Universidad Autónoma
del Estado de México

E-BOOK

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS I

4o. SEMESTRE

Octavio Cruz Vásquez
María Fernanda López Albarrán
Maximiliano Adán Evangelista Esquivel

SA | Secretaría Académica



Doctora en Ciencias Sociales
Martha Patricia Zarza Delgado
Rectora de la Universidad Autónoma del Estado de México

Doctora en Ciencias Computacionales
Arianna Becerril García
Secretaria de Ciencia

Doctor en Ciencias Agropecuarias y Recursos Naturales
Francisco Herrera Tapia
Secretario Académico

Doctora en Estudios Latinoamericanos
Cynthia Ortega Salgado
Secretaria de Identidad y Cultura

Doctor en Ciencias Sociales
Jorge Alejandro Vásquez Caicedo
Secretario de Gobernanza Universitaria

Doctora en Farmacia y Tecnología Farmacéutica
Mariana Ortiz Reynoso
Secretaria de Vinculación, Extensión y Promoción de la Empleabilidad

Maestra en Administración
Miriam Liliana Padilla Mora
Secretaria de Gestión y Administración Universitaria

Maestra en Hacienda Pública
Miriam Sierra López
Secretaria de Finanzas

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Luja
Secretaria de Desarrollo y Fortalecimiento Institucional

Doctora en Geografía
Norma Baca Tavira
Secretaria de Igualdad Sustantiva y Cuidados

Doctor en Ciencias e Ingeniería de Materiales
José Guadalupe Miranda Hernández
Secretario de Centros Universitarios y Unidades Académicas Profesionales

Maestrante en Derecho
Evangelina Sales Sánchez
Consejera Jurídica Universitaria

Doctora en Diseño
María Fernanda Valdés Figueroa
Directora de Comunicación Social Universitaria

Doctor en Políticas Públicas
Bernardo J. Almaraz Calderón
Jefe de la Oficina de la Rectoría

Maestra en Sistemas Integrales de Gestión
Donají Pulido Gómez
Secretaria Particular de la Rectora

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS I

Dirección de Publicaciones Universitarias
Editorial de la Universidad Autónoma del Estado de México

Doctora en Ciencias Sociales
Martha Patricia Zarza Delgado
Rectora de la Universidad Autónoma del Estado de México

Doctora en Estudios Latinoamericanos
Cinthya Ortega Salgado
Secretaria de Identidad y Cultura

Maestra en Diseño Gráfico
Ixchel Edith Díaz Porras
Directora de Publicaciones Universitarias

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Educación Media Superior

Maestro en Valuación
Xavier Gaytán Zepeda
Director de Educación Continua y Digital

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS I

Octavio Cruz Vásquez
Maximiliano Adán Evangelista Esquivel
María Fernanda López Albarrán

Primera edición, febrero 2026

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS I
Libro de texto digital

Autores
Octavio Cruz Vásquez
Plantel "Cuauhtémoc" de la Escuela Preparatoria de la UAEMéx
Maximiliano Adán Evangelista Esquivel
Plantel "Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana" de la Escuela Preparatoria de la UAEMéx
María Fernanda López Albarrán
Plantel "Nezahualcóyotl" de la Escuela Preparatoria de la UAEMéx

Universidad Autónoma del Estado de México
Av. Instituto Literario 100 Ote. Col. Centro
Toluca, Estado de México
C. P. 50000
Tel: (52) 722 481 18 12
http://www.uaemex.mx

El contenido de este material es responsabilidad de los autores. Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra, sin el consentimiento previo y por escrito del editor. La Universidad Autónoma del Estado de México se deslinda de cualquier acción legal derivada de este material.

® Derechos reservados, 2026

ISBN: (En trámite)

Hecho en México
Made in Mexico



Presentación

La Universidad Autónoma del Estado de México vive un proceso de transformación inédito en sus cerca de 200 años de historia. La principal característica de dicho proceso es colocar en el centro de su quehacer académico a las y los jóvenes que han elegido esta casa de estudios como inicio de su vida profesional.

En el nivel medio superior impulsamos el uso estratégico de la tecnología educativa mediante el desarrollo de **libros electrónicos (E-books)**, diseñados para acompañarte de manera interactiva en el aprendizaje de las asignaturas que conforman el plan de estudios del Bachillerato Universitario.

Por primera vez en la historia de nuestra Universidad, **esta antología de libros electrónicos estará disponible sin costo** para el estudiantado de los once planteles que integran la Escuela Preparatoria de la UAEMéx. Este material es resultado de un trabajo integral, profesional y colaborativo por parte de académicos y docentes universitarios a quienes agradecemos y reconocemos su aportación y participación.

Cada libro que podrás consultar de manera gratuita representa una nueva forma de entender la realidad y busca mejorar tu experiencia en cada una de las asignaturas que componen el plan de estudios del Bachillerato Universitario. Sabemos que esta colección de libros electrónicos será parte del **principio de una brillante, participativa y transformadora experiencia universitaria.**

Podrás acceder a tus libros electrónicos desde una computadora, tableta o teléfono celular y de esta manera, consultar en cualquier momento las lecciones, conceptos, actividades y recursos académicos que acompañarán cada una de tus clases. Los materiales han sido diseñados por personas expertas en cada tema y adaptados a las nuevas tendencias de aprendizaje global, por lo que la **calidad académica** y la **sencillez en la enseñanza** que nos caracterizan es el sello que encontrarás en cada e-book.

Finalmente, enfatizar que los libros electrónicos que ahora tienes en tus manos, forman parte de la visión moderna que tiene nuestra universidad. Por ello, te invito a utilizarlos como fuente inicial de ese **pensamiento crítico, humanista y científico** que habrá de promover los cambios ambientales, sociales y culturales que permitirán construir un mejor Estado de México.

Dra. Martha Patricia Zarza Delgado
Rectora de la Universidad Autónoma del Estado de México

Introducción

El *e-book* **Temas Selectos de Matemáticas I** es el resultado del trabajo y la reflexión que se construyen cada día en el aula, surge como un esfuerzo conjunto entre **docentes de la Universidad Autónoma del Estado de México** y de la **Dirección de Educación Media Superior** con el propósito de ofrecer a las y los estudiantes de cuarto semestre un material de apoyo que sea claro, cercano y útil para su proceso de aprendizaje.

Este ***e-book*** no fue pensado como un simple compendio de fórmulas o ejercicios resueltos. Su intención es acompañarte en el estudio de las matemáticas, ayudándote a comprender los conceptos, a reconocer la relación entre los distintos temas y a desarrollar un razonamiento más sólido. La experiencia docente ha mostrado que cuando los contenidos se presentan de manera ordenada y con sentido, el aprendizaje se vuelve más accesible y significativo.

A lo largo de **Temas Selectos de Matemáticas I** se desarrollan cuatro módulos que siguen una secuencia lógica. En ellos se abordan, de manera gradual, ideas relacionadas con la geometría, la medición de ángulos y la trigonometría, sentando las bases necesarias para comprender las razones trigonométricas, su comportamiento y su aplicación en distintos contextos. Estos contenidos permiten avanzar con mayor seguridad hacían el uso de identidades trigonométricas y su papel en la simplificación de expresiones matemáticas.

Se enfatiza también en el cálculo de valores numéricos y la verificación de igualdades, cuidando aspectos fundamentales como el dominio de funciones y el análisis de signos en las razones trigonométricas. Este trabajo previo prepara el camino para la resolución de ecuaciones trigonométricas, donde le objetivo principal es determinar los valores del ángulo que hacen válida una igualdad trigonométrica dentro de un intervalo considerado.

Las actividades incluidas en este ***e-book*** están diseñadas para reforzar lo visto en clase y fomentar el análisis, evitando qu el estudio de las matemáticas se limite a la repetición mecánica de procedimientos. El uso adecuado de la calculadora científica, la interpretación de resultados y la reflexión sobre las soluciones forman parte esencial del aprendizaje.

