: $(-\infty, -3.3) \cup (-1.5, 1)$

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Ejemplo de los elementos del tema en una función de grado 5*].

Figura 28.
Ejemplo de los elementos del tema en una función de grado 5.



Continuidad:	La función es continua en todo su dominio
Intervalos de crecimiento:	Dominio: $(-\infty,-4) \cup (-2,-1) \cup (2,\infty)$
Intervalos de decrecimiento:	Dominio: $(-4,-2) \cup (-1,-2)$
Puntos de inflexión:	(-3.3, 13.7) (-1.5, 6.3) (1, -25.3)
Máximos relativos:	(-4,19.2) (-1, 7.1)
Mínimo relativo:	(-2,5.6) (2, -45.6)
Concavidades positivas:	Dominio: $(-3.3, -1.5) \cup (1, \infty)$
Concavidades negativas:	Dominio: $(-\infty, -3.3) \cup (-1.5, 1)$

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [*Ejemplo de los elementos del tema en una función de grado 5*].



Actividad 5.
Análisis y características de las funciones polinomiales

Instrucciones: realiza la siguiente actividad, para iniciar **da clic** en el enlace.





Actividad 6.
Ejercicio autoevaluable

Instrucciones: para reforzar los temas vistos en este Módulo I se te pide realizar el siguiente ejercicio, para comenzar, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada MI Ejercicio Autoevaluable.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

Maximiliano Adán Evangelista Esquivel
Gabriela Patricia González Navarro
María Fernanda López Albarrán

"2025, 195 Años de la Apertura del Instituto Literario en la Ciudad de Toluca"

Resumen

Una vez que hemos viajado a lo largo de la historia a través de autores con mayor contribución a lo que hoy conocemos como cálculo diferencial, podemos darnos cuenta de las grandes y muy importantes contribuciones de cada uno de ellos, las cuales siguen utilizando.

Tanto Cauchy como Weierstrass jugaron roles muy valiosos en el desarrollo del análisis matemático en el siglo XIX; con aportaciones para realizar definiciones muy precisas, teoremas importantes y el ahondamiento en el estudio de funciones continuas y derivables, cuyo efecto se continúa usando.

Durante el siglo XX, el cálculo continuó evolucionando vía el desarrollo de la teoría de funciones, el análisis funcional y la teoría de la medida. Así mismo, hubo más aportaciones como el cálculo vectorial, el cálculo tensorial y el cálculo de variaciones que hoy es parte fundamental de la Informática.

El cálculo es parte integral de diversas disciplinas, incluyendo matemáticas, física, ingeniería, economía e informática.

El análisis gráfico de las funciones deja por sentadas las bases para que conceptos superiores, como el límite de una función y derivada, sean más fáciles de comprender al momento de realizar su estudio analítico. En este punto, es importante que se haya percibido la estrecha relación que existe entre una expresión algebraica polinomial y su respectiva gráfica, observando similitudes y coincidencias que se pueden aprovechar para una mejor comprensión de otro tipo de funciones.



Glosario

- **Calculus:** contar con las piedras.
- **Cociente:** el resultado de dividir una cantidad por otra.
- **Constante:** valor fijo, aunque puede ser no determinado.
- **Crecimiento:** que aumenta su valor.
- **Decrecimiento:** que disminuye su valor.
- **Derivada:** razón de cambio instantánea con la que varía el valor de una función matemática.
- **Función:** relación entre variables, donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo.
- **Gráfica:** representación visual en un sistema de referencia del conjunto de puntos que se obtienen mediante una función.
- **Incremento:** aumento en el valor de una variable.
- **Máximo relativo:** punto en un intervalo de una función en el que una función pasa de ser creciente a decreciente.
- **Mínimo relativo:** punto en un intervalo de una función en el que una función pasa de ser decreciente a creciente.
- **Movimiento:** acción y efecto de mover o desplazarse.
- **Parábola:** curva que resulta de graficar una función cuadrática.
- **Pendiente:** es el cambio de la variable y entre el cambio de la variable *x*.
- **Polinomio / polinomial:** expresión compuesta por monomios con coeficientes reales y exponentes enteros no negativos.
- **Punto de inflexión:** son aquellos puntos donde la gráfica de una función cambia de concavidad.
- **Recorrido:** es el conjunto de valores que toma la variable dependiente. También se le conoce como rango o imagen de la función.
- **Tangente:** recta que, en un intervalo, interseca con una función en un solo punto.
- **Variable:** es un símbolo que representa un valor que puede cambiar.
- **Velocidad instantánea:** velocidad de un móvil en un instante específico del tiempo.

Referencias

• UNAM. Universidad Nacional Autónoma de México (s.f.). Portal académico del CCH: Un espacio de consulta, difusión e intercambio académicos para la Educación Media Superior. https://portalacademico.cch.unam.mx/

• MatalasMates. Aula online de matemáticas. (2025, 2 de enero). Matemágicas 3. Truco: piensa un número. ¿Cómo diseñar este tipo de trucos?. Youtube https://www.youtube.com/watch?v=XhOyVSa0NuI

• Ibáñez, P. (2023). *Cálculo diferencial*. Cengage.

• Goodman, A. (1994). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Ed. Prentice Hall Latinoamérica. 1a edición. México. ISBN 0-13-716408-4.

• Galván, D., et al. (2006). *Cálculo diferencial para administración y ciencias sociales*. ITESM Campus Monterrey. Ed. Pearson educación México. 2a edición. ISBN 970-26-0735-3.

• Piskunov, N. (1983). *Cálculo diferencial e integral.* Tomo I. 3a edición. Editorial Mir.

• RAE. Real Academia Española. (2025). Número. En Diccionario de la lengua española https://dle.rae.es/n%C3%BAmero?m=form

• Resueltoos (2025). *Estudio de continuidad de una función.* https://www.resueltoos.com/blog/matematicas/estudio-de-continuidad

• Thomas, G. (2005). *Cálculo una variable*. Ed. Pearson Addison Wesley. 11va edición. ISBN 9789702606437.



Módulo II

Límite y continuidad de una función

Propósito del Módulo

Determina el límite y la continuidad de una función por medio del establecimiento de estrategias para la resolución de problemas de aplicación.

Presentación

En el módulo anterior conocimos algunas características de las funciones algebraicas polinomiales, una de ellas, es la continuidad en un intervalo de su gráfica, es decir, podemos realizarla en un solo trazo.

No todas las funciones algebraicas corren tal suerte, existen casos en los que las funciones tienen rupturas o separaciones en sus gráficas, algo que se traduce en funciones discontinuas.

Esas divisiones pueden tomar diversos nombres según sus características; en este módulo aprenderemos a identificarlas y nombrarlas.

Algunos de los procedimientos que se emplean son conocidos como límites; es decir, obtener el valor que adquiere la variable dependiente para un valor particular de la variable independiente; en otras palabras, el valor de una función $f(x)$ para un valor específico de x, esto en los casos que sea posible y en los que no explicar el por qué y, sobre todo, identificar cómo se comporta la función en esos puntos.

Iniciaremos con la definición formal de este concepto límite y lo aterrizaremos en teoremas que resultan en una aplicabilidad más cómoda y simple, esto nos permitirá descubrir el comportamiento de funciones que de forma algebraica presentan errores o inconsistencias, como lo que ocurre en las funciones racionales (división) o irracionales (raíz). Así mismo, se abordarán otros tipos de límites, como los laterales y aquellos en los que la variable independiente .

Antes de iniciar a hablar de límites de funciones cuando la variable independiente , empezaremos por decir que, aunque se puede pensar que infinito es un número que no tiene fin o es incontable como las estrellas del cielo, este también puede tomar el valor de un número real muy pequeño o grande.

Dentro del tema de continuidad identificaremos y aplicaremos el concepto en situaciones y fenómenos de la vida real en el cual utilizaremos límites, ya que veremos que debe de existir el límite para que la función sea continua, esto te lo explicaremos de manera más amplia.

También ocurre el caso donde la función es discontinua, conoceremos los tipos de discontinuidad y cómo analizarlos utilizando el concepto de límite, así como en ciertos casos, se puede reescribir la función con el fin de que el límite tenga un valor definido.

Mediante los problemas de aplicación veremos cómo utilizar estos conceptos en situaciones reales, lo que facilitará la comprensión y el análisis de tal manera que se relacionen con momentos de la vida cotidiana.

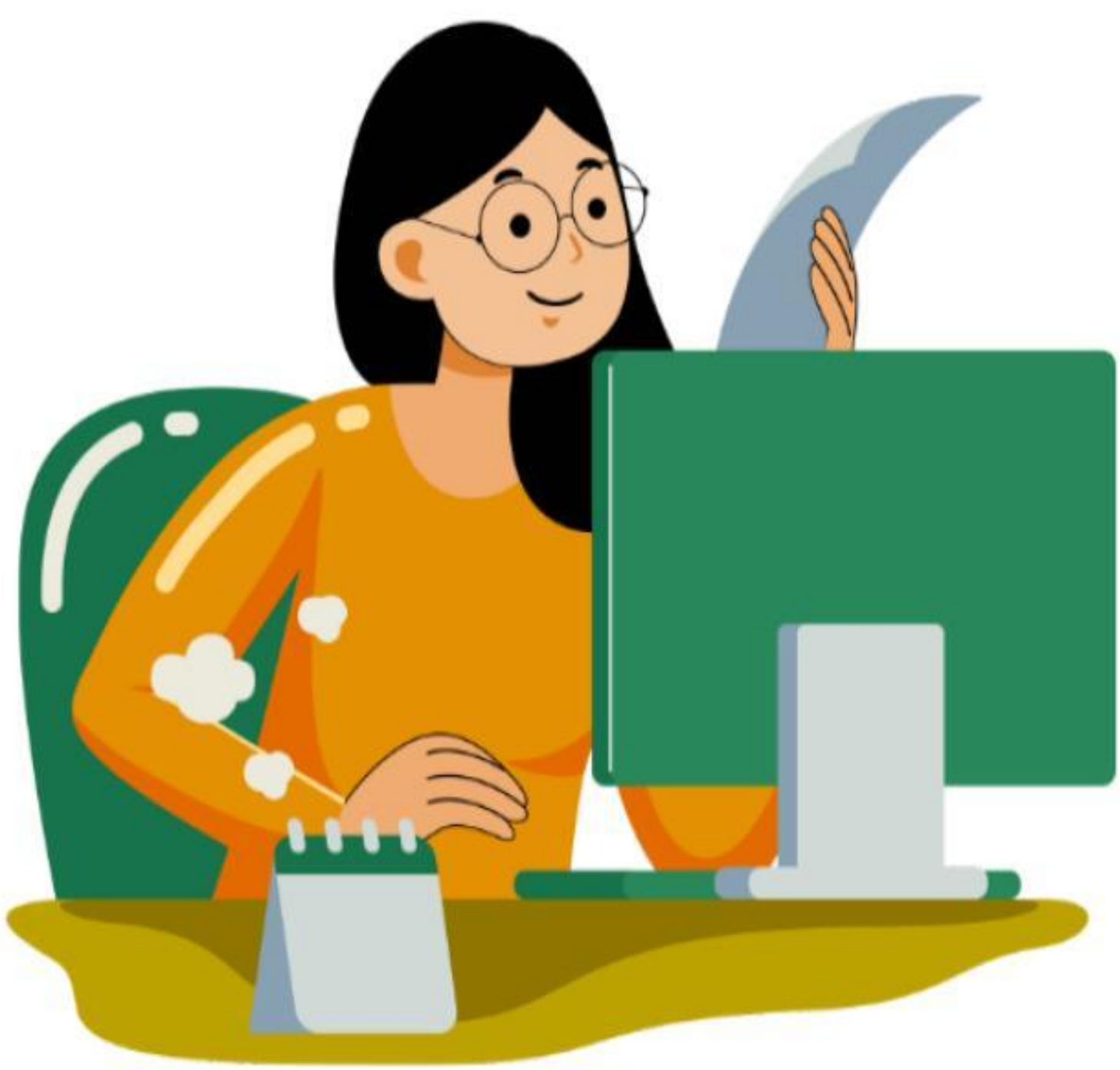


Actividad 1. Evaluación diagnóstica

Instrucciones: antes de iniciar con la revisión de los contenidos del módulo II, te invitamos a responder a la evaluación diagnóstica.

Esto te ayudará a descubrir los conocimientos previos que tienes sobre los temas a abordar y, al mismo tiempo, le permitirá a tu docente conocer tus fortalezas y debilidades.

Para comenzar con el ejercicio, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada: MII Evaluación Diagnóstica





Actividad 1. Evaluación diagnóstica

Instrucciones: antes de iniciar con la revisión de los contenidos del módulo II, te invitamos a responder a la evaluación diagnóstica.

Esto te ayudará a descubrir los conocimientos previos que tienes sobre los temas a abordar y, al mismo tiempo, le permitirá a tu docente conocer tus fortalezas y debilidades.

Para comenzar con el ejercicio, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada: MII Evaluación Diagnóstica



2.1 Límite de una función

Como ya se ha visto en el módulo 1, **una función $f(x)$ tiene asociada una gráfica** en un plano cartesiano, la regla de correspondencia de la función nos permite obtener el valor de la variable dependiente en el momento en que nosotros asignamos valores a la variable independiente, esto se puede realizar por medio de una tabla, por ejemplo:

Sea la función:

$$f(x) = x^2 - 4 \text{ con } \in [-3, 3]$$

En esta expresión se indica en forma de intervalo cerrado los posibles valores de la variable independiente x que se desean considerar para la porción de gráfica a representar, para obtener los valores de la variable dependiente y, debemos sustituir en la regla de correspondencia de la función dada algunos valores representativos de x :

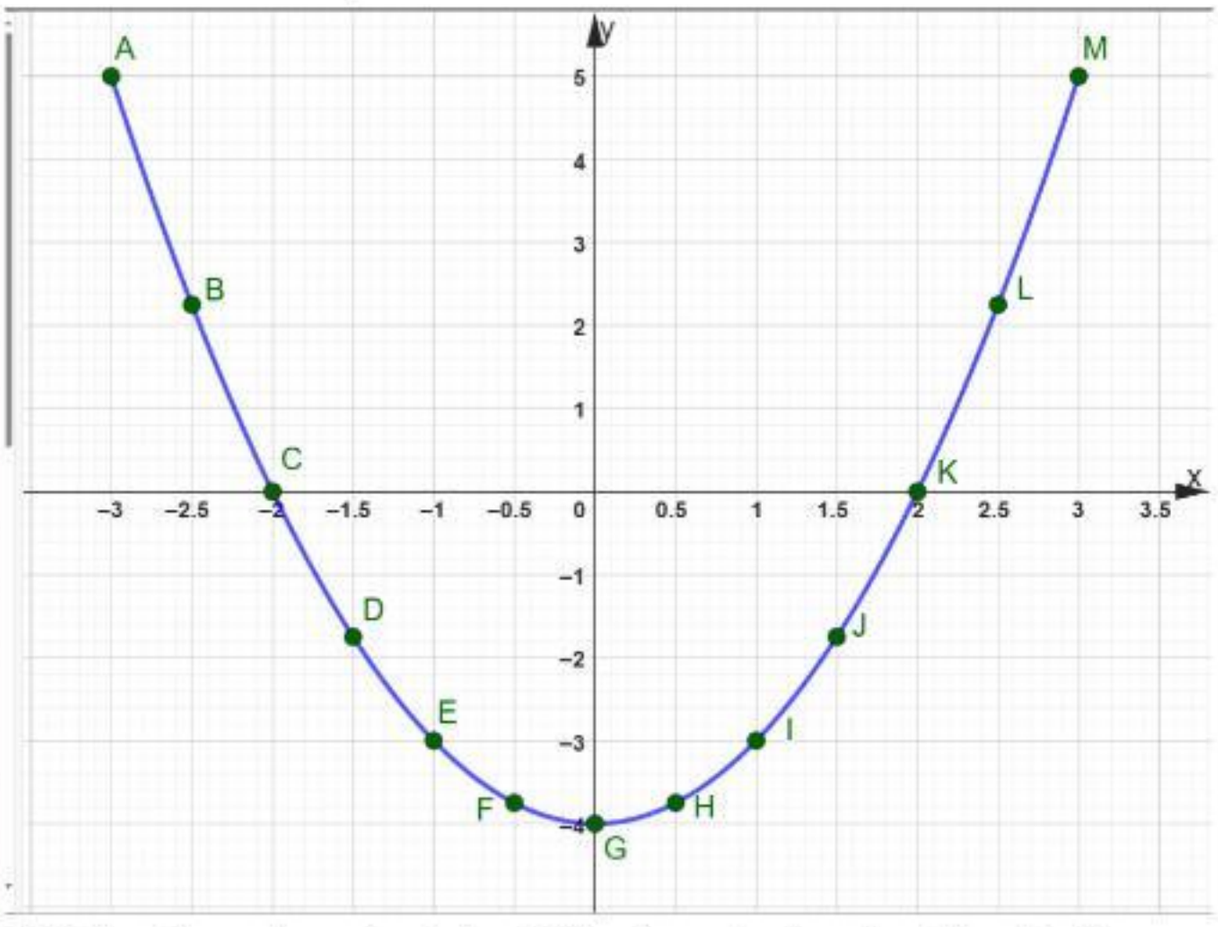
$$\begin{array}{llllllll} f(-3) & = & (-3)^2 - 4 & = & 9 - 4 & = & 5 \\ f(-2.5) & = & (-2.5)^2 - 4 & = & 6.25 - 4 & = & 2.25 \\ f(-2) & = & (-2)^2 - 4 & = & 4-4 & = & 0 \\ f(-1.5) & = & (-1.5)^2 - 4 & = & 2.25 - 4 & = & -1.75 \end{array}$$

...