Finalmente, este ***e-book*** de **Temas Selectos de Matemáticas I** no sustituye el trabajo en el aula ni la guía docente, pero sí busca convertirse en un apoyo constante para el estudio, la práctica y el repaso. Si trabajas este material con atención y constancia, podrás reconocer que los temas abordados forman un conjunto coherente y que la trigonometría, lejos de ser un tema aislado, es una herramienta fundamental dentro de tu formación.



Módulo I

Ángulos y polígonos

Propósito del Módulo

Comprender las propiedades y clasificación de los ángulos y polígonos, así como la construcción de triángulos y sus elementos notables, para resolver problemas geométricos del entorno mediante el uso de herramientas de medición y representación.

Presentación

¡Hola, bienvenidas y bienvenidos a este Módulo I!

Cuando observas los objetos a tu alrededor, puedes identificar diferentes tipos de formas que tienen, por ejemplo, las casas, los árboles, las aulas, tus útiles escolares, entre muchos otros. Algunas de estas formas son bastante complejas y su estudio es igualmente complejo, por lo que, incluso de forma intuitiva desde niños, los solemos representar con imágenes más simples; por ejemplo, la fachada de una casa la representamos con un rectángulo, a un pino le representamos el tronco con un rectángulo y la copa con un triángulo y a una naranja la representamos con un círculo; de manera similar hacemos esto con más y más objetos. Esta idea de representar los objetos cotidianos con formas simples es una de las utilidades de la trigonometría, porque nos permite un estudio detallado con cálculos sencillos y pocos elementos; el mismo nombre lo refiere, porque la trigonometría está asociada a los triángulos.

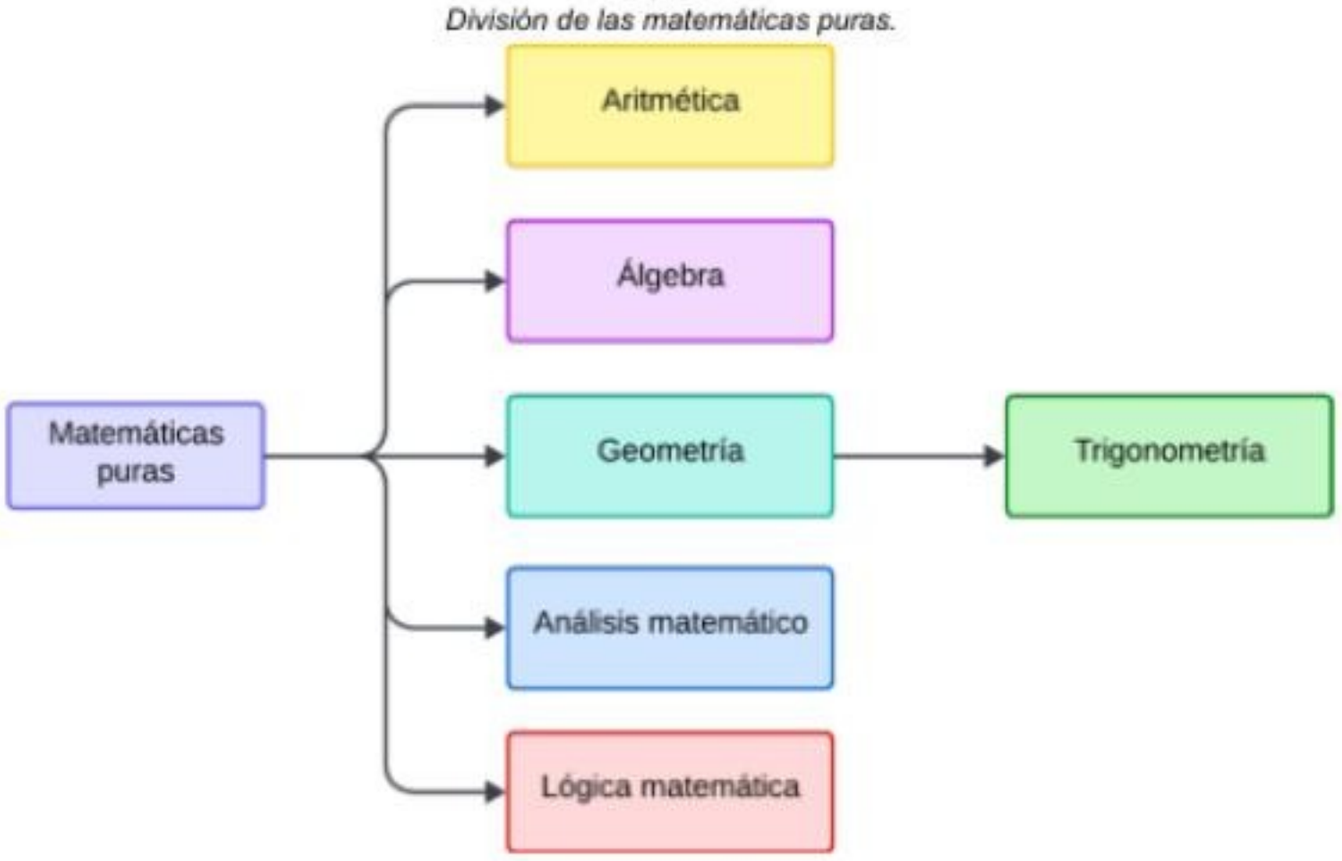
En este Módulo I aprenderás que algunas de las formas empleadas por la trigonometría se llaman polígonos y que estos polígonos pueden ser descritos con base en triángulos que se pueden trazar en su interior. Por esta última característica, abordarás propiedades, rectas y puntos notables propios de los triángulos; también estudiarás el concepto de ángulo y cómo, a partir de los triángulos, puedes deducir cuál es el comportamiento de los ángulos en los polígonos.

También aprenderás a emplear herramientas de dibujo como la regla y el compás para el trazo de triángulos, bisectrices y mediatrices.

Aunque su nombre de este parece resumir los temas que vamos a tratar en las siguientes páginas, aún no podemos comenzar nuestro estudio formal de los temas relacionados con ángulos y polígonos sin situarnos dentro del inmenso mundo de las matemáticas.

Seguramente recuerdas que, para lograr comprender mejor los temas matemáticos, tenemos que estudiarlos en áreas diferentes, tales como la aritmética, el álgebra, el análisis matemático, la lógica matemática y las que más nos interesan en este curso, la geometría y la trigonometría (observa la Figura 1).

Figura 1.
División de las matemáticas puras.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025) Elaboración propia. [División de las matemáticas puras.]

Ahora analicemos juntos las definiciones de estas dos importantes áreas:

Geometría

Es la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar las propiedades, medidas, formas y posiciones de los objetos en el espacio.

Al analizar la palabra "geometría", se pueden identificar dos raíces:

- **geo** (que significa tierra), y
- **metría** (medida).

Figura 2.
Primeros usos de la geometría.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025) Elaboración propia creada con Inteligencia artificial.

El significado literal es "medida de la tierra", situación que nos remonta a uno de los primeros usos de la geometría, pues las bases de esta área permitieron medir terrenos, construir templos y observar los astros. Cuando la figura geométrica central es un triángulo, la geometría da paso al estudio de la trigonometría, puesto que la definición de esta última es:

Trigonometría

Es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos, así como las funciones que describen esas relaciones.

Ahora bien, la geometría y la trigonometría conforman una relación inseparable dentro de las matemáticas puras, pues mientras que la primera nos motiva a observar las formas del espacio, la segunda nos apoya en la medición de sus partes con suma precisión y exactitud.

En este módulo, aprenderemos juntos a reconocer cómo los ángulos y los polígonos representan el punto de encuentro entre la geometría y la trigonometría.

Idea clave 1. Sobre la geometría y trigonometría

La geometría nos permite estudiar las formas y medidas del espacio, en tanto que la trigonometría se enfoca en las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos. Ambas áreas son herramientas para comprender mejor el mundo físico que nos rodea.