Al continuar esta secuencia, anotando los resultados en una tabla y elaborando la gráfica correspondiente con los puntos obtenidos se tiene:

Tabla 1.
Gráfica de una función polinomial cuadrada.

	x	y
A	-3	5
B	-2.5	2.25
C	-2	0
D	-1.5	-1.75
E	-1	-3
F	-0.5	-3.75
G	0	-4
H	0.5	-3.75
I	1	-3
J	1.5	-1.75
K	2	0
L	2.5	2.25
M	3	5



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de una función polinomial cuadrada].

Por sus características algebraicas, **las funciones polinomiales son continuas** a lo largo de todo su dominio y su rango; no obstante, existe otro tipo de funciones que presentan "irregularidades" asociadas a operaciones que no se pueden realizar o resolver, las más comunes para los ejercicios en este módulo son la **división** y la **raíz cuadrada:**

Tabla 2.
Operaciones con restricciones.

OPERACIÓN	RESTRICCIÓN	EJEMPLO
División	No es posible dividir entre 0	$\frac{2}{0}$
Raíz cuadrada	No se puede calcular la raíz cuadrada de un número negativo	$\sqrt{-2}$

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia. [Operaciones con restricciones].

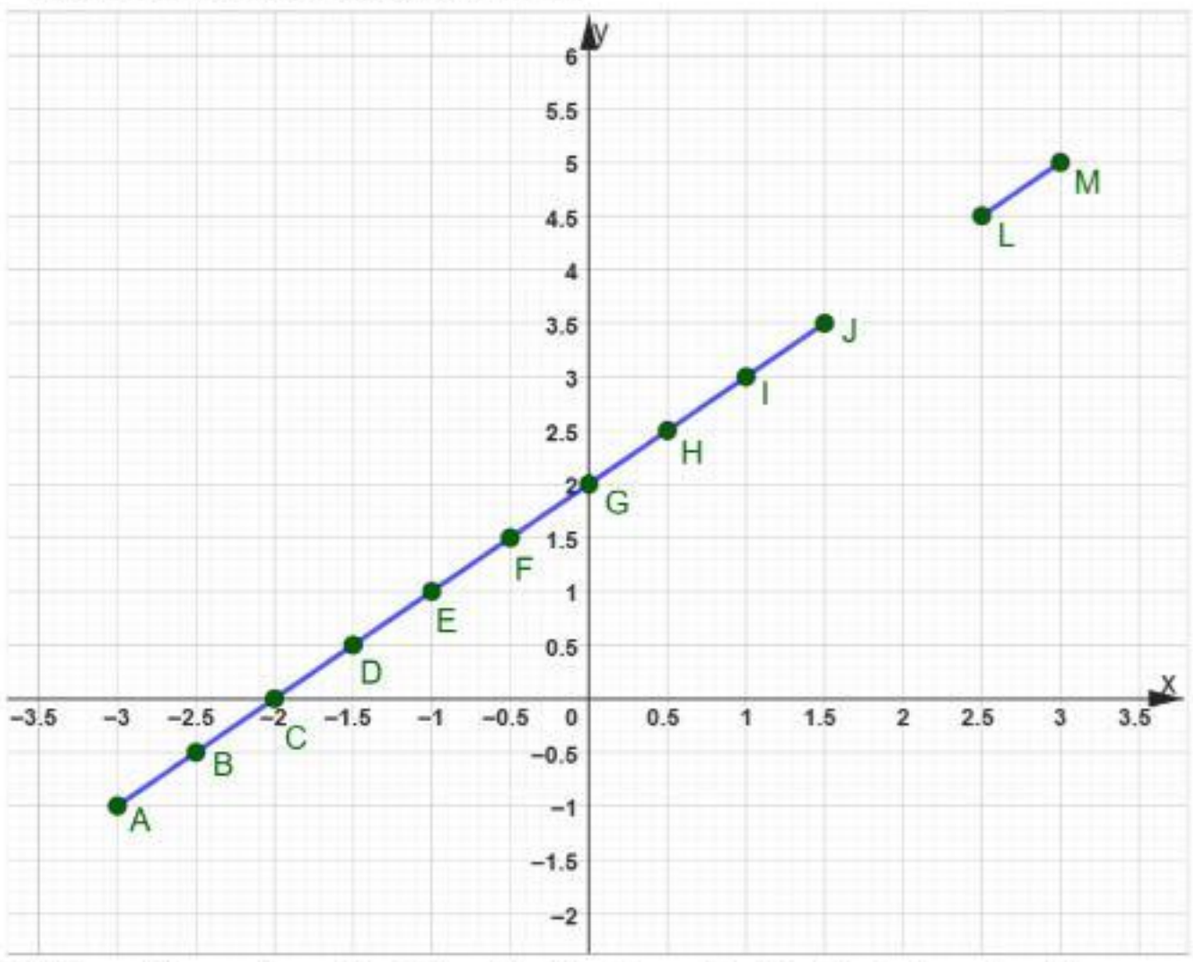
¡Intenta resolver estas operaciones en la calculadora y discute con tus compañeros los resultados obtenidos!

Tratemos de realizar el mismo procedimiento que la tabla 1 con la siguiente función algebraica racional (es algebraica pero NO es polinomial):

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \text{ con } x \in [-3, 3]$$

Tabla 3.
Gráfica de una función algebraica racional

	x	*y*
A	-3	-1
B	-2.5	-0.5
C	-2	0
D	-1.5	0.5
E	-1	1
F	-0.5	1.5
G	0	2
H	0.5	2.5
I	1	3
J	1.5	3.5
K	2	No definido
L	2.5	4.5
M	3	5



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de una función algebraica racional].

Podemos observar que en esta ocasión la forma misma de la función nos llevó a intentar resolver una operación que tiene la restricción de la división entre 0; no obstante, también se intuye que la gráfica parece una recta, con la excepción de esos valores cercanos a $x = 2$. Si continuamos con la intuición en la secuencia de la recta, incluso se podría afirmar que el valor de y es 4.

Para comprender mejor esta idea es necesario hablar del concepto matemático "límite de una función", el cual será estudiado en el siguiente apartado.

2.1.1 Concepto intuitivo y su interpretación gráfica

En palabras sencillas, el límite de una función se entiende como "el valor al que una función se aproxima conforme sus valores de entrada se acercan cada vez más a cierto número" (Khan, s.f.).

En una versión formal conocida como la definición épsilon-delta, el concepto de límite establece que (Hartman, s.f.):

Dejar I ser un intervalo abierto que contiene a c, y dejar f ser una función definida en I, excepto posiblemente en c. El **límite de** $f(x)$, a **medida que** x **se aproxima** c, **es** L, denotado por

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

significa que dada alguna $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \neq c$, si $| x - c | < \delta$, entonces $| f(x) - L | < \varepsilon$. (Hartman, s.f.)

Considerando el ejemplo de la función algebraica racional de la tabla 3, intuimos que el valor de la función en $x = 2$ es $y = 4$, aunque aún no lo podemos demostrar numéricamente. El concepto de límite del párrafo anterior quiere decir que, cuando estamos cerca de $y = 4$ podemos crear un intervalo, sumando o restando una pequeña cantidad a la que denominamos ε (épsilon), en el que cualquier valor de y de ese intervalo (excepto 4) debe ser forzosamente obtenido con un valor cercano a $x = 2$ (excepto 2), el cual se encontrará en un intervalo que se obtiene sumando o restando una pequeña cantidad a $x = 2$ a la que denominamos δ (delta). Da clic en la siguiente simulación para comprender mejor esta idea, analiza el comportamiento de los siguientes puntos clave:

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, ε, δ, valor propuesto de $f(2) = L = 4$ punto P

Primera edición, agosto 2025

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III
Libro de texto digital

Autores
Maximiliano Adán Evangelista Esquivel
Plantel "Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana" de la Escuela Preparatoria de la UAEMéx
Gabriela Patricia González Navarro
Plantel "Ignacio Ramírez Calzada" de la Escuela Preparatoria de la UAEMéx
María Fernanda López Albarrán
Plantel "Nezahualcóyotl" de la Escuela Preparatoria de la UAEMéx

Universidad Autónoma del Estado de México
Av. Instituto Literario 100 Ote. Col. Centro
Toluca, Estado de México
C. P. 50000
Tel: (52) 722 481 18 12
http://www.uaemex.mx

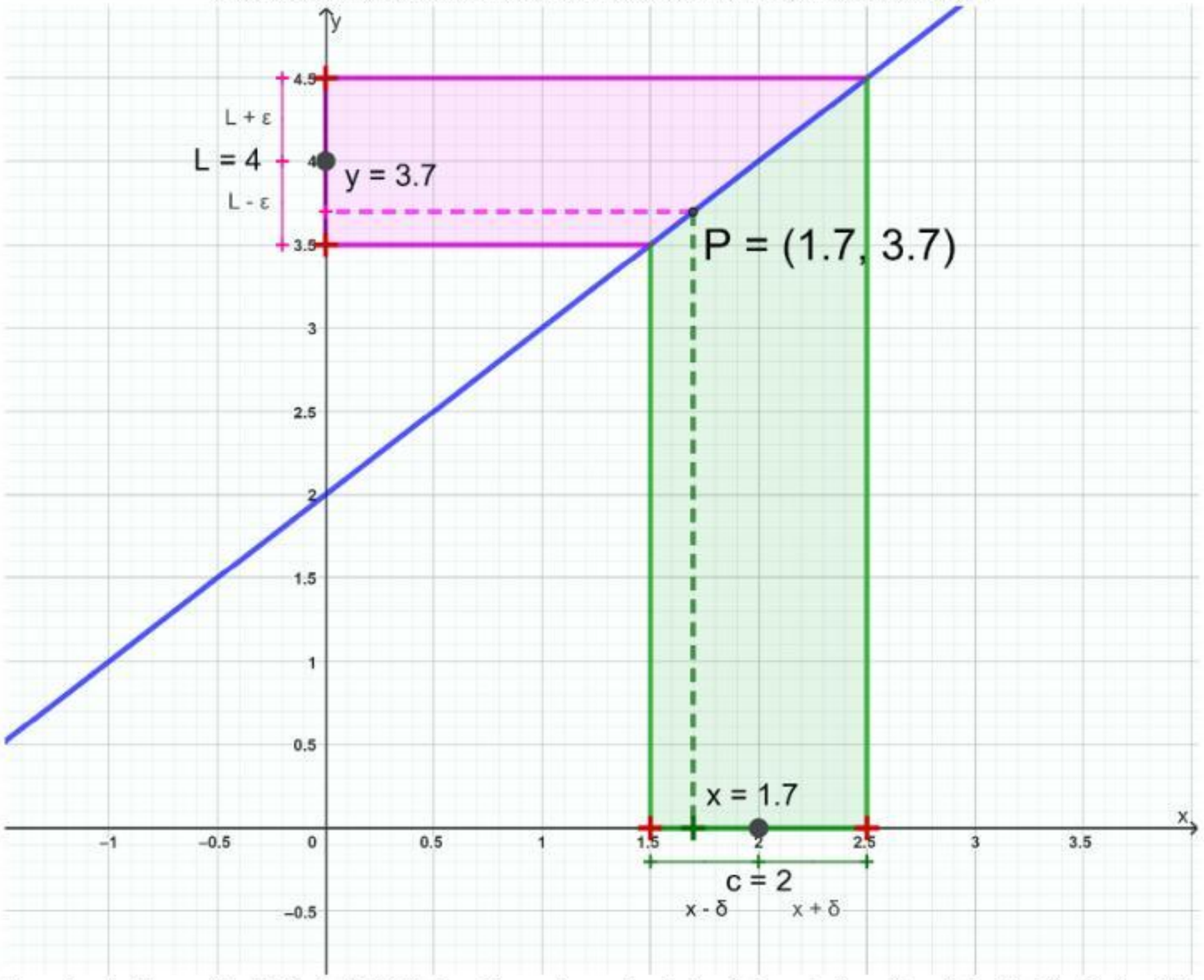
El contenido de este material es responsabilidad de los autores. Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra, sin el consentimiento previo y por escrito del editor. La Universidad Autónoma del Estado de México se deslinda de cualquier acción legal derivada de este material.

® Derechos reservados, 2025

ISBN: (En trámite)

Hecho en México
Made in Mexico

Figura 1.
Interpretación gráfica de la definición épsilon-delta del concepto límite de una función



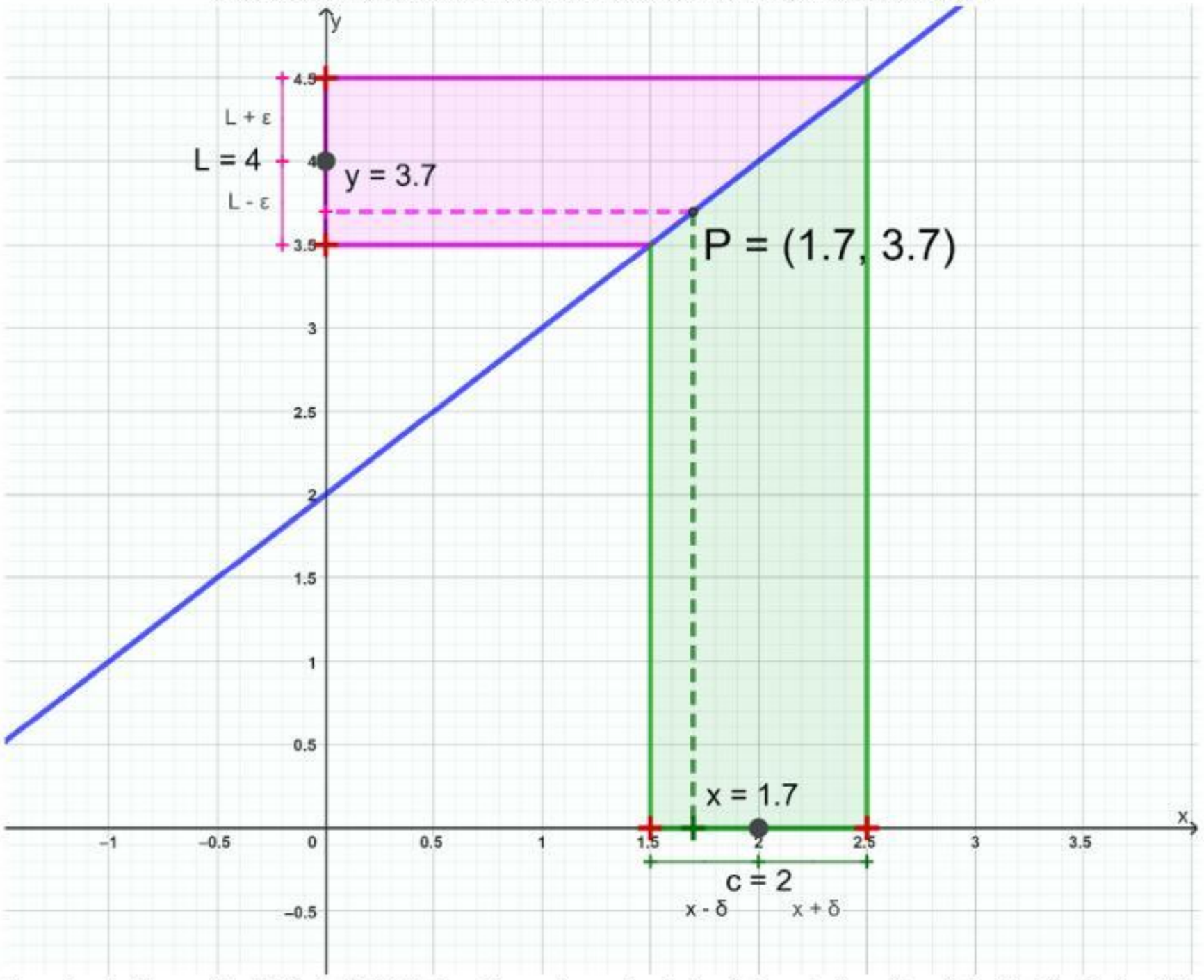
Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Interpretación gráfica de la definición épsilon-delta del concepto límite de una función].

Como pudiste observar en la simulación, para cada valor de y en el intervalo (L - Ɛ, L + Ɛ) siempre resulta de un valor x del intervalo (x - δ, x + δ); sin embargo, en $x = c = 2$ la función **NO** está definida. Al mismo tiempo se puede observar que al acercarse por la izquierda de $x = 2$, el valor de y se aproxima a 4, de igual forma, cuando nos acercamos a $x = 2$ por la derecha, el de y también se aproxima a 4, lo cual refuerza nuestra suposición de que el valor de la función en $x = 2$ debe ser $y = 4$, lo cual se escribe como:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Esta noción intuitiva gráfica de límite también se puede explicar de forma analítica, lo cual estudiaremos en el siguiente apartado.

Figura 1.
Interpretación gráfica de la definición épsilon-delta del concepto límite de una función



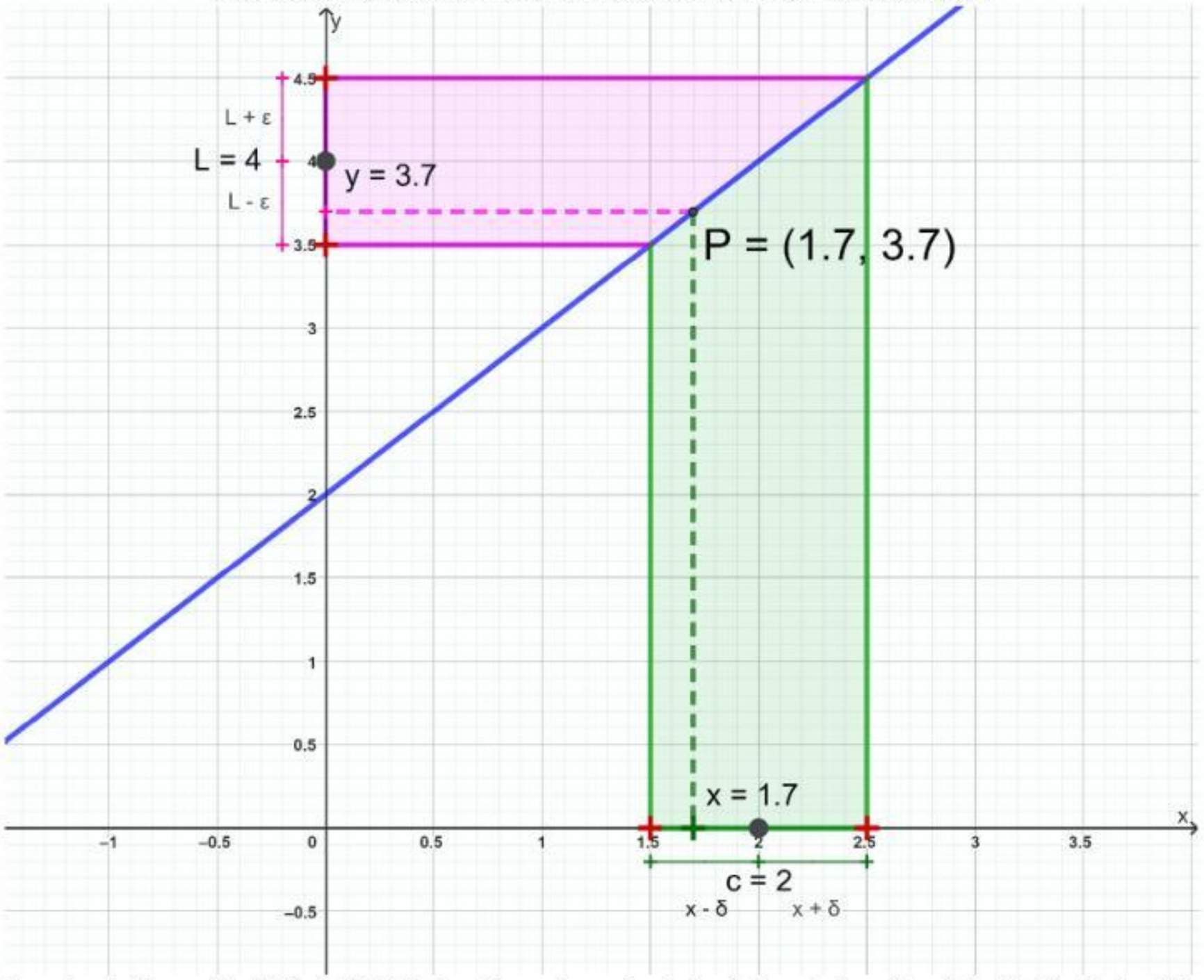
Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Interpretación gráfica de la definición épsilon-delta del concepto límite de una función].

Como pudiste observar en la simulación, para cada valor de y en el intervalo (L - Ɛ, L + Ɛ) siempre resulta de un valor x del intervalo (x - δ, x + δ); sin embargo, en $x = c = 2$ la función **NO** está definida. Al mismo tiempo se puede observar que al acercarse por la izquierda de $x = 2$, el valor de y se aproxima a 4, de igual forma, cuando nos acercamos a $x = 2$ por la derecha, el de y también se aproxima a 4, lo cual refuerza nuestra suposición de que el valor de la función en $x = 2$ debe ser $y = 4$, lo cual se escribe como:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Esta noción intuitiva gráfica de límite también se puede explicar de forma analítica, lo cual estudiaremos en el siguiente apartado.

Figura 1.
Interpretación gráfica de la definición épsilon-delta del concepto límite de una función



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Interpretación gráfica de la definición épsilon-delta del concepto límite de una función].

Como pudiste observar en la simulación, para cada valor de y en el intervalo (L - Ɛ, L + Ɛ) siempre resulta de un valor x del intervalo (x - δ, x + δ); sin embargo, en $x = c = 2$ la función **NO** está definida. Al mismo tiempo se puede observar que al acercarse por la izquierda de $x = 2$, el valor de y se aproxima a 4, de igual forma, cuando nos acercamos a $x = 2$ por la derecha, el de y también se aproxima a 4, lo cual refuerza nuestra suposición de que el valor de la función en $x = 2$ debe ser $y = 4$, lo cual se escribe como:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Esta noción intuitiva gráfica de límite también se puede explicar de forma analítica, lo cual estudiaremos en el siguiente apartado.



Actividad 2. Concepto intuitivo y su interpretación gráfica

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 2. Concepto intuitivo y su interpretación gráfica

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 2. Concepto intuitivo y su interpretación gráfica

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 2. Concepto intuitivo y su interpretación gráfica

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 2. Concepto intuitivo y su interpretación gráfica

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.





Actividad 2. Concepto intuitivo y su interpretación gráfica

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



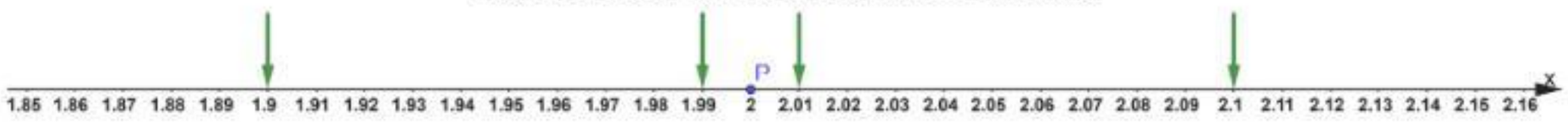
2.1.2 Límites laterales: algebraica y gráficamente

En esta sección se continuará el análisis de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Si tomamos únicamente la recta horizontal del plano cartesiano que corresponde al ***eje x***, y nos acercamos a un valor de interés o estudio, como el número $x = 2$ de la tabla 3, tenemos la siguiente aproximación:

Figura 2.
Valores cercanos a x=2 en el eje x del plano cartesiano.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Valores cercanos a $x = 2$ en el *eje x* del plano cartesiano].

Las flechas verdes muestran algunos valores que presentan un comportamiento periódico al agregar nuevas (flechas izquierdas) o ceros (flechas derechas), estos valores son conocidos como **límites laterales.**

El **límite lateral izquierdo** de una función para un valor dado a es la siguiente:

$$L_I = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

El **límite lateral derecho** de una función para un valor dado a es la siguiente:

$$L_D = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

"Cuando ambos límites laterales existen y tienen igual valor, decimos que el límite de la función en el punto existe y tiene ese mismo valor" (Fernández, s.f.):

1) Los **límites laterales deben existir.**
2) Los **límites laterales deben ser iguales.**

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Mensaje

La Universidad Autónoma del Estado de México, en la búsqueda permanente de garantizar una educación inclusiva, equitativa y de excelencia, se mantiene a la vanguardia en los avances tecnológicos, desarrollando libros electrónicos (E-book), con el propósito de implicarte interactivamente con los contenidos de las asignaturas que integran el plan de estudios del Bachillerato Universitario.

Nuestro objetivo es contribuir a la formación integral de estudiantes con conocimientos rigurosos, valores humanistas y habilidades digitales, utilizando metodologías activas, que desarrollen el pensamiento crítico y analítico, así como la capacidad de afrontar los retos de la era digital.

Los cambios sociales, ambientales y culturales del mundo contemporáneo presentan serios desafíos al proceso educativo; por ello, nuestra Escuela Preparatoria promueve formas de aprendizaje innovadoras, en las que se desarrollan la comunicación asertiva, la creatividad y el trabajo colaborativo. De este modo buscamos garantizar la impartición de una educación capaz de estimular la curiosidad intelectual de los preparatorianos y la exploración de todos los campos del conocimiento, de modo que cada estudiante sea capaz de ampliar sus horizontes culturales, reconociendo sus habilidades, gustos y aptitudes.

El material educativo que tienes en tus manos ha sido elaborado por docentes de las áreas de conocimiento correspondientes. La creatividad, el pensamiento crítico y el espíritu científico de los colectivos docentes se reúnen en un e-book para facilitar la comprensión de los contenidos y comprometerte con tu aprendizaje.

El libro digital que ahora puedes consultar tiene una estructura lógica de fácil manejo, que te permitirá navegar por los contenidos y recursos académicos que responden a tus necesidades; podrás acceder a ellos desde una computadora, una tableta o un teléfono celular.

Te invito a aprovechar al máximo esta nueva experiencia de aprendizaje, disfruta esta herramienta que potenciará tus habilidades digitales, tus conocimientos y tu creatividad.

Patria, Ciencia y Trabajo

Ahora vamos a calcular analíticamente los límites laterales de la función para analizar si existen y, además, si son iguales. Primero verifiquemos qué números están cerca de $x = 2$ por la izquierda y derecha:

Tabla 4.
Valores cercanos a x = 2 en el eje x del plano cartesiano

a^-	1.9	Valores cercanos a $x = 2$ por la izquierda
	1.99	
	1.999	
	1.9999	
	$x = 2$	
a^+	2.0001	Valores cercanos a $x = 2$ por la derecha
	2.001	
	2.01	
	2.1	

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia. [Valores cercanos a *x* = 2 en el *eje x* del plano cartesiano].

Ahora se sustituyen esos valores en la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$f(1.9) = \frac{(1.9)^2 - 4}{(1.9) - 2} = \frac{-0.39}{-0.1} = 3.9$$

$$f(1.99) = \frac{(1.99)^2 - 4}{(1.99) - 2} = \frac{-0.0399}{-0.01} = 3.99$$

$$f(1.999) = \frac{(1.999)^2 - 4}{(1.999) - 2} = \frac{-0.003999}{-0.001} = 3.999$$

$$f(1.9999) = \frac{(1.9999)^2 - 4}{(1.9999) - 2} = \frac{-0.00039999}{-0.0001} = 3.9999$$

$$f(2) = \frac{(2)^2 - 4}{(2) - 2} = \frac{0}{0} = \textit{NO DEFINIDO}$$

$$f(2.0001) = \frac{(2.0001)^2 - 4}{(2.0001) - 2} = \frac{0.00040001}{0.0001} = 4.0001$$

$$f(2.001) = \frac{(2.001)^2 - 4}{(2.001) - 2} = \frac{0.004001}{0.001} = 4.001$$

$$f(2.01) = \frac{(2.01)^2 - 4}{(2.01) - 2} = \frac{0.040001}{0.01} = 4.01$$

$$f(2.1) = \frac{(2.1)^2 - 4}{(2.1) - 2} = \frac{0.41}{0.1} = 4.1$$

De los datos anteriores, pueden observar que conforme nos acercamos a $x = 2$ por la izquierda, el valor de la función se acerca más a $y = 4$. El mismo caso ocurre cuando nos acercamos por la derecha.