Por último, estos conocimientos los usarás en la resolución de problemas de aplicación, lo cual te permitirá comprender cómo emplear la trigonometría en algunos casos de la vida cotidiana.



Actividad 1. Evaluación diagnóstica

Instrucciones: antes de iniciar la revisión de los contenidos correspondientes al Módulo I, se te invita a realizar la Evaluación Diagnóstica. Este instrumento tiene como propósito identificar los conocimientos previos que posees sobre los temas que abordarás durante el módulo. Asimismo, permitirá a tu docente reconocer tus fortalezas y áreas de oportunidad para orientar adecuadamente el proceso de aprendizaje.

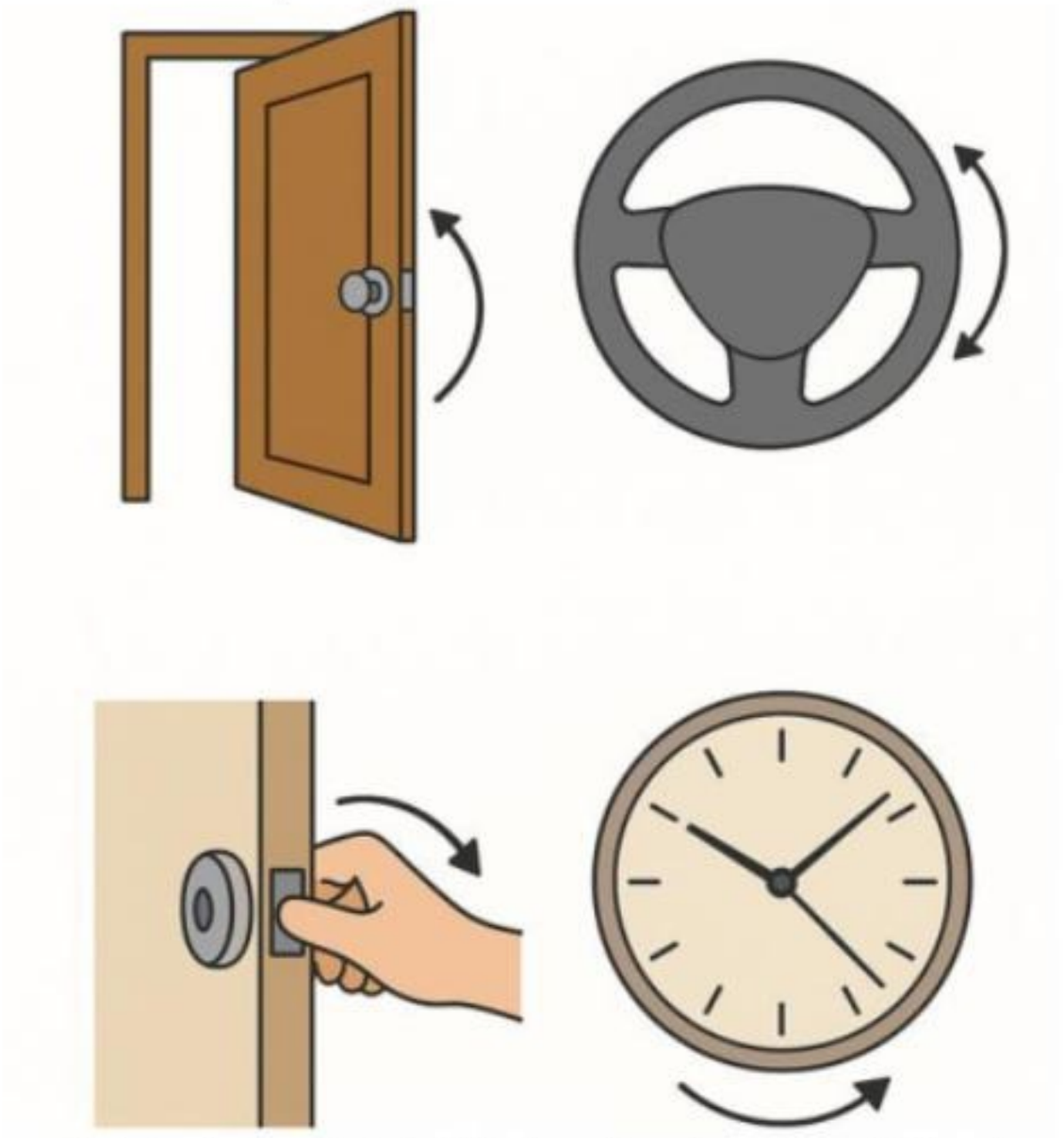
Para acceder a la evaluación, ingresa a la plataforma SEDUCA, dirígete a la sección Actividades (Estudiante) y selecciona la actividad titulada MI Evaluación Diagnóstica.



1.1 Ángulos y sistemas de medición de ángulos: sexagesimal, cíclico y conversiones entre ellos

Seguro que en tu día a día has escuchado o escuchas muchas veces la palabra **ángulo**, pero quizá no te has detenido a pensar cuántos de ellos aparecen a tu alrededor; aquí te mostramos algunos ejemplos habituales: cuando abres una puerta giras una perilla, cuando el volante de un auto gira lo hace con una apertura determinada, o incluso cuando miras un reloj de manecillas, estás viendo ángulos en acción. Cada vez que algo gira, se abre o se cierra, forma una apertura o, mejor dicho, forma un ángulo; de tal manera que vivimos en un mundo de ángulos.

Figura 3.
Algunos ángulos formados en la vida diaria.

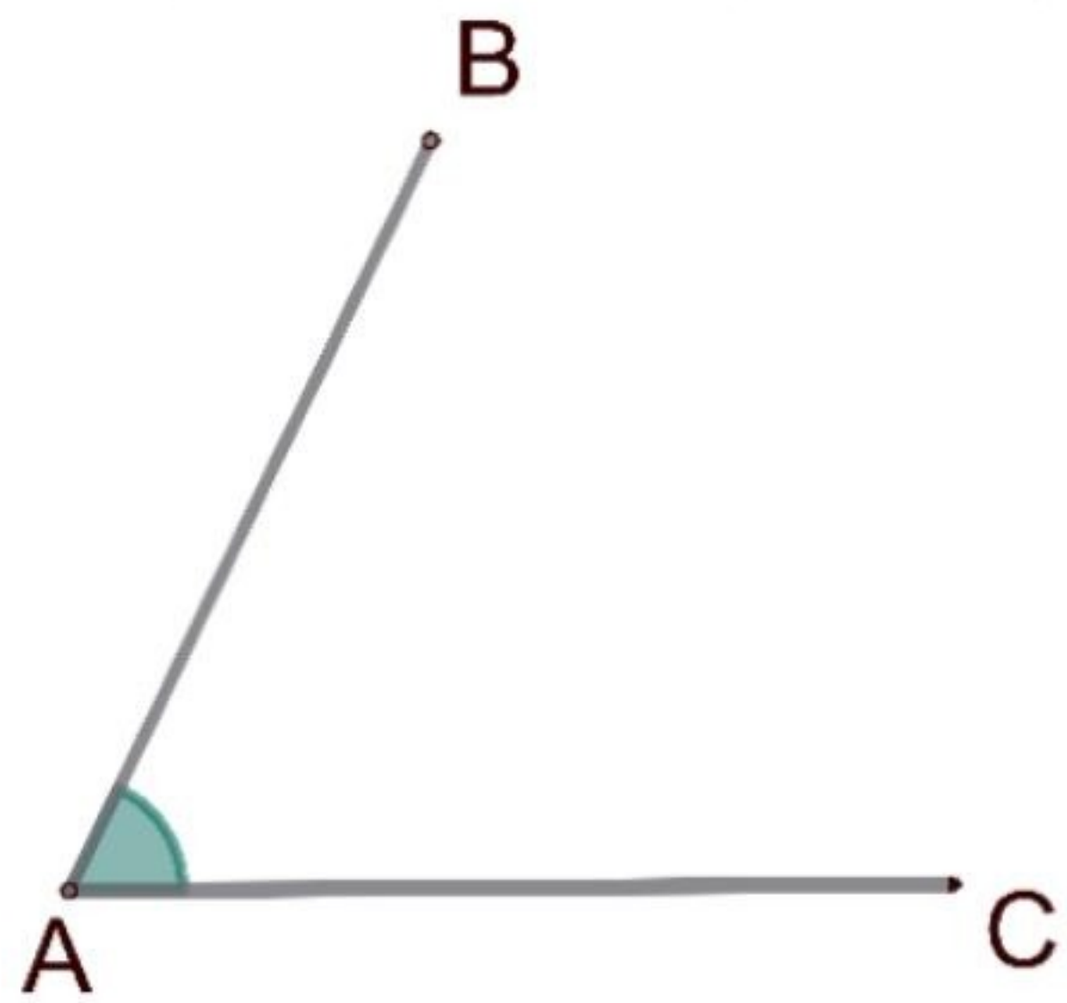


Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025) Elaboración propia creada con Inteligencia artificial. [Algunos ángulos formados enla vida diaria.]