Por lo tanto, los **límites laterales de la función** son:

$$L_I = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

$$L_D = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

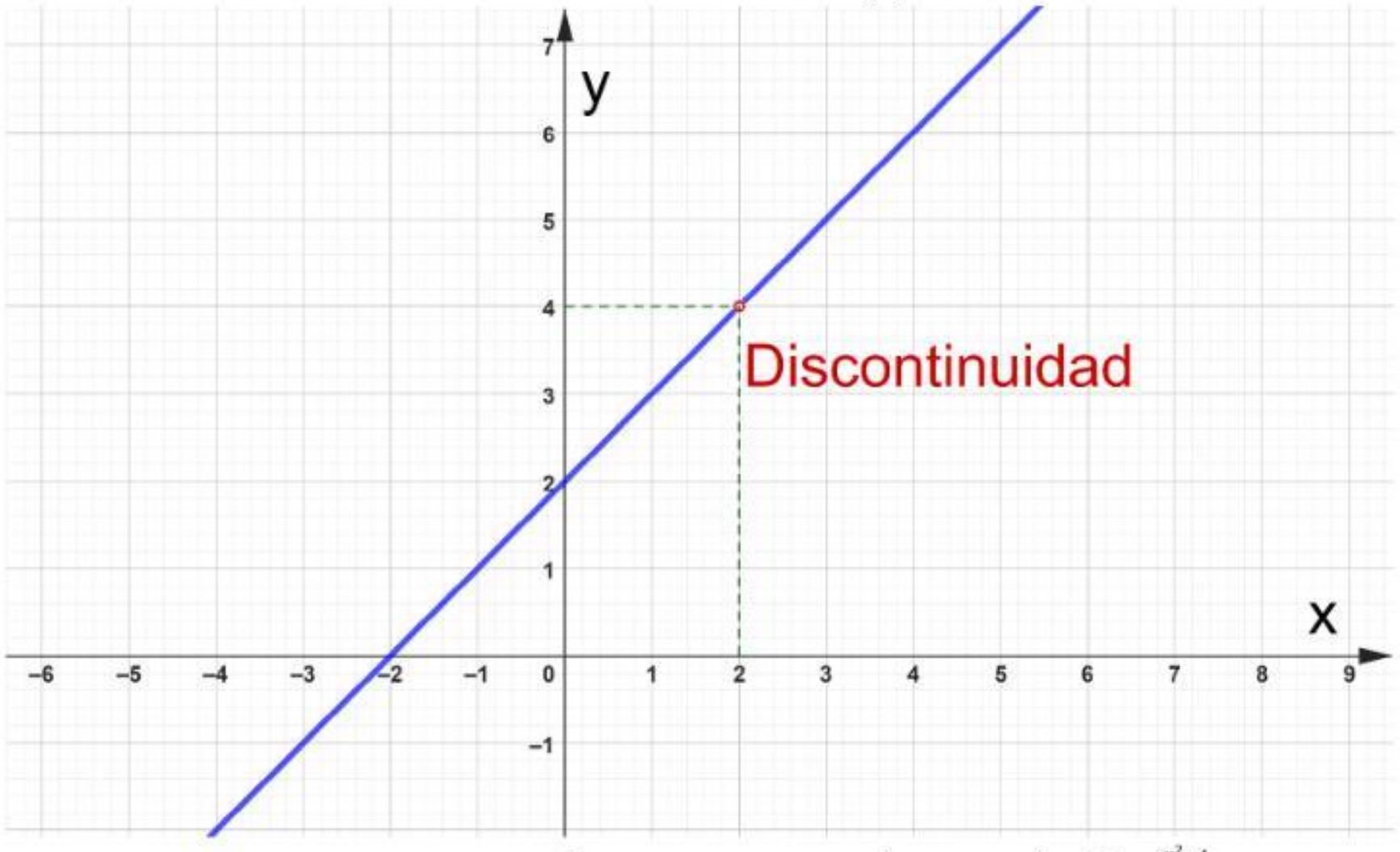
En conclusión, el valor del límite de $f(x)$ en $x = 2$ sí es 4, matemáticamente escrito de la siguiente forma:

$$L = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Es importante no confundir el concepto de límite con el valor de *y* de la función, ya que la gráfica en realidad NO pasa por (2, 4), pero brinda una muy buena aproximación para comprender cómo se comporta la función en la periferia de ese punto; en otras palabras, la gráfica de la función se asemeja mucho a una recta con la única excepción de que NO pasa por ese punto; por ende, es discontinua, y el punto (2, 4) es un punto de discontinuidad. El concepto y los tipos de discontinuidad serán estudiados más adelante.

Con toda la información recabada hasta el momento, la gráfica de la función se representa de la siguiente forma:

Figura 3.
Gráfica de la función f (x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$]

Con la finalidad de practicar lo aprendido hasta ahora sobre límites laterales, calculemos los límites laterales de las siguientes funciones algebraicas:

1) $f(x) = \frac{4}{x+3}$ con $\boldsymbol{x}$ = -3 (función algebraica racional)

	x	*y*	
a^-	-3.1	-40	El límite lateral izquierdo existe, porque para cada valor de $\boldsymbol{x}$ se puede obtener un valor con la función.
	-3.01	-400	
	-3.001	-4000	Al aproximarse por la izquierda, estos valores tienden al infinito negativo.
	-3.0001	-40000	
	-3	NO definido	
a^+	-2.9999	40000	El límite lateral derecho existe, porque para cada valor de $\boldsymbol{x}$ se puede obtener un valor con la función.
	-2.999	4000	
	-2.99	400	Al aproximarse por la derecha, estos valores tienden al infinito positivo.
	-2.9	40	

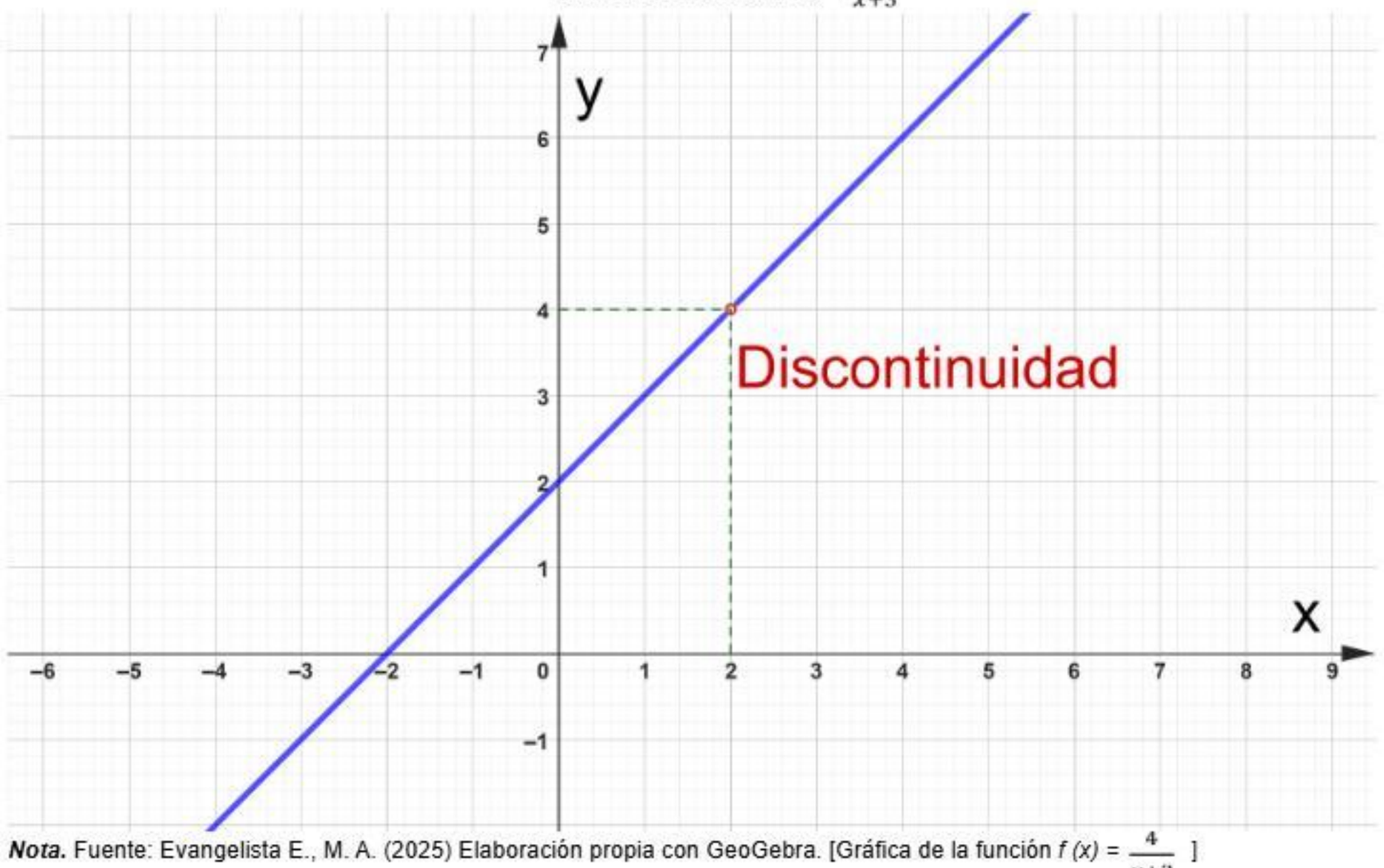
En este caso, **los límites laterales existen, pero NO son iguales**, por lo tanto, el límite de la función en $\boldsymbol{x}$ = -3 NO existe, es decir:

$$L_I = \lim_{x\to -3^-} \frac{4}{x+3} = -\infty \ \wedge \ L_D = \lim_{x\to -3^+} \frac{4}{x+3} = +\infty \ \therefore \ L = \lim_{x\to -3} \frac{4}{x+3} = \nexists$$

La función $f(x) = \frac{4}{x+3}$ es discontinua en *x* = -3, ya que, al acercarnos a ese valor de *x*, los valores de *y* se disparan uno al infinito positivo y otro al negativo, estos valores se aproximan a una línea llamada asíntota.

Gráficamente se tiene la siguiente figura:

Figura 4.
Gráfica de la función f (x) = $\frac{4}{x+3}$



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de la función *f (x)* = $\frac{4}{x+3}$]

2) $f(x) = \sqrt{x-1}$ con $x = 1$ (función algebraica irracional)

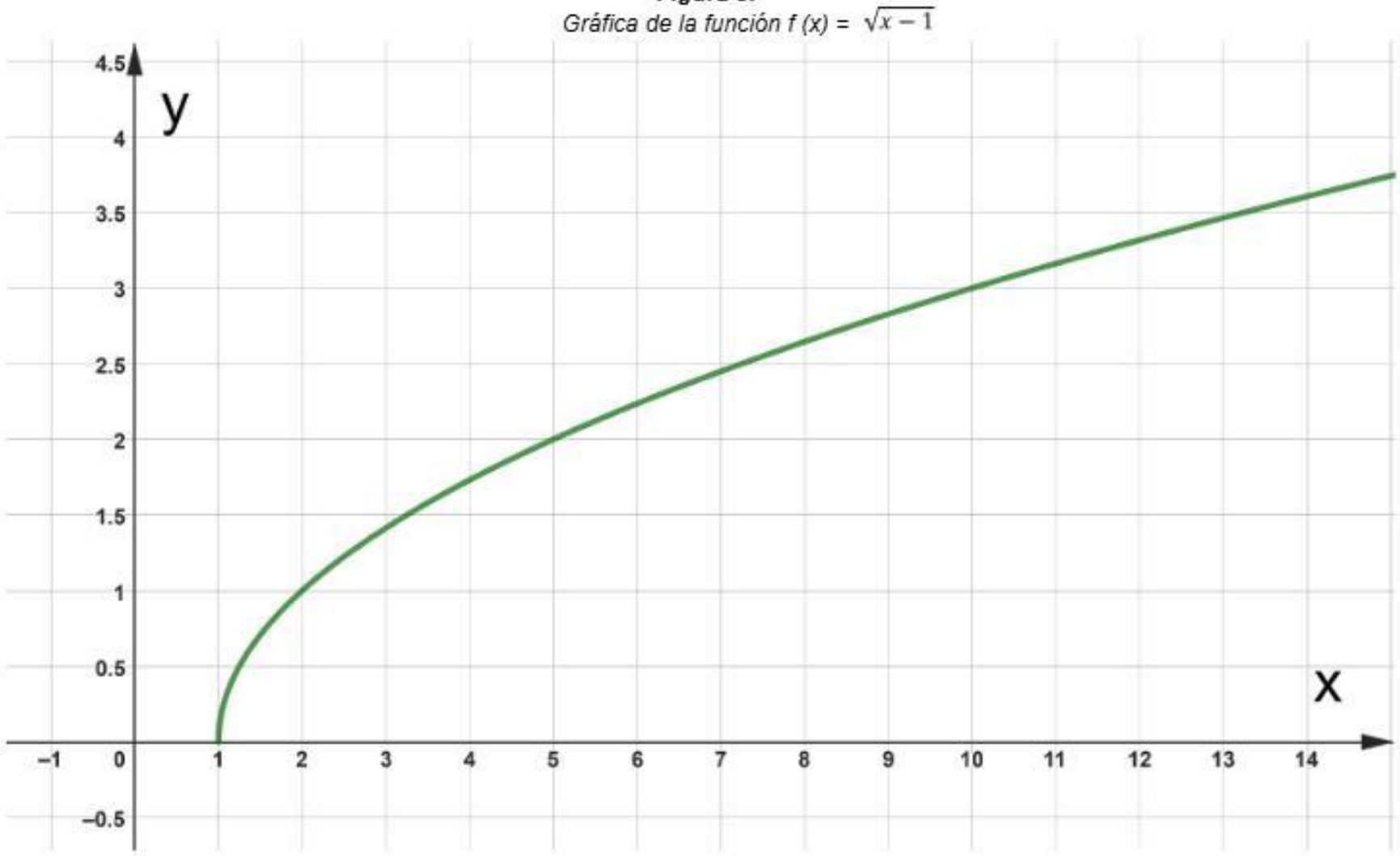
	x	*y*	
a^-	0.9	Error	El límite lateral izquierdo NO existe, porque para cada valor de x se presenta la raíz cuadrada de un número negativo.
	0.99	Error	
	0.999	Error	
	0.9999	Error	
	1		Este valor no se calcula, aunque es posible, con la finalidad de analizar los límites laterales.
a^+	1.0001	0.010	El límite lateral derecho existe, porque para cada valor de x se puede obtener un valor con la función.
	1.001	0.032	
	1.01	0.100	
	1.1	0.316	Al aproximarse por la derecha, estos valores tienden a 0.

En este caso, **el límite lateral derecho existe, pero el límite lateral izquierdo NO**; por lo tanto, el límite de la función en $x = 1$ NO existe, es decir:

$$L_I = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{x-1} = \nexists \ \wedge \ L_D = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0 \ \therefore \ L = \lim_{x \to 1} \sqrt{x-1} = \nexists$$

Gráficamente se tiene la siguiente figura:

Figura 5.
Gráfica de la función f (x) = $\sqrt{x-1}$



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de la función *f (x)* = $\sqrt{x-1}$]

Existen funciones que requieren ser representadas por varias reglas de correspondencia, estas conocidas como **funciones a trozos** y gráficamente generan varias secciones, por ejemplo, la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -2 \\ x^2 - 2 & x \geq -2 \end{cases}$$

Esta notación quiere decir que se empleará la regla de correspondencia $x + 3$ para todos los **valores de x menores que 2 (limite lateral izquierdo para $x = 2$)**, dado que es un intervalo abierto en 2, no se puede emplear 2 para esta función. Por otra parte, para todos los **valores de x mayores o iguales a 2 (limite lateral derecho para $x = 2$)**, se emplea la regla de correspondencia $x^2 - 2$.

3) $f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -2 \\ x^2 - 2 & x \geq -2 \end{cases}$ con x = -2 (función a trozos)

	x	y	
a^-	-2.1	0.9	El límite lateral izquierdo existe, porque para cada valor de x se puede obtener un valor con la función.
	-2.01	0.99	
	-2.001	0.999	Al aproximarse por la izquierda, estos valores tienden a 1.
	-2.0001	0.9999	
	-2		Este valor no se calcula, aunque es posible, con la finalidad de analizar los límites laterales.
a^+	-1.9999	1.99960001	El límite lateral derecho existe, porque para cada valor de x se puede obtener un valor con la función.
	-1.999	1.996001	
	-1.99	1.9601	Al aproximarse por la derecha, estos valores tienden a 2.
	-1.9	1.61	

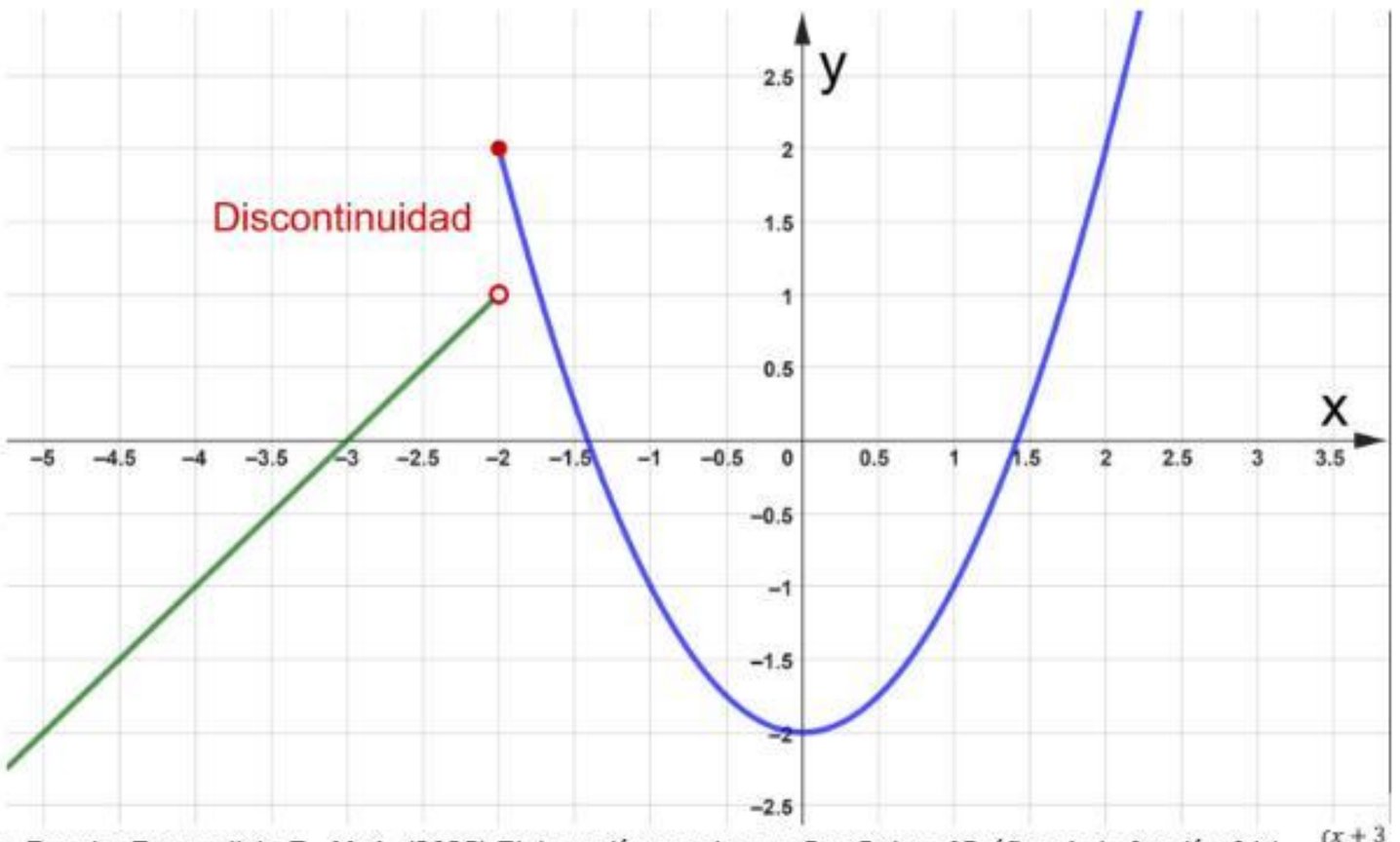
En este caso, **los límites laterales existen, pero NO son iguales**, por lo tanto, el límite de la función en x = -2 NO existe, es decir:

$$L_I = \lim_{x \to -2^-} (x+3) = 1 \quad \wedge \quad L_D = \lim_{x \to -2^+} (x^2 - 2) = 2 \quad \therefore \quad L = \lim_{x \to -2} f(x) = \nexists$$

La función $f(x)$ es discontinua en x = -2, ya que, al acercarnos a ese valor de x, los valores de y se aproximan a valores diferentes.

Gráficamente se tiene la siguiente figura:

Figura 6.
Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -2 \\ x^2 - 2 & x \geq -2 \end{cases}$



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -2 \\ x^2 - 2 & x \geq -2 \end{cases}$]

4) $f(x)=\begin{cases} x^3-x+1 & x\leq 1 \\ 2-x^2 & x>1 \end{cases}$ con $x = 1$ (función a trozos)

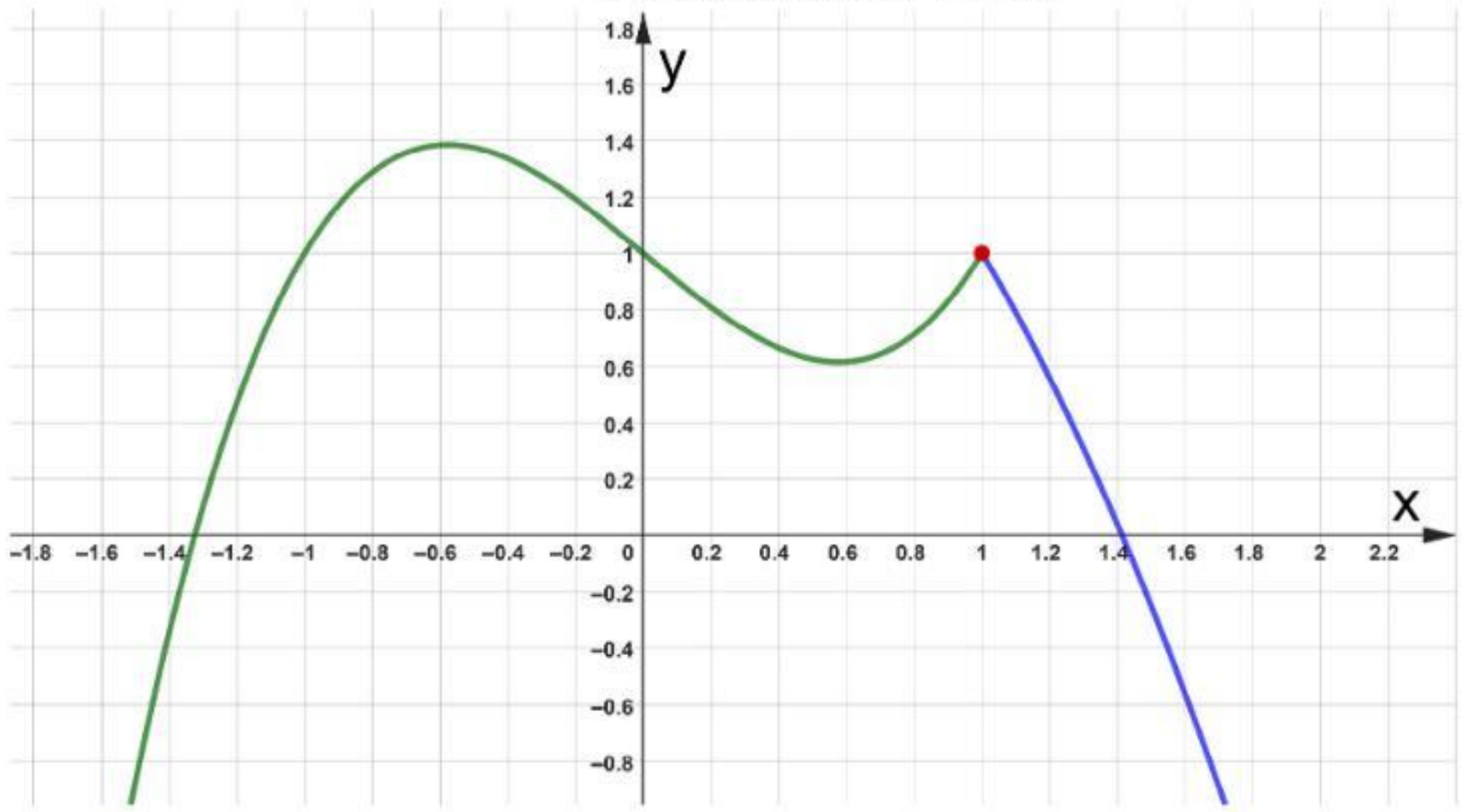
x	y	
0.9	0.829	a^-: El límite lateral izquierdo existe, porque para cada valor de x se puede obtener un valor con la función. Al aproximarse por la izquierda, estos valores tienden a 1.
0.99	0.980	
0.999	0.998	
0.9999	0.999	
1		Este valor no se calcula, aunque es posible, con la finalidad de analizar los límites laterales.
-1.9999	1.0002	a^+: El límite lateral derecho existe, porque para cada valor de x se puede obtener un valor con la función. Al aproximarse por la derecha, estos valores tienden a 1.
-1.999	1.0020	
-1.99	1.0203	
-1.9	1.2310	

En este caso, **los límites laterales existen y son iguales**; por lo tanto, el límite de la función en $x = -2$ es 1, es decir:

$$L_I = \lim_{x\to 1^-}(x^3 - x + 1) = 1 \ \wedge \ L_D = \lim_{x\to 1^+}(2 - x^2) = 1 \ \therefore \ L = \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

Gráficamente se tiene la siguiente figura:

Figura 7.
Gráfica de la función f (x) = $\begin{cases} x^3-x+1 & x\leq 1 \\ 2-x^2 & x>1 \end{cases}$

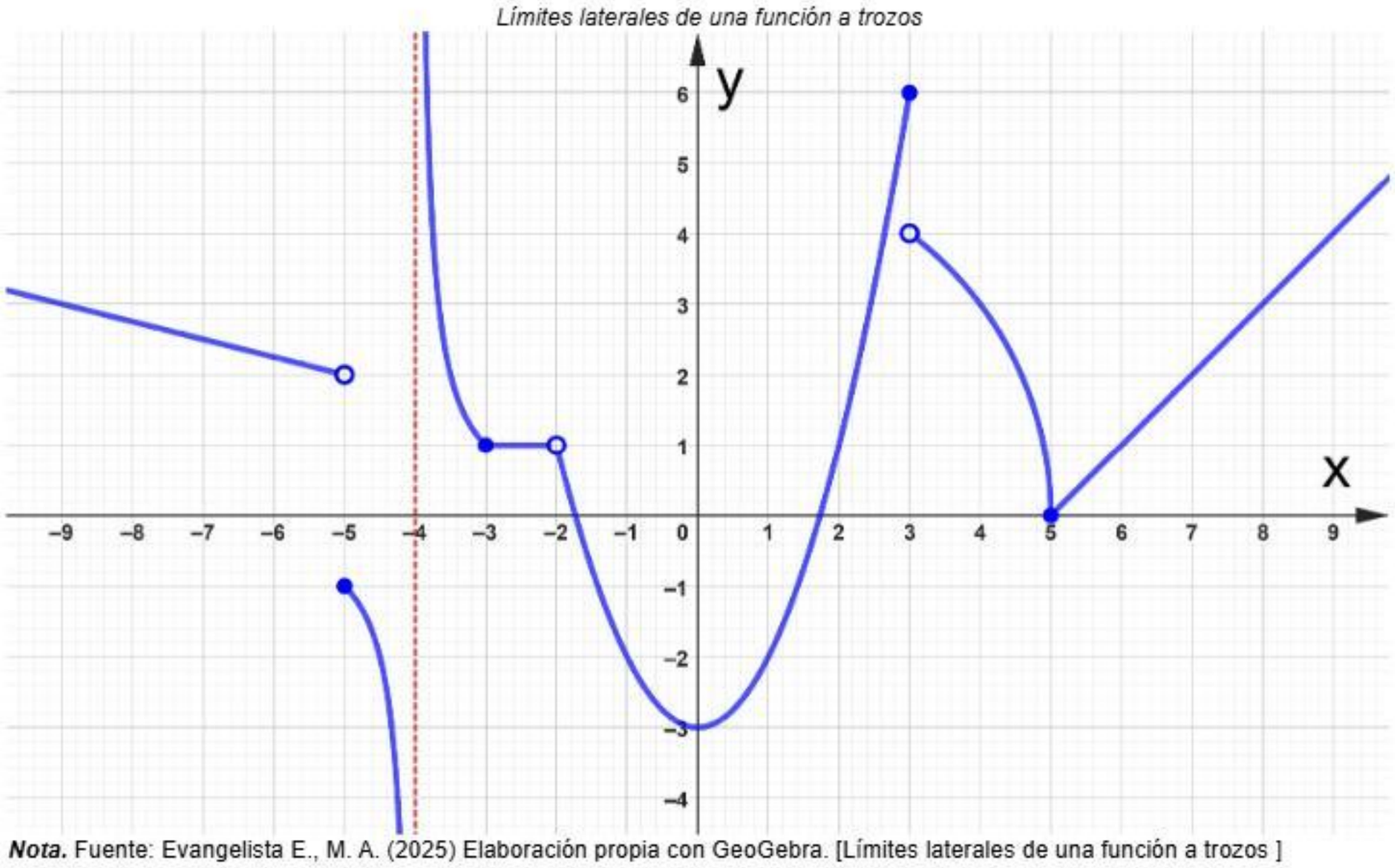


Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de la función *f (x)* = $\begin{cases} x^3-x+1 & x\leq 1 \\ 2-x^2 & x>1 \end{cases}$]

El límite de una función no siempre representa una discontinuidad o una eventualidad en la gráfica de la función, de hecho, para muchas funciones la mayoría de los valores (y por ende sus respectivos límites) de $f(x)$ se obtienen simplemente sustituyendo el valor de x en la función correspondiente. Los casos en los que se ha prestado mayor atención en los ejemplos anteriores son cuando se presentan estas inconsistencias o indeterminaciones.