Ángulo

Se puede entender como el nivel de abertura que existe entre dos segmentos de recta que además tienen un punto común, denominado vértice.

Figura 4.
Representación geométrica de un ángulo formado por los segmentos de recta $\overline{AB}$ *y* $\overline{AC}$.



Nota. **Fuente:** Cruz V., O. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra.
[Representación geométrica de un triángulo formado por los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$]

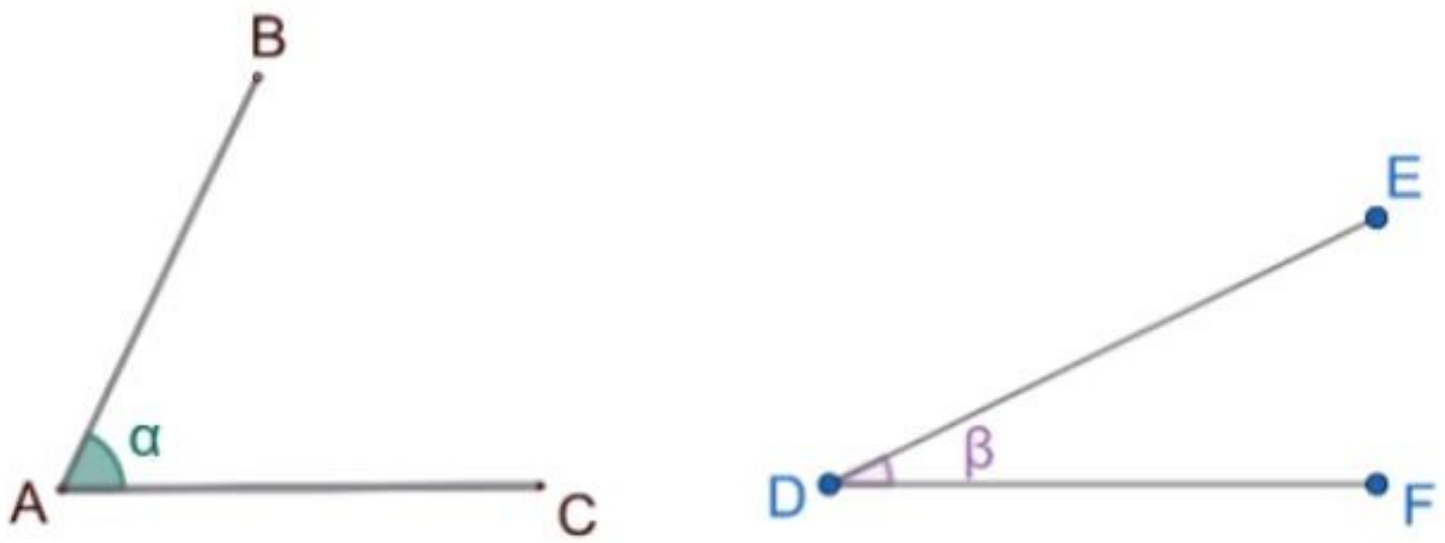
Por ejemplo, consideremos la Figura 4, el segmento de recta $\overline{\mathbf{AB}}$ forma un ángulo con el segmento de recta $\overline{\boldsymbol{AC}}$, que se marca como una abertura en color verde, además, observamos que el punto común entre los dos segmentos de recta es el punto A, decimos entonces que este punto representa el vértice. Por otro lado, al decir que los segmentos de recta $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{AC}}$ se separan de modo que la abertura entre ellas forma un ángulo, también podemos mencionar que los segmentos de recta forman un ángulo $\angle\mathbf{BAC}$, en donde el símbolo matemático $\angle$ denota la formación de un ángulo entre tres puntos, y la posición central corresponde al punto en que se posiciona el vértice.

Idea clave 2. Los ángulos son aberturas

Un ángulo representa una abertura o giro entre dos segmentos de recta o líneas con un vértice común. Cada vez que algo gira, abre o se inclina, se forma un ángulo.

De forma común en geometría los ángulos son etiquetados con letras del alfabeto griego como las letras: alfa ($\boldsymbol{\alpha}$), beta ($\boldsymbol{\beta}$), gamma ($\boldsymbol{\gamma}$), delta ($\boldsymbol{\delta}$), épsilon ($\boldsymbol{\varepsilon}$), entre otras; de modo que posteriormente verás a menudo estos símbolos. Ahora, observa bien la Figura 5, en ella puedes apreciar los ángulos α y β; mientras que el primero está formado por la unión de los dos segmentos $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{AC}}$, el segundo se forma con los segmentos $\overline{\mathbf{ED}}$ y $\overline{\mathbf{DF}}$, pero al comparar estos dos ángulos, ¿cuál podríamos decir que tiene un valor mayor o un valor menor?

Figura 5.
Comparación entre los ángulos α y β.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. **[Comparación entre los ángulos α y β.]**

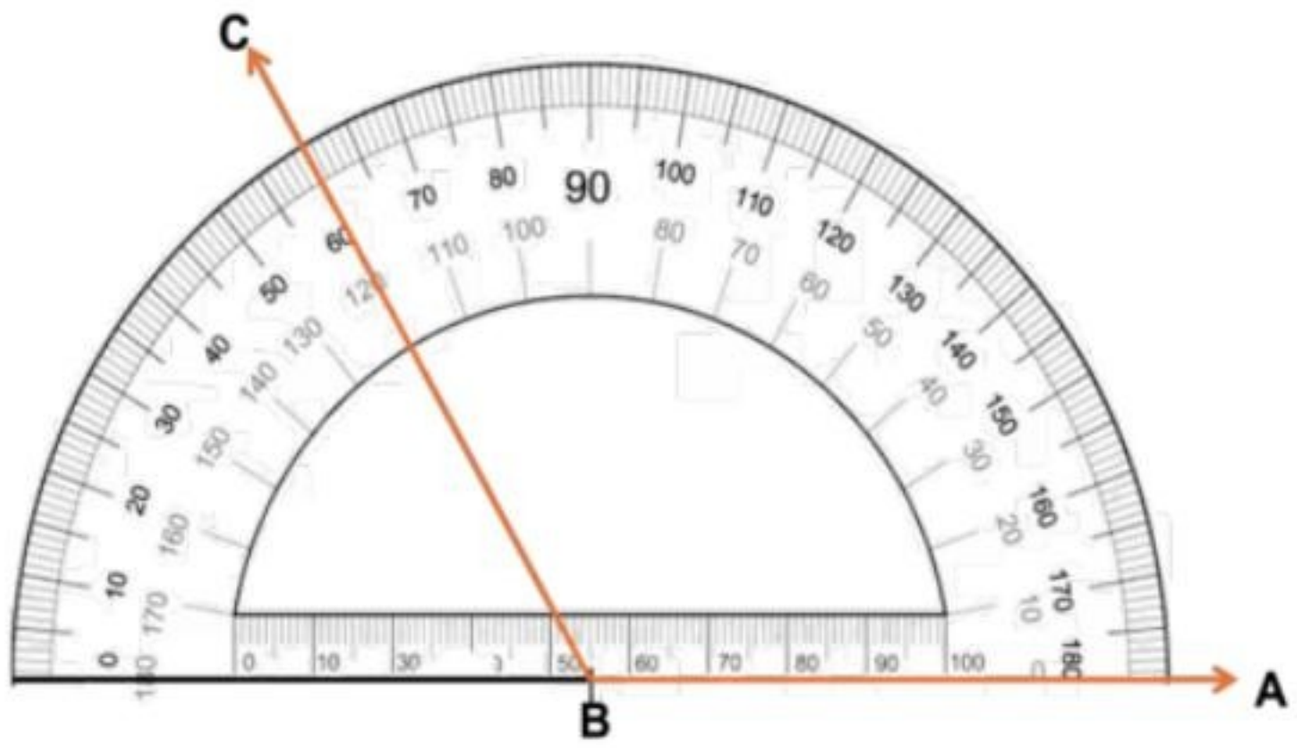
Aunque la diferencia entre ambos ángulos se observa a simple vista, también cada uno de los ángulos pueden expresarse con valores numéricos, para que esta diferencia sea aún más notable y también precisa, para ello necesitamos aprender a **medir ángulos,** lo cual será nuestro siguiente paso.