En resumen, aplica lo aprendido y analiza el siguiente ejemplo para que identifiques cuándo y en qué condiciones existe o no un límite:

Figura 8.
Límites laterales de una función a trozos



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Límites laterales de una función a trozos]

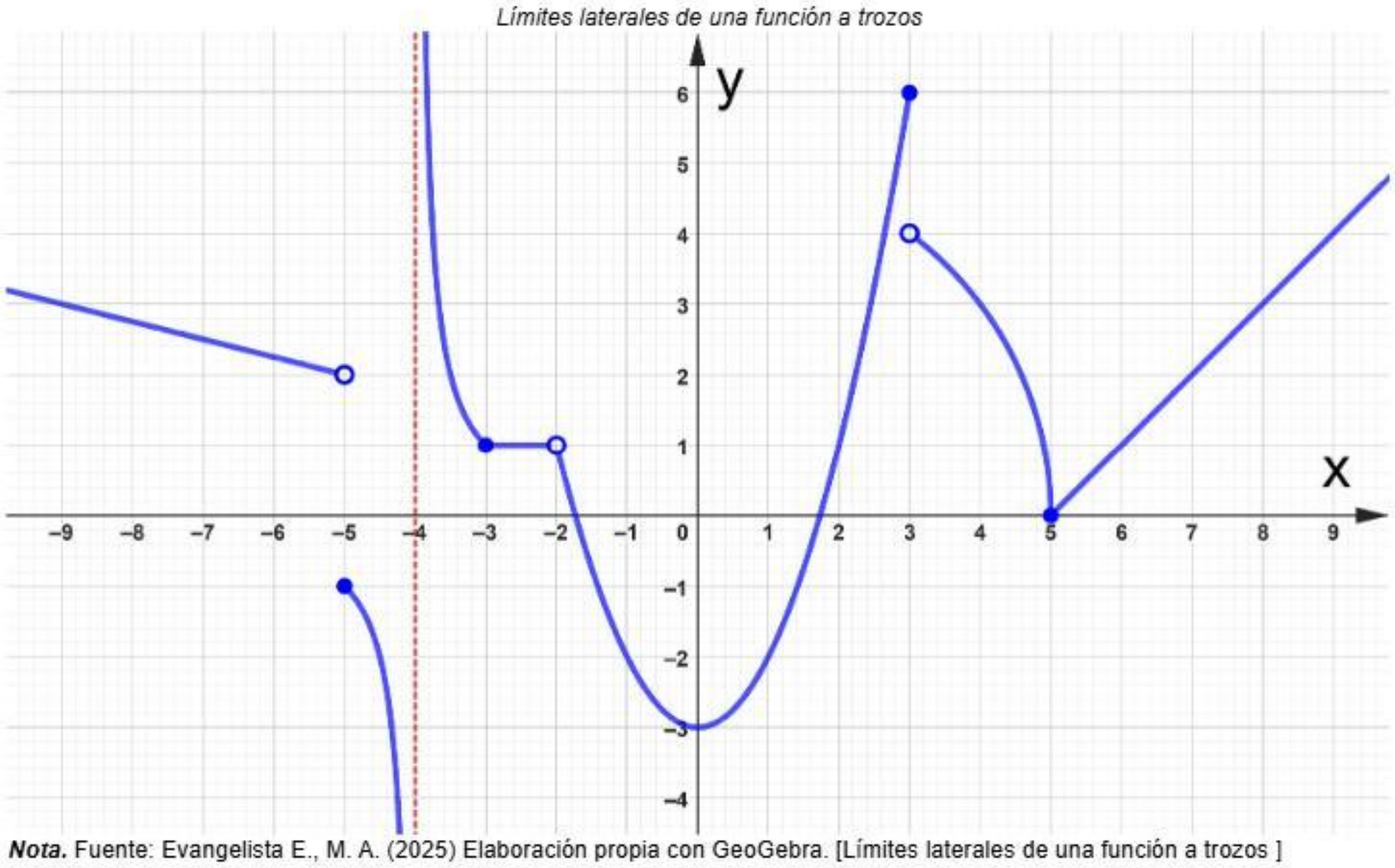
En la imagen anterior se tienen los siguientes límites:

Valor de x	Límite lateral izquierdo	Límite lateral derecho	Límite
$x = -5$	$\lim_{x\to -5^-} f(x) = 2$	$\lim_{x\to -5^+} f(x) = -1$	$\lim_{x\to -5} f(x) = \nexists$
$x = -4$	$\lim_{x\to -4^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to -4} f(x) = \nexists$
$x = -3$	$\lim_{x\to -3^-} f(x) = 1$	$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$	$\lim_{x\to -3} f(x) = 1$
$x = -2$	$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 1$	$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 1$	$\lim_{x\to -2} f(x) = 1$
$x = 0$	$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -3$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -3$	$\lim_{x\to 0} f(x) = -3$
$x = 3$	$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 6$	$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$	$\lim_{x\to 3} f(x) = \nexists$
$x = 5$	$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 0$	$\lim_{x\to 5^+} f(x) = 0$	$\lim_{x\to 5} f(x) = 0$
$x = 7$	$\lim_{x\to 7^-} f(x) = 2$	$\lim_{x\to 7^+} f(x) = 2$	$\lim_{x\to 7} f(x) = 2$

El límite de una función no siempre representa una discontinuidad o una eventualidad en la gráfica de la función, de hecho, para muchas funciones la mayoría de los valores (y por ende sus respectivos límites) de $f(x)$ se obtienen simplemente sustituyendo el valor de x en la función correspondiente. Los casos en los que se ha prestado mayor atención en los ejemplos anteriores son cuando se presentan estas inconsistencias o indeterminaciones.

En resumen, aplica lo aprendido y analiza el siguiente ejemplo para que identifiques cuándo y en qué condiciones existe o no un límite:

Figura 8.
Límites laterales de una función a trozos



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Límites laterales de una función a trozos]

En la imagen anterior se tienen los siguientes límites:

Valor de x	Límite lateral izquierdo	Límite lateral derecho	Límite
$x = -5$	$\lim_{x\to -5^-} f(x) = 2$	$\lim_{x\to -5^+} f(x) = -1$	$\lim_{x\to -5} f(x) = \nexists$
$x = -4$	$\lim_{x\to -4^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to -4} f(x) = \nexists$
$x = -3$	$\lim_{x\to -3^-} f(x) = 1$	$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$	$\lim_{x\to -3} f(x) = 1$
$x = -2$	$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 1$	$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 1$	$\lim_{x\to -2} f(x) = 1$
$x = 0$	$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -3$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -3$	$\lim_{x\to 0} f(x) = -3$
$x = 3$	$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 6$	$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$	$\lim_{x\to 3} f(x) = \nexists$
$x = 5$	$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 0$	$\lim_{x\to 5^+} f(x) = 0$	$\lim_{x\to 5} f(x) = 0$
$x = 7$	$\lim_{x\to 7^-} f(x) = 2$	$\lim_{x\to 7^+} f(x) = 2$	$\lim_{x\to 7} f(x) = 2$

Los límites laterales son bastante útiles para analizar el comportamiento de una función en valores que presentan ambigüedades como los mostrados en la Tabla 2 (divisiones y raíces) o en los casos de funciones a trozos; no obstante, existen teoremas que se pueden aplicar para que el cálculo del límite sea tan simple como una sustitución, ya que el valor del límite se obtiene de forma inmediata, a continuación, se describirán algunos teoremas que se pueden aplicar para el cálculo de límites. Los límites laterales continuarán siendo útiles y se aplicarán en los casos en los que los límites por teoremas NO estén definidos.



Actividad 3. Límites laterales: algebraica y gráficamente

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



Introducción

Estudiar el cálculo diferencial a nivel bachillerato tiene una enorme importancia en virtud de que permite comprender con mayor precisión diversos tipos de fenómenos; desde conceptos físicos como el movimiento o la velocidad, hasta abstracciones como los son las curvas irregulares tanto para el cálculo de su área como el comportamiento de rectas tangentes a ellas, siendo estos apenas unos pequeños esbozos de sus alcances.

Desde los tiempos de los antiguos griegos estos problemas se presentaban ya como retos a resolver, aún con el surgimiento de poderosas herramientas algebraicas y la nueva geometría analítica las respuestas a estas interrogantes distaban de tener una solución.

Por esta razón iniciaremos esta aventura partiendo desde los orígenes del cálculo, recorriendo los principales aportes de varios autores hasta los conceptos más avanzados, lo cual nos llevará al entendimiento de varios fenómenos naturales al lado de la matemática, la física y otras ciencias.

El cálculo diferencial se apoya de la comprensión de las funciones, sus gráficas y las operaciones que podemos realizar con ellas, como lo son la suma, la resta, la multiplicación y la división; ya que estas se convierten en una herramienta para comprender y modelar el cambio, estableciendo una relación entre las funciones matemáticas y los fenómenos en los contextos mencionados, sin olvidar que se introducen nociones de términos que en su momento marcaron un paradigma de la aplicación de las matemáticas, los llamados infinitésimos y los infinitos.

Una vez iniciadas las operaciones con funciones veremos que ello nos lleva a la compresión de conceptos como continuidad y discontinuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidad y puntos de inflexión; los cuales estudiaremos inicialmente de forma intuitiva para guiarte en este aprendizaje práctico y dinámico para posteriormente abarcarlos de forma analítica, con la finalidad de que adquieras las herramientas matemáticas necesarias para comprender conceptos importantes del cálculo diferencial como son los límites y las derivadas, para que puedas comprobar cómo están relacionados con las definiciones anteriores.

Con todo lo descrito, el cálculo diferencial muestra ser una disciplina matemática que tiene muchos elementos que se interrelacionan entre sí, esto debido a que tiene una larga historia dentro de la humanidad, lo cual podrás verificar tomado de la mano de las progresiones y de las asignaturas que llevarás en el mismo semestre, por lo que te ayuda a desarrollar el pensamiento lógico, la capacidad de analizar e interpretar datos y solucionar problemas.

2.2 Teoremas para calcular el límite de una función

2.2.1 Límite de funciones algebraicas

La siguiente tabla muestra algunos teoremas para el cálculo del límite de funciones algebraicas (Contreras et al., 2015):

1)	$\lim_{x\to a} k = k$	donde k es un número real (una constante)
2)	$\lim_{x\to a} x = a$	
3)	$\lim_{x\to a} kx = ka$	donde k es un número real (una constante)
4)	$\lim_{x\to a} x^n = a^n$	
5)	$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$	donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales
6)	$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$	
7)	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$	donde $g(x) \neq 0$
8)	$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$	

Aplicaremos estos teoremas con algunos ejemplos:

1) $\lim_{x\to -2} x =$

aplicando el teorema 2

$$\lim_{x\to -2} x = -2$$

$$\lim_{x\to -2} x = -2$$

2) $\lim_{x\to 3} 5x =$

aplicando el teorema 3

$$\lim_{x\to 3} 5x = 5(3)$$

$$= 15$$

$$\lim_{x\to 3} 5x = 15$$

3) $\lim_{x\to -1} 4x^3 =$

aplicando el teorema 6

$$\lim_{x\to -1} 4x^3 = \lim_{x\to -1} 4 \cdot \lim_{x\to -1} x^3$$

aplicando los teoremas 1 y 4

$$= 4\cdot(-1)^3$$

$$= 4\cdot(-1)$$

$$= -4$$

$$\lim_{x\to -1} 4x^3 = -4$$

4) $\lim_{x\to -4}\left(\frac{5x-2}{x+3}\right) =$

aplicando el teorema 7

$$\lim_{x\to -4}\left(\frac{5x+2}{x+3}\right) = \frac{\lim_{x\to -4}(5x-2)}{\lim_{x\to -4}(x+3)}$$

aplicando el teorema 5

$$= \frac{\lim_{x\to -4} 5x - \lim_{x\to -4} 2}{\lim_{x\to -4} x + \lim_{x\to -4} 3}$$

aplicando los teoremas 1, 2 y 3

$$= \frac{5(-4)-2}{-4+3}$$

$$= \frac{-20-2}{-4+3}$$

$$= \frac{-22}{-1}$$

$$= 22$$

$$\lim_{x\to -4}\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = 22$$

5) $\lim_{x\to 0}(7x-3)^3 =$

aplicando el teorema 8

$$\lim_{x\to 0}(7x+3)^3 = \left[\lim_{x\to 0}(7x-3)\right]^3$$

aplicando el teorema 5

$$= \left[\lim_{x\to 0} 7x - \lim_{x\to 0} 3\right]^3$$

aplicando los teoremas 1 y 3

$$= [7(0) - 3]^3$$

$$= [0 - 3]^3$$

$$= [-3]^3$$

$$= -27$$

$$\lim_{x\to 0}(7x - 3)^3 = -27$$

Como pudiste analizar en los ejemplos planteados, los teoremas permiten separar a los elementos de las expresiones algebraicas y calcular límites de elementos individuales; por practicidad, muchas ocasiones obviamos la escritura de los teoremas y los aplicamos de forma inmediata, por ejemplo:

6) $\lim_{x\to -1}(2x^2 + 6x - 3) =$

$$\lim_{x\to -1}(2x^2 + 6x - 3) = 2(-1)^2 + 6(-1) - 3$$

$$= 2(1) + 6(-1) - 3$$

$$= 2 - 6 - 3$$

$$= -7$$

$$\lim_{x\to -1}(2x^2 + 6x - 3) = -7$$

7) $\lim_{x\to 5}\left(\frac{2x+10}{15-x}\right)^4 =$

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{2x + 10}{15 - x}\right)^2 = \left(\frac{2(5) + 10}{15 - (5)}\right)^4$$

$$= \left(\frac{10 + 10}{15 - 5}\right)^4$$

$$= \left(\frac{20}{10}\right)^4$$

$$= (2)^4$$

$$= 16$$

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{2x+10}{15-x}\right)^4 = 16$$

8) $\lim_{x\to -3}\frac{4x^2-7x+8}{x^3-18} =$

$$\lim_{x\to -3}\frac{4x^2-7x+8}{x^3-18} = \frac{4(-3)^2-7(-3)+8}{(-3)^3-18}$$

$$= \frac{4(9)-7(-3)+8}{-27-18}$$

$$= \frac{36+21+8}{-45}$$

$$= \frac{65}{-45}$$

$$= -\frac{13}{9}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{4x^2-7x+8}{x^3-18} = -\frac{13}{9}$$

9) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2} =$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2} = = \frac{(-2)^3+8}{-2+2}$$

$$= \frac{-8+8}{-2+2}$$

$$= \frac{0}{0} \qquad esto\ es\ indeterminado$$

En este caso, el resultado es indeterminado; resuelve este límite por límites laterales con la finalidad de que verifiques si existe o no y, en caso de existir, cuál es su valor.

10) $\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x-3} =$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x-3} = \frac{3+4}{3-3}$$

$$= \frac{7}{0} \qquad esto\ es\ indeterminado$$

En este caso el resultado es indeterminado; resuelve este límite por límites laterales con la finalidad de que verifiques si existe o no y, en caso de existir, cuál es su valor.

Actividad 4. Límite de funciones algebraicas

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



2.2.2 Límite de funciones cuando la variable

Para analizar el límite de funciones cuando la variable , tomaremos a ∞ como un número real muy grande; para ello estudiaremos varios casos; empecemos por el más básico:

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Y así, podríamos tener diferentes tipos de ejercicios:

$$\lim_{x\to\infty} 5x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 2x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x - 3 = \infty$$



Actividad 4. Límite de funciones algebraicas

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



2.2.2 Límite de funciones cuando la variable

Para analizar el límite de funciones cuando la variable , tomaremos a ∞ como un número real muy grande; para ello estudiaremos varios casos; empecemos por el más básico:

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Y así, podríamos tener diferentes tipos de ejercicios:

$$\lim_{x\to\infty} 5x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 2x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x - 3 = \infty$$



Actividad 4. Límite de funciones algebraicas

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



2.2.2 Límite de funciones cuando la variable

Para analizar el límite de funciones cuando la variable , tomaremos a ∞ como un número real muy grande; para ello estudiaremos varios casos; empecemos por el más básico:

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Y así, podríamos tener diferentes tipos de ejercicios:

$$\lim_{x\to\infty} 5x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 2x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x - 3 = \infty$$



Actividad 4. Límite de funciones algebraicas

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



2.2.2 Límite de funciones cuando la variable

Para analizar el límite de funciones cuando la variable , tomaremos a ∞ como un número real muy grande; para ello estudiaremos varios casos; empecemos por el más básico:

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Y así, podríamos tener diferentes tipos de ejercicios:

$$\lim_{x\to\infty} 5x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 2x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x - 3 = \infty$$



Actividad 4. Límite de funciones algebraicas

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



2.2.2 Límite de funciones cuando la variable

Para analizar el límite de funciones cuando la variable , tomaremos a ∞ como un número real muy grande; para ello estudiaremos varios casos; empecemos por el más básico:

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Y así, podríamos tener diferentes tipos de ejercicios:

$$\lim_{x\to\infty} 5x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 2x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x - 3 = \infty$$



Actividad 4. Límite de funciones algebraicas

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



2.2.2 Límite de funciones cuando la variable

Para analizar el límite de funciones cuando la variable , tomaremos a ∞ como un número real muy grande; para ello estudiaremos varios casos; empecemos por el más básico:

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Y así, podríamos tener diferentes tipos de ejercicios:

$$\lim_{x\to\infty} 5x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 2x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x - 3 = \infty$$



Módulo I

Nociones del cálculo diferencial

Propósito del Módulo

Conocer los antecedentes del cálculo diferencial a través de personajes históricos, así como sus aportaciones para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a interpretar gráficamente las características de una función polinomial.