Medir un ángulo significa asignarle un número a la abertura entre dos segmentos de recta como las mostradas previamente. Ese número nos dice qué tan "cerrado" o qué tan "abierto" está el ángulo.

En la escuela, el instrumento más habitual para medir ángulos es el **transportador**. Este tiene marcas en grados y nos permite colocar su centro en el **vértice** de un ángulo y leer el valor de la abertura que posee, es decir, no estamos determinando una longitud (como lo haríamos con una regla), estamos determinando **la rotación entre dos segmentos de recta.**

El transportador suele medir ángulos desde $0°$ hasta $360°$ aunque la mayoría de los modelos escolares muestran solo una semicircunferencia (es decir, la mitad de una circunferencia) que va de los 0° a los 180°. En la Figura 6 se muestra un transportador de este estilo correctamente colocado para medir el ángulo formado por los segmentos de recta $\overline{\mathbf{BA}}$ y $\overline{\mathbf{BC}}$. Una característica de este instrumento es que la escala principal aumenta en el sentido de las manecillas del reloj (rotación dextrógira), mientras que la escala secundaria (escala inferior) aumenta en el sentido contrario a las manecillas del reloj (rotación levógira), esta última es la forma más habitual de medición de ángulos. En esta figura también podemos seguir las divisiones de este transportador hasta el punto en el que el segmento de recta $\overline{\mathbf{BC}}$ corta exactamente en el valor de $120°$. Por lo que podemos decir que, el ángulo medido y delimitado por los puntos $\mathbf{A-B-C}$, y que se representa con $\angle\mathbf{ABC}$, es $\angle\mathbf{ABC} = 120°$.

Figura 6.
Ángulo formado por los puntos **A – B – C** *y medido con un transportador semicircular.*



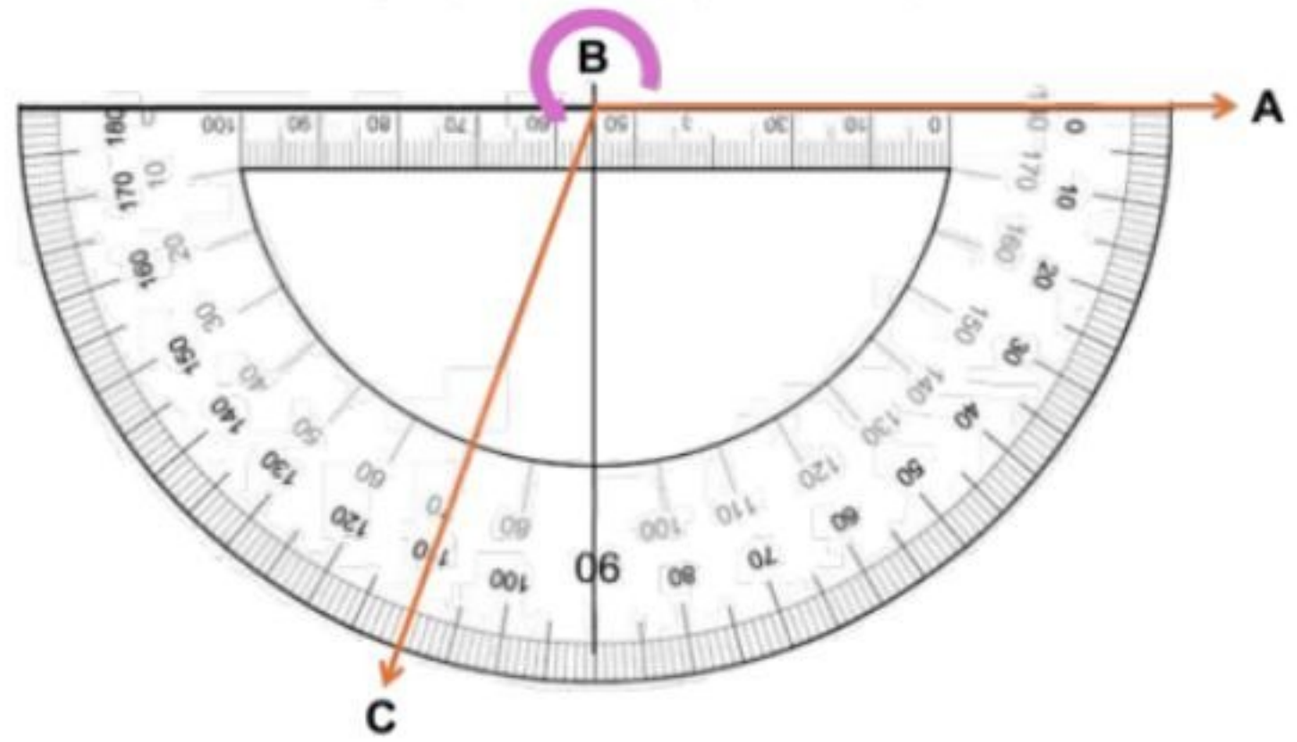
Nota. Fuente: Cruz V, O. (2025) Elaboración propia. **[Ángulo formado por los puntos A – B – C y medido con un transportador semicircular.]**

En la Figura 7 se muestra un ángulo que es mayor de $180°$, medido también con un transportador semicircular. Para lograr esta medición, en el vértice del ángulo se coloca el centro del transportador, y uno de los segmentos de recta de este ángulo se alinea con la base del transportador, exactamente en donde marca el valor de $0°$; a partir de este punto se sigue la escala del transportador hasta llegar a los $180°$, sin embargo, el ángulo no se detiene allí, sino que continúa más allá de la semicircunferencia, por lo que será necesario marcar nuevamente con este transportador un punto de referencia inicial a partir del cual se determina la medida que falta y a la que se le sumarán $180°$, para este caso particular el valor del ángulo sería:

$$180° + 70° = 250°$$

Por lo que se concluye que el ángulo medido en la Figura 7 corresponde a $\angle \mathbf{ABC} = 250°$.

Figura 7.
Medición de un ángulo superior a $180°$ *con ayuda de un transportador semicircular.*



Nota. Fuente: Cruz V, O. (2025) Elaboración propia. [Medición de un ángulo superior a 180^∘con ayuda de un transportador semicircular.]

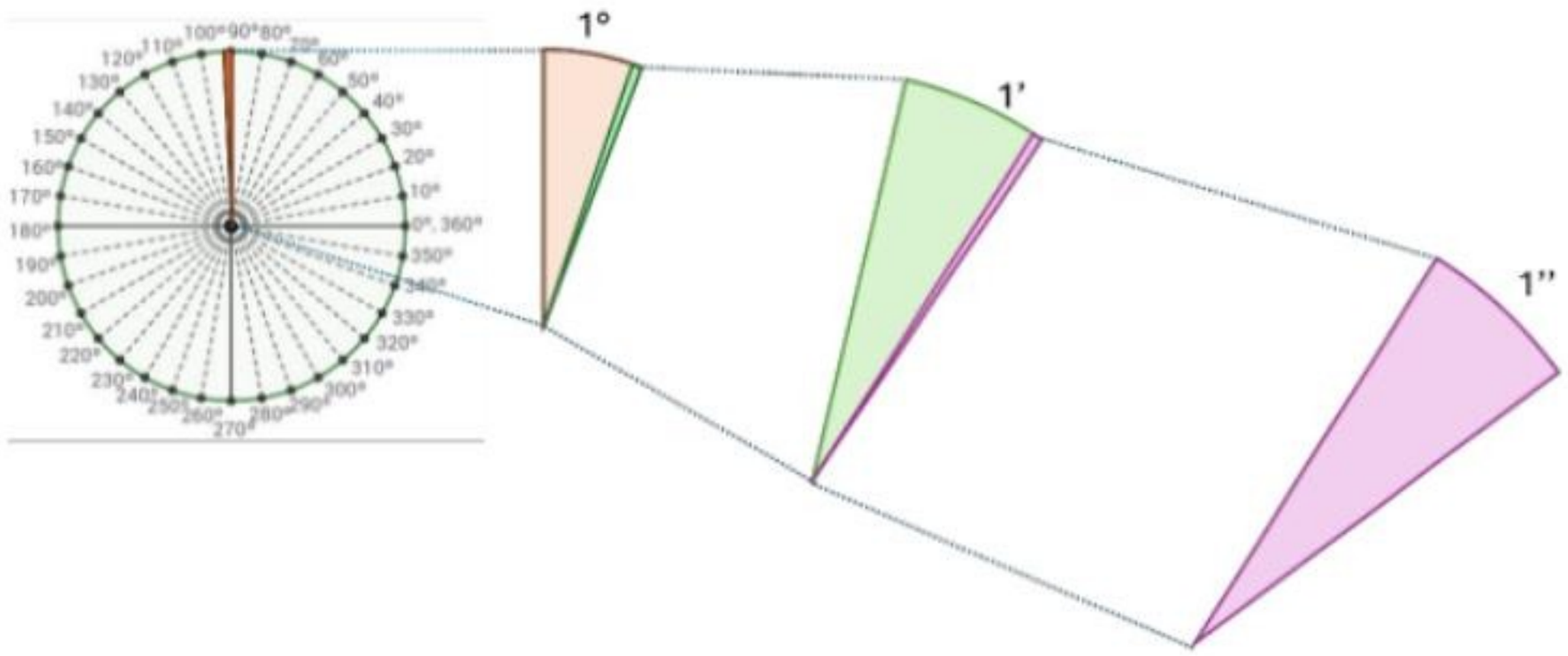
Ahora sí, para expresar la medida de los ángulos no solo usamos el número que se puede observar en instrumentos como el transportador semicircular, pues en realidad, esta cantidad solo representa una parte del concepto ángulo. Para expresar la medición de los ángulos existen diversos sistemas o escalas, aquí describiremos dos de ellos:

- El **sistema sexagesimal**, que utiliza grados (°), minutos (′) y segundos (″);
- El **sistema cíclico o circular**, que utiliza radianes (rad).

Sistema sexagesimal

Este sistema tiene por unidad de medida al grado (°), y los valores de este sistema van desde el valor de cero hasta el valor de $360°$. Una circunferencia se divide en 360 secciones iguales, que equivalen a los grados y posteriormente cada grado se dividen en 60 minutos $(60′)$ y, de forma análoga, cada minuto se divide en 60 segundos $(60″)$ (véase Figura 8). Es claro que con un transportador como el observado anteriormente las mediciones más exactas, que impliquen décimas o centésimas de grados, serían imposibles, y para ello existen otros instrumentos más sofisticados como los **goniómetros.**

Figura 8.
División de la circunferencia en grados (°), minutos (′) y segundos (″).



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. **[División de la circunferencia en grados (°), minutos (′) y segundos (″)]**

En la vida cotidiana o en la ciencia, los ángulos no siempre se expresan de la misma manera. A veces se miden con decimales de grado, por ejemplo $\mathbf{35.5}°$, y en otras ocasiones con **grados, minutos y segundos,** por ejemplo, $\mathbf{35°30′00″}$. Ambas formas son equivalentes, solo cambia la manera de expresar la medida. Recordemos que:

$$\mathbf{1° = 60′}, \qquad \mathbf{1′ = 60″}$$

Y, por lo tanto,

$$\mathbf{1° = 3600″}$$

Idea clave 3. Las unidades y subunidades en el sistema sexagesimal

En el sistema sexagesimal:

$$1° = 60'$$

$$1' = 60''$$

Y, por lo tanto:

$$1° = 3600'$$

No olvides estás equivalencias.

Practiquemos un poco sobre cómo hacer estas conversiones de ángulos con números decimales a ángulos con grados, minutos y segundos:

Ejemplo 1.

Durante una práctica de educación física, la profesora mide el ángulo que forma la pierna de un alumno al levantarla durante un estiramiento. El instrumento marca 47.5°. Convierte este valor a grados, minutos y segundos.

Solución:

Sabemos que $1° = 60'$ y $1' = 60''$ El número $47.5°$ indica que tenemos **47 grados completos y** $\mathbf{0.5°}$ adicionales que debemos convertir a minutos, de modo que:

$$0.5° \times 60' = 30'$$

Esto significa que **medio grado equivale a 30 minutos.**

En este caso no tenemos decimales en los minutos, por lo que no hay segundos que calcular. De modo que el resultado final es:

$$47.5° = 47°30'00''$$

Respuesta final: el ángulo que forma la pierna del alumno durante el estiramiento es de $47°30'00''$

Ejemplo 2.

El técnico que ajusta una antena parabólica necesita orientarla hacia un satélite que se encuentra a $\mathbf{128°15'36''}$sobre el horizonte. Convierte este ángulo al formato decimal para introducirlo en el panel digital del control de la antena.

Solución:

Para realizar esta conversión sabemos que:

$$\mathbf{1° = 60'} \text{ y } \mathbf{1' = 60''}$$

Por lo que, para pasar de grados, minutos y segundos a grados decimales, usamos las relaciones: $\mathbf{1' = \frac{1}{60}°}$ y $\mathbf{1'' = \frac{1}{3600}°}$, lo que equivale a decir un minuto es la seiscentésima parte de un grado, y un segundo es la tres mil seiscentésima parte un grado.

El ángulo que se debe convertir a decimales establece que se tiene $\mathbf{128}$ grados completos $(\mathbf{128°})$, pero que se tienen además $\mathbf{15'}$ que podemos representar $\frac{15°}{60}$, también se tienen $\mathbf{36''}$, que pueden ser representados como $\frac{36°}{3600}$, de tal manera que al sumar estas tres cantidades que ahora se encuentran en grados se tiene:

$$\mathbf{128°15'36'' = 128° + \frac{15°}{60} + \frac{36°}{3600}}$$

Al expresar las divisiones $\frac{15°}{60}$ y $\frac{36°}{3600}$ en decimales, obtenemos:

$$\mathbf{\frac{15°}{60} = 0.25°; \frac{36°}{3600} = 0.01°}$$

De modo que al sumar todos los valores se obtiene:

$$\mathbf{128° + 0.25° + 0.01° = 128.26°}$$

Respuesta final: el ángulo que debe introducir el técnico en el panel es $\mathbf{128.26°}$.

Ejemplo 3.

Una estudiante de arquitectura diseña una rampa de acceso que debe tener una inclinación de $\mathbf{18°20'45''}$. Expresa este ángulo en formato decimal para poder calcular la pendiente en su programa de dibujo asistido.

Solución:

Nuevamente, para realizar esta conversión sabemos que:

$$\mathbf{1° = 60'} \text{ y } \mathbf{1' = 60''}$$

Por lo que, para pasar de grados, minutos y segundos a grados decimales, usamos las relaciones: $\mathbf{1' = \frac{1}{60}°}$ y $\mathbf{1'' = \frac{1}{3600}°}$, lo que equivale a decir que la que un minuto es la sexagésima parte de un grado, y un segundo es la tres mil seiscientosava parte un grado.

De modo que tomamos los grados, minutos y segundos, y los expresamos de la siguiente manera:

$$\mathbf{18°20'45'' = 18° + \frac{20°}{60} + \frac{45}{3600}°}$$

Realizamos las divisiones numéricas:

$$\mathbf{\frac{20°}{60} = 0.3333°; \quad \frac{45}{3600}° = 0.0125°}$$

De modo que cuando sumamos todas las partes en grados:

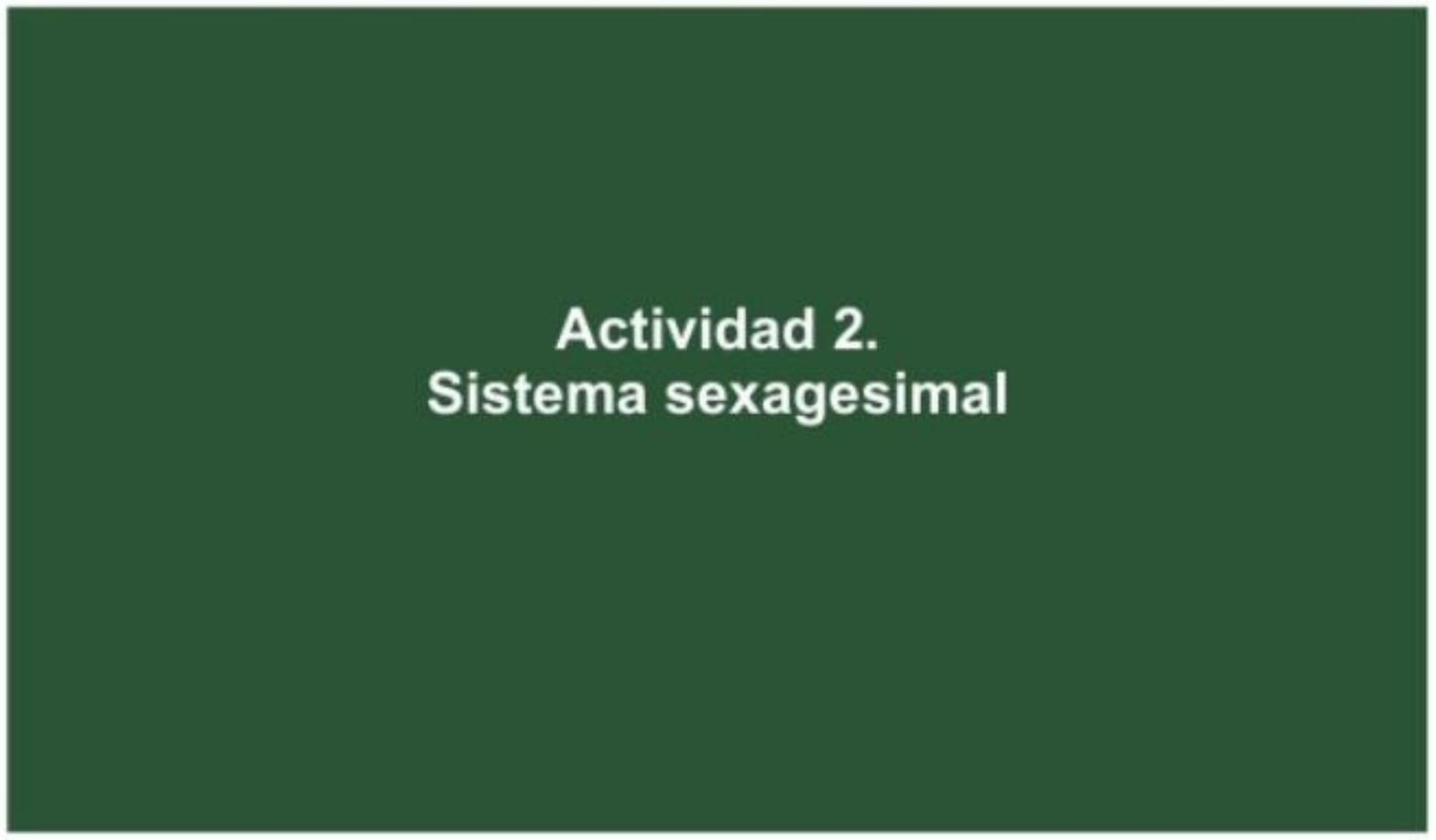
$$\mathbf{18° + 0.3333° + 0.0125° = 18.3458°}$$

Respuesta final: la inclinación de la rampa es de aproximadamente $\mathbf{18.3458°}$ en formato decimal.



Actividad 2.
Sistema sexagesimal

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.



Sistema cíclico o circular

En este sistema la unidad de medida es el radián (*rad*), cuyo origen se relaciona con el estudio del movimiento circular uniforme en física, pues un radián se define como el ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia, y aunque esta idea parece compleja, te invitamos a observar la Figura 9, en ella puedes percatarte de que los radios de la circunferencia representados en color verde tendrán una longitud igual a la longitud del arco de la circunferencia delimitado por los puntos B' y B, marcado en color rojo.

Queda claro que para comprender bien qué es un **radián**, primero debemos tener presente qué significan las palabras **radio** y **arco de circunferencia**.

El **radio** es la distancia que va desde el centro de una circunferencia hasta cualquier punto de su borde, mientras que el **arco** es una parte de esa línea curva que forma la circunferencia.

Imagina que tienes una circunferencia y mides sobre ella un arco que tenga exactamente la **misma longitud que el radio**. El ángulo que se forma en el centro al marcar ese arco se llama **un radián**.

Ahora bien, si colocas varios arcos iguales alrededor de toda la circunferencia, verás que cabe un poco más de seis arcos de longitud igual al radio, lo que significa que una vuelta completa equivale a 2π radianes, o dicho en la escala precedente, $360°$.

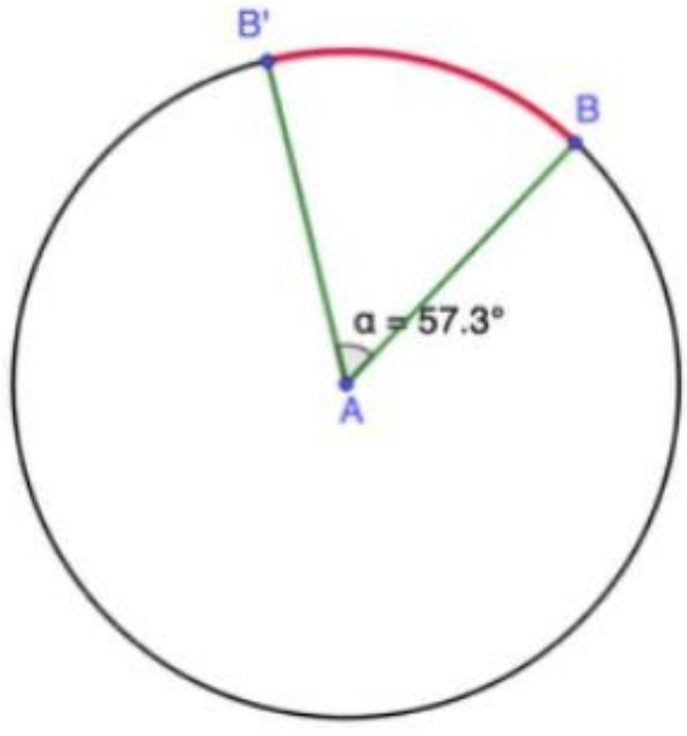
Por esta razón, los dos sistemas: el sexagesimal, que usa grados, y el cíclico, que usa radianes, están relacionados entre sí, es decir:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \Longrightarrow 1\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3.1416} \approx 57.3^\circ$$

Cada vez que te encuentres con el símbolo π, recuerda que este representa un **número real** que expresa la división entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, cuyo valor se aproxima a 3.1416. Este número es muy muy importante en matemáticas, física y geometría, y debes **sustituirlo por su valor numérico cuando realices operaciones** que requieran resultados en unidades concretas, como grados o radianes decimales.

En la Figura 9, puedes observar cómo se representa gráficamente un radián. El arco marcado en rojo tiene la misma longitud que cualquiera de los radios de la circunferencia marcados en verde.

Figura 9.
Representación de un radián.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra

El sistema cíclico o circular es muy usado en física y matemáticas, pues nos permite trabajar con fenómenos en donde un objeto gira, vibra o tiene movimiento repetitivo, como el caso de un reloj, las ondas del sonido o el giro de los planetas. Mientras que el sistema sexagesimal nos sirve más para medir ángulos en la vida diaria, el sistema cíclico nos permite entender con mayor precisión los movimientos que se repiten una y otra vez en la naturaleza.

Idea clave 4. Los radianes en una vuelta completa

Recuerda que cuando se tiene un ángulo de $\mathbf{360^\circ}$ se habrán completado $\mathbf{2\pi}$ rad, como consecuencia:

$$\mathbf{2\pi} \text{ rad} = \mathbf{360^\circ}$$

Practiquemos ahora con la conversión de valores de ángulos del sistema cíclico al sexagesimal y viceversa.

Ejemplo 4.

Durante una clase de física, un alumno observa que la rueda de una bicicleta gira un ángulo de $\pi/3$ radianes. Convierte este ángulo a grados sexagesimales.

Solución:

Sabemos que una vuelta completa equivale a:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

De esta relación se obtiene que:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\,\pi} = \frac{360^\circ}{2(3.1416)} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3.1416} \approx 57.3^\circ$$

Usando esta equivalencia podemos realizar el cambio del ángulo cíclico a su valor en el sistema sexagesimal:

$$\frac{3.1416}{3} \text{ rad}\left(\frac{180^\circ}{3.1416 \text{ rad}}\right) = 60^\circ$$

Esta misma equivalencia se escribe de forma más precisa y exacta de la siguiente manera.

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad}\left(\frac{180^\circ}{1\,\pi \text{ rad}}\right) = 60^\circ$$

Da clic en la palabra aquí para que observes cómo gestionar esta misma operación en tu calculadora científica.

Respuesta final: el ángulo recorrido por la rueda de la bicicleta es de 60°.

Ejemplo 5.

En una práctica de laboratorio, una lámpara gira sobre su base formando un ángulo de 2.5 rad para iluminar otra mesa de trabajo. Expresa ese giro en grados.

Solución:

Nuevamente conocemos la relación:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\,\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

De modo que, para el cambio de rad al sistema sexagesimal, establecemos la siguiente relación

$$\mathbf{2.5}\ \text{rad}\left(\frac{\mathbf{180}^\circ}{\mathbf{1}\ \boldsymbol{\pi}\ \text{rad}}\right) = \mathbf{143.2}^\circ$$

Te invitamos a observar el video sobre cómo realizar esta operación en tu calculadora científica dando clic aquí.

Respuesta final: el ángulo que gira la lámpara es de aproximadamente $\mathbf{143.2}^\circ$.

Ejemplo 6.

Una estudiante de astronomía mide la posición de un planeta y encuentra que se ha desplazado un ángulo de $\mathbf{315}^\circ$ con respecto a una referencia fija.

a) Convierte este ángulo a radianes.
b) Si el planeta completara una órbita completa ($\mathbf{360}^\circ$), ¿cuántos radianes más debe recorrer para completar una órbita?

Solución:

a) Sabemos que la relación entre grados y radianes es:

$$\mathbf{180}^\circ = \boldsymbol{\pi}\ \text{rad}$$

Por lo que para la conversión del valor de $\mathbf{315}^\circ$ a rad usamos esta equivalencia de la siguiente forma:

$$\mathbf{315}^\circ\left(\frac{\mathbf{1}\ \boldsymbol{\pi}\ \text{rad}}{\mathbf{180}^\circ}\right) = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\pi}\ \text{rad} = \mathbf{5.49}\ \text{rad} \approx \mathbf{5.5}\text{rad}$$

Dando clic aquí, podrás observar cómo gestionar esta operación usando tu calculadora científica.

Resultado a): el desplazamiento angular del planeta es de aproximadamente $\mathbf{5.5}$ rad.

b) Sabemos que una órbita completa equivale a $\mathbf{360}^\circ$ y que, al haber recorrido $\mathbf{315}^\circ$, aún le faltan $\mathbf{45}^\circ$ para completarla, podemos entonces convertir estos $\mathbf{45}^\circ$ a su valor en rad:

$$\mathbf{45}^\circ\left(\frac{\mathbf{1}\ \boldsymbol{\pi}\ \text{rad}}{\mathbf{180}^\circ}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\pi}\ \text{rad} = \mathbf{0.785}\ \text{rad}$$

Resultado b): al planeta aún le faltan $\frac{\pi}{4}$ rad para completar una vuelta completa.



Actividad 3.
Sistema cíclico

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 3.
Sistema cíclico

Operaciones con ángulos

Hasta ahora hemos aprendido que los ángulos pueden medirse en dos escalas distintas y que podemos hacer conversiones de una a la otra, sin embargo, es importante notar que los ángulos, al igual que los números y las magnitudes físicas, pueden sumarse, restarse, multiplicarse o dividirse. Esto cobra sentido cuando reflexionamos en que cada ángulo representa un giro, y así como podemos sumar longitudes para obtener una distancia mayor o restar tiempos para conocer una diferencia, también podemos sumar o restar ángulos para representar giros más grandes o pequeños, incluso será necesario multiplicar o dividir un ángulo por un número para calcular fracciones o múltiplos de una rotación.

De esta manera, debemos tomar en cuenta que cuando los ángulos están expresados en el sistema sexagesimal (en grados, minutos y segundos), el procedimiento para **sumar ángulos**, muy parecido al de sumar horas, minutos y segundos: los segundos se suman con los segundos, los minutos con minutos y finalmente los grados con los grados; si en el resultado alguno de los valores pasa de su límite ($\mathbf{60}'$ o $\mathbf{60}''$), se convierte a la unidad superior.

Realicemos un ejemplo:

Ejemplo 7.

Dados los ángulos:

$$\alpha = 23^\circ 11' 14'' \text{ y } \beta = 54^\circ 54' 43''$$

Determine la suma $\alpha + \beta$.

Solución:

- Primero procedemos a sumar los segundos:

$$14'' + 43'' = 57''$$

- Esta suma no supera los $60''$ así que los dejamos igual.
- Posteriormente sumamos los minutos:

$$11' + 54' = 65'$$

- Como $65' = 60' + 5'$, equivalen a 1° y $5'$
- Finalmente sumamos los grados:

$$23^\circ + 54^\circ + 1^\circ = 78^\circ$$

Resultado final: la suma de los ángulos $\alpha + \beta = 78^\circ + 5' + 57''$

Este mismo resultado puede ser obtenido a través del uso de tu calculadora, al dar clic aquí podrás visualizar cómo realizar esta operación y obtener el resultado.

Para realizar la **resta entre ángulos**, el procedimiento es muy parecido al de restar horas, minutos y segundos: si los segundos o minutos del minuendo (primer ángulo) son menores que los del sustraendo (el segundo ángulo), debemos "pedir prestado" una unidad del siguiente orden. Realicemos un ejercicio para comprender esta idea:

Ejemplo