Pero recordemos que podemos tener infinito positivo ∞ e infinito negativo − ∞, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} -7x = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

Ahora analicemos un ejercicio racional:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Vemos que nuestro resultado es muy diferente a los anteriores, porque ahora tenemos un solo objeto que vamos a dividir entre un número muy grande, cuando hagamos esa división les tocará una parte muy pequeñita a cada uno de esos números, donde esa pequeña parte se puede ir haciendo nada, es decir cero, no les toca nada; esto quiere decir que la función se acerca cada vez más al cero.

Entonces cada vez que dividamos cualquier número entre el infinito, nuestro resultado siempre será cero.

Para ello se utiliza el siguiente teorema:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \; para \; k \in \mathbb{R} \; y \; n \in N$$

Para calcular el límite de una función en la cual $x \to \infty$, se **divide cada término** de la función entre la **variable con mayor exponente del denominador.**

Pero recordemos que podemos tener infinito positivo ∞ e infinito negativo − ∞, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} -7x = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

Ahora analicemos un ejercicio racional:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Vemos que nuestro resultado es muy diferente a los anteriores, porque ahora tenemos un solo objeto que vamos a dividir entre un número muy grande, cuando hagamos esa división les tocará una parte muy pequeñita a cada uno de esos números, donde esa pequeña parte se puede ir haciendo nada, es decir cero, no les toca nada; esto quiere decir que la función se acerca cada vez más al cero.

Entonces cada vez que dividamos cualquier número entre el infinito, nuestro resultado siempre será cero.

Para ello se utiliza el siguiente teorema:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \; para \; k \in \mathbb{R} \; y \; n \in N$$

Para calcular el límite de una función en la cual $x \to \infty$, se **divide cada término** de la función entre la **variable con mayor exponente del denominador.**

Pero recordemos que podemos tener infinito positivo ∞ e infinito negativo − ∞, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} -7x = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

Ahora analicemos un ejercicio racional:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Vemos que nuestro resultado es muy diferente a los anteriores, porque ahora tenemos un solo objeto que vamos a dividir entre un número muy grande, cuando hagamos esa división les tocará una parte muy pequeñita a cada uno de esos números, donde esa pequeña parte se puede ir haciendo nada, es decir cero, no les toca nada; esto quiere decir que la función se acerca cada vez más al cero.

Entonces cada vez que dividamos cualquier número entre el infinito, nuestro resultado siempre será cero.

Para ello se utiliza el siguiente teorema:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \; para \; k \in \mathbb{R} \; y \; n \in N$$

Para calcular el límite de una función en la cual $x \to \infty$, se **divide cada término** de la función entre la **variable con mayor exponente del denominador.**

Ejemplos:

a) Calcula el límite al infinito $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+4}{x-3}$

Si hiciéramos la sustitución de $\boldsymbol{x}$, por los valores como: $\boldsymbol{x}$ = 0.01, $\boldsymbol{x}$ = 1´000,000 Y como no podría definirse el resultado, hacemos uso del teorema.	$\frac{5 * 0.01 + 4}{0.01 - 3} = -1.35$ $\frac{5 * 1´000{,}000 + 4}{1´000{,}000 - 3} = 5$
Dividimos cada término entre la variable de mayor exponente del denominador, que en este caso es $\boldsymbol{x}$.	$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x}{x} + \frac{4}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}}$
Como $\frac{x}{x} = 1$ y aplicando teorema $\frac{4}{x} = 0, \frac{3}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x}{x} + \frac{4}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}}$
Sustituyendo nos queda	$\frac{5 - 0}{1 - 0}$
Como resultado final tenemos	$\frac{5}{1} = 5$

El resultado es: $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+4}{x-3} = 5$

b) Calcula el límite al infinito $\lim_{x\to\infty} \frac{6x+4x^2-2x^5}{3x^5-3x^3+2x}$

Dividimos cada término entre la variable de mayor exponente del denominador, que en este caso es $\boldsymbol{x}^5$. De igual forma aplicamos la ley de los exponentes: $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x}{x^5} + \frac{4x^2}{x^5} - \frac{2x^5}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{3x^3}{x^5} + \frac{2x}{x^5}}$
Como $\frac{x^5}{x^5} = 1$ y aplicando teorema $\frac{6}{x^4} = 0, \frac{4}{x^3} = 0, \frac{3}{x^2} = 0 \wedge \frac{2}{x^4} = 0$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^3} - 2}{3 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}$
Sustituyendo nos queda como resultado	$-\frac{2}{3}$

El resultado es: $\lim_{x\to\infty} \frac{6x+4x^2-2x^5}{3x^5-3x^3+2x} = -\frac{2}{3}$

c) Calcula el límite al infinito $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3+1}$

Dividimos cada término entre la variable de mayor exponente del denominador, que en este caso es $\boldsymbol{x}^3$. De igual forma aplicamos la ley de los exponentes: $\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$	$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$
Como $\frac{x^3}{x^3}=1$ y aplicando teorema $\frac{1}{x^3}=0,\frac{1}{x}=0$	$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-0}{1+0}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{0-0}{1+0}$
Sustituyendo nos queda como resultado	$\frac{0}{1}=0$

El resultado es: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3+1}=0$



Actividad 5.
Límite de funciones cuando la variable

Instrucciones: para reforzar el tema visto, realiza el siguiente ejercicio, sigue las indicaciones para seleccionar la respuesta correcta. Da **clic aquí** para comenzar con el ejercicio.



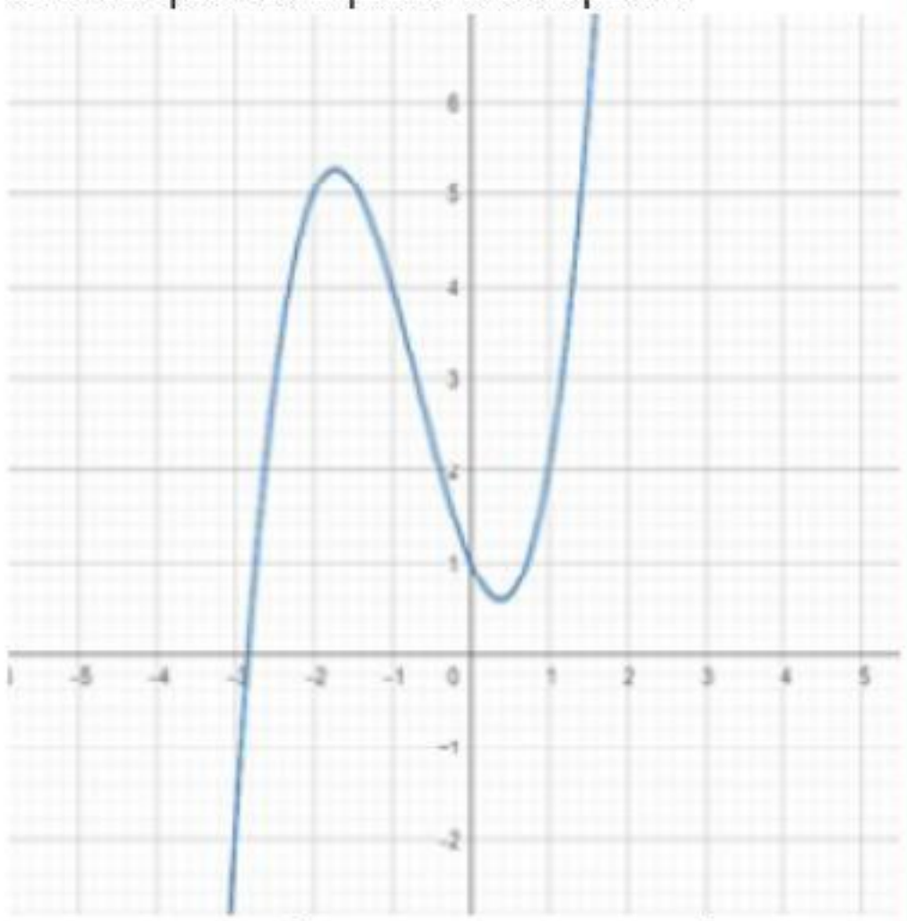
2.3 Continuidad de una función

Continuidad es algo que realizamos sin interrupción; es decir, si aplicamos la continuidad de una función, podremos decir que la esta es continua; ejemplo: cuando no necesito levantar el lápiz para realizar la gráfica de la función.

Veamos dos ejemplos de representación gráfica, en ellas podemos apreciar como en la primera gráfica se puede ver que la función es continua, porque no hubo necesidad de despegar el lápiz para lograr el trazo y caso contrario en la segunda representación gráfica se ve perfectamente que no es continua, debido a que el trazo de la misma no se pudo hacer sin levantar el lápiz para lograrlo.

Figura 9.
Gráfica que no tiene interrupciones

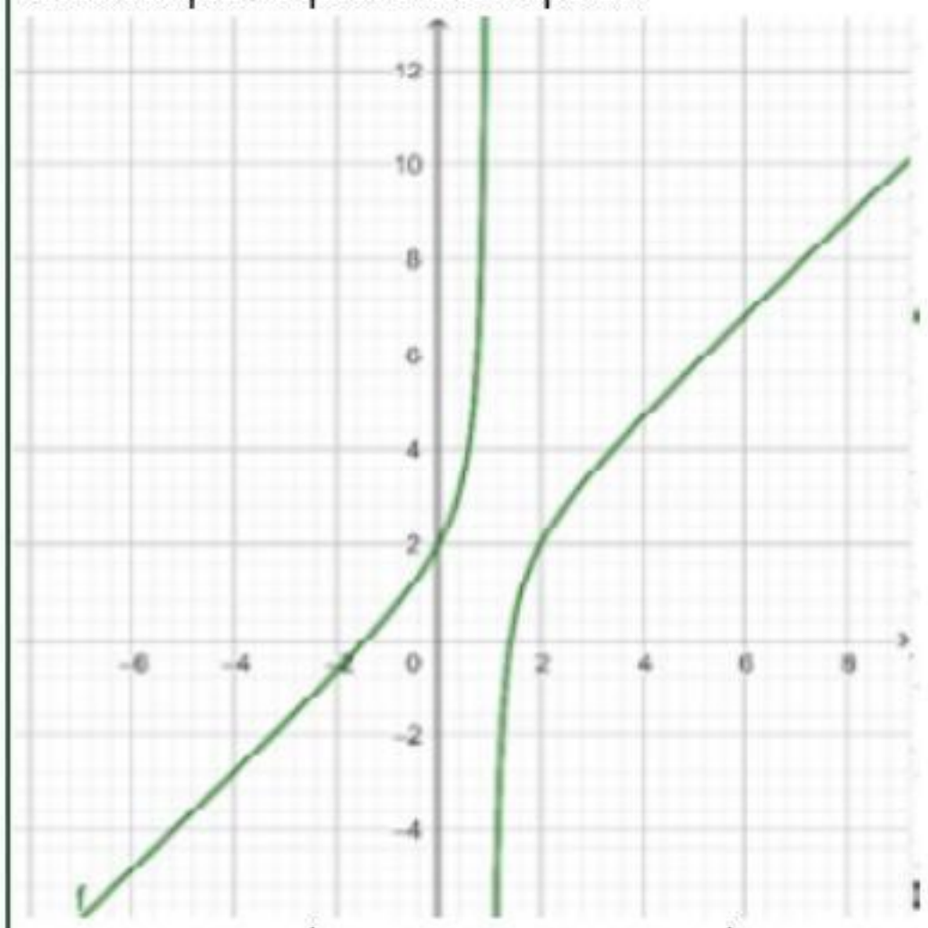
Gráfica que no requiere interrupción



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica que no requiere interrupciones].

Figura 10.
Gráfica que tiene interrupciones

Gráfica que requiere interrupción



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica que requiere interrupciones].

A continuación veremos cómo podemos verificar si la función es continua en un punto.

2.3.1 Continuidad de una función en un punto

Para analizar la continuidad de una función en un punto, es posible hacerlo analítica y gráficamente; para ello se deben de cumplir tres condiciones:

a. Existe el límite de la función f (*x*) en *x* = a. *f* (a), esto es: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

b. La función está definida en *x* = a, es decir, existe *f* (a), esto es: $f(a) = L$

c. Los dos valores anteriores coinciden, esto es: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Tips para cuando se tiene una función racional y se evalúa la continuidad y se obtiene $\frac{0}{0}$:

1. La función se evalúa sustituyendo el valor de *x*
2. Los límites los **factorizo**
3. Compruebo la igualdad del punto 1 y 2

Ejemplos:

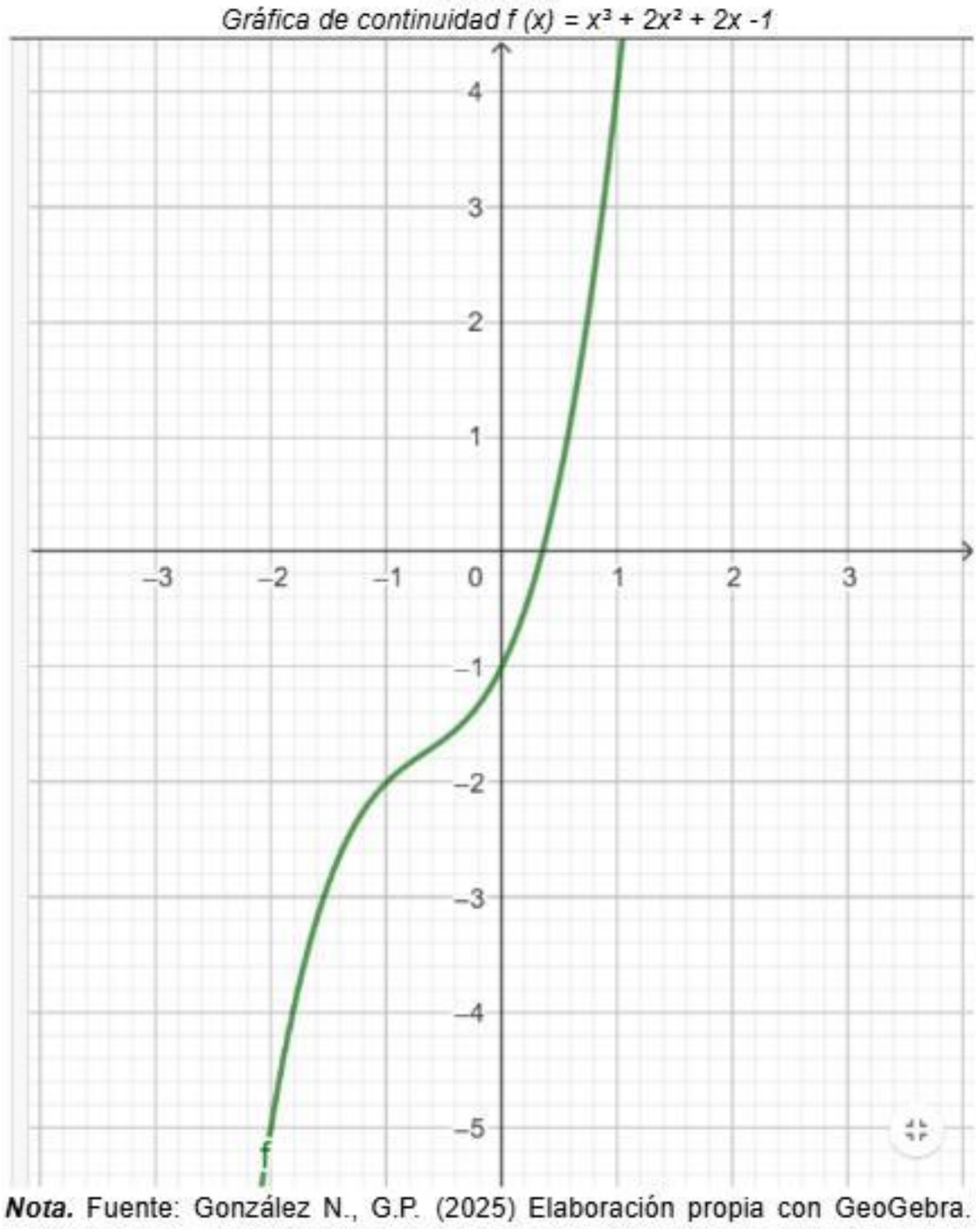
1) Analiza la continuidad de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ en x = 1, y representa gráficamente.

1. Evaluamos la función en *x* =1, es decir *f* (1)	$f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 2(1) - 1$ $f(1) = 1 + 2 + 2 - 1$ $f(1) = 4$
2. Obtenemos el límite	$\lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ $\lim_{x\to 1}(1)^3 + 2(1)^2 + 2(1) - 1$ $\lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 4$
3. Comprobamos que ambos resultados sean iguales	$f(1) = 4 = \lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 4$

∴ **la función** $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$, es **continua** en $x = 1$

Figura 11.

Gráfica de continuidad f (x) = x³ + 2x² + 2x -1



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de continuidad *f (x) = x³ + 2x² + 2x -1*].

Tips para cuando se tiene una función racional y se evalúa la continuidad y se obtiene $\frac{0}{0}$:

1. La función se evalúa sustituyendo el valor de *x*
2. Los límites los **factorizo**
3. Compruebo la igualdad del punto 1 y 2

Ejemplos:

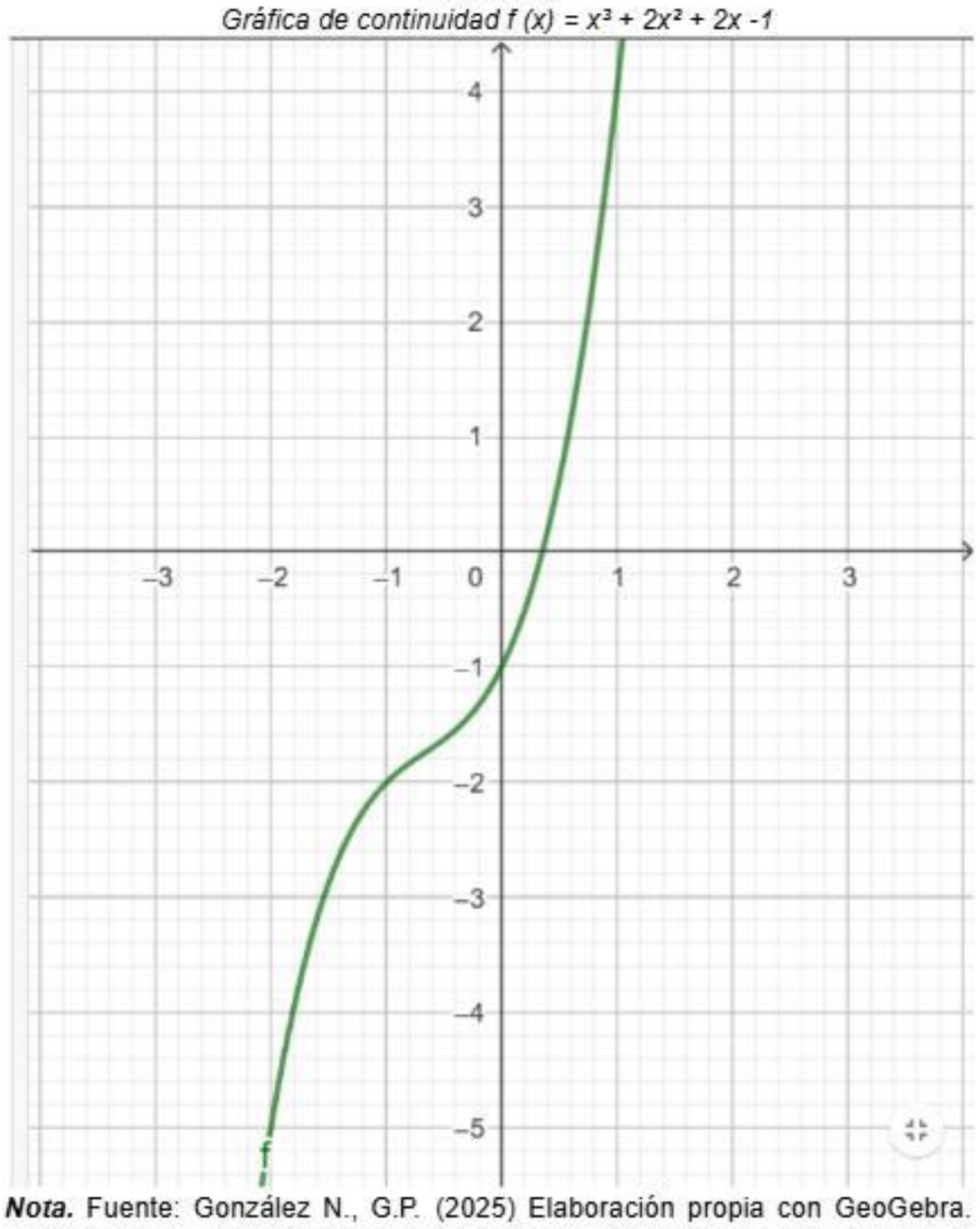
1) Analiza la continuidad de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ en x = 1, y representa gráficamente.

1. Evaluamos la función en *x* =1, es decir *f* (1)	$f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 2(1) - 1$ $f(1) = 1 + 2 + 2 - 1$ $f(1) = 4$
2. Obtenemos el límite	$\lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ $\lim_{x\to 1}(1)^3 + 2(1)^2 + 2(1) - 1$ $\lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 4$
3. Comprobamos que ambos resultados sean iguales	$f(1) = 4 = \lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 4$

∴ **la función** $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$, es **continua** en $x = 1$

Figura 11.

Gráfica de continuidad f (x) = x³ + 2x² + 2x -1



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de continuidad *f (x) = x³ + 2x² + 2x -1*].

Tips para cuando se tiene una función racional y se evalúa la continuidad y se obtiene $\frac{0}{0}$:

1. La función se evalúa sustituyendo el valor de *x*
2. Los límites los **factorizo**
3. Compruebo la igualdad del punto 1 y 2

Ejemplos:

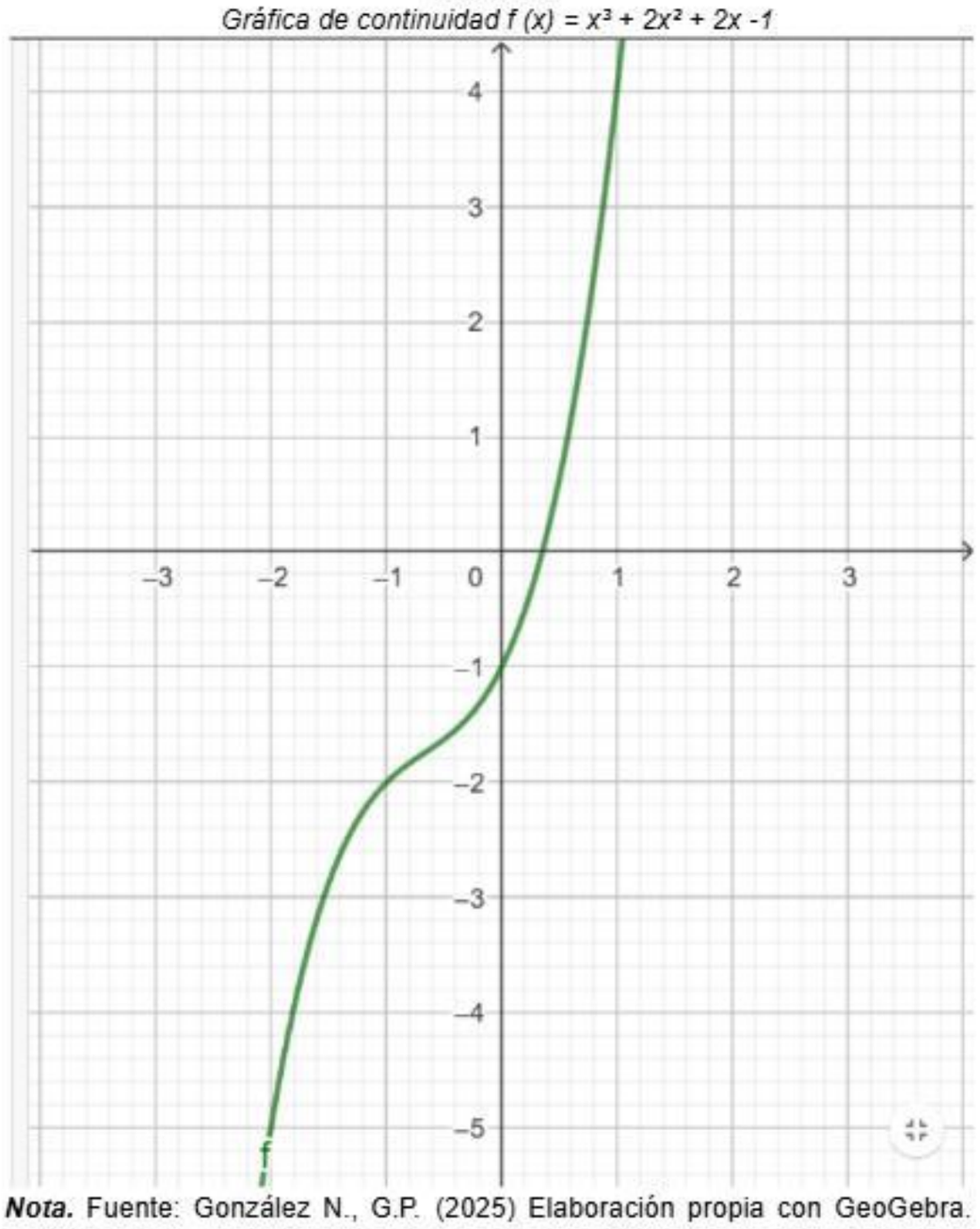
1) Analiza la continuidad de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ en x = 1, y representa gráficamente.

1. Evaluamos la función en *x* =1, es decir *f* (1)	$f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 2(1) - 1$ $f(1) = 1 + 2 + 2 - 1$ $f(1) = 4$
2. Obtenemos el límite	$\lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ $\lim_{x\to 1}(1)^3 + 2(1)^2 + 2(1) - 1$ $\lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 4$
3. Comprobamos que ambos resultados sean iguales	$f(1) = 4 = \lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 4$

∴ **la función** $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$, es **continua** en $x = 1$

Figura 11.

Gráfica de continuidad f (x) = x³ + 2x² + 2x -1



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de continuidad *f (x) = x³ + 2x² + 2x -1*].

Tips para cuando se tiene una función racional y se evalúa la continuidad y se obtiene $\frac{0}{0}$:

1. La función se evalúa sustituyendo el valor de *x*
2. Los límites los **factorizo**
3. Compruebo la igualdad del punto 1 y 2

Ejemplos:

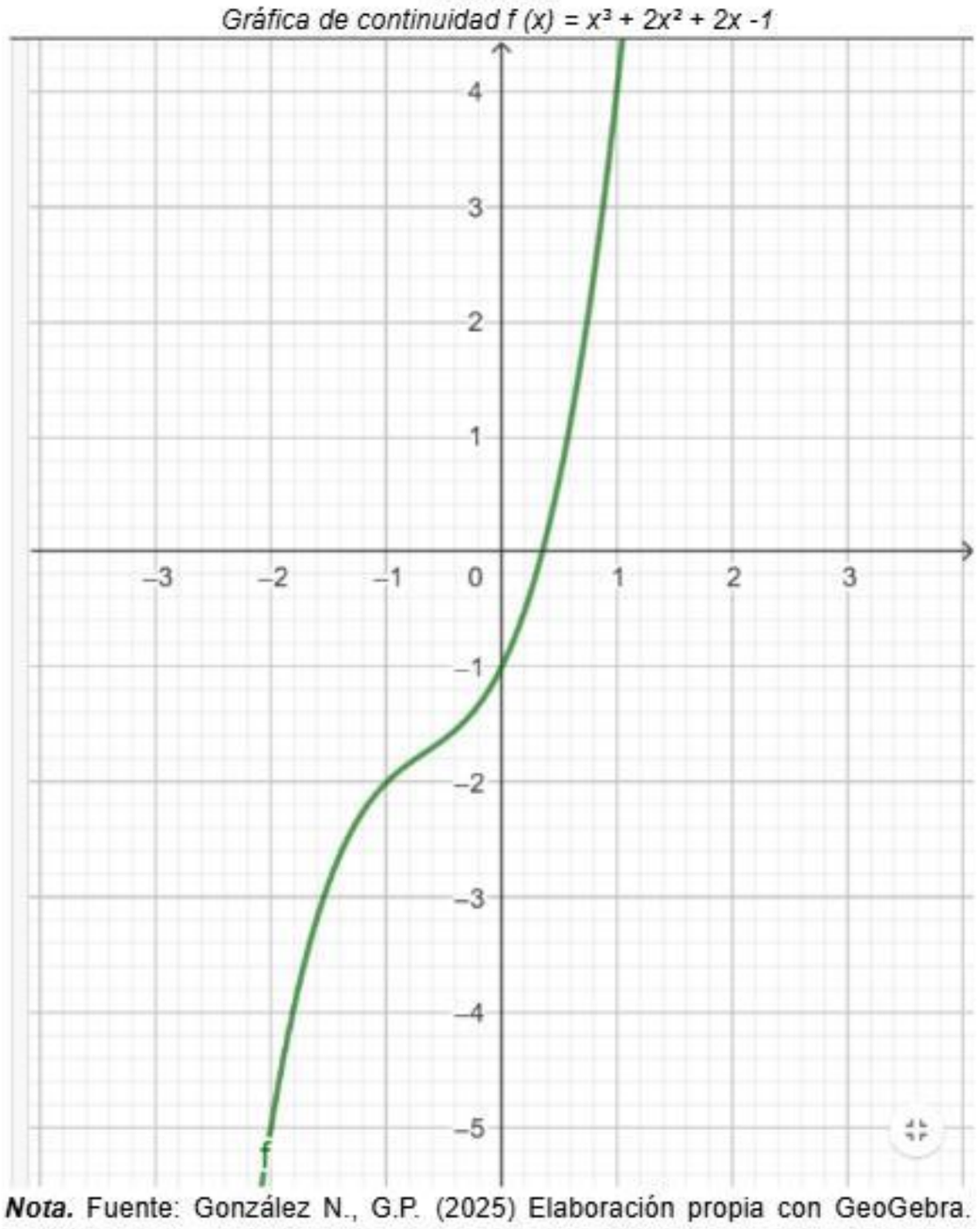
1) Analiza la continuidad de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ en x = 1, y representa gráficamente.

1. Evaluamos la función en *x* =1, es decir *f* (1)	$f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 2(1) - 1$ $f(1) = 1 + 2 + 2 - 1$ $f(1) = 4$
2. Obtenemos el límite	$\lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ $\lim_{x\to 1}(1)^3 + 2(1)^2 + 2(1) - 1$ $\lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 4$
3. Comprobamos que ambos resultados sean iguales	$f(1) = 4 = \lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 4$

∴ **la función** $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$, es **continua** en $x = 1$

Figura 11.

Gráfica de continuidad f (x) = x³ + 2x² + 2x -1



Nota. Fuente: González N., G.P. (2025) Elaboración propia con GeoGebra. [Gráfica de continuidad *f (x) = x³ + 2x² + 2x -1*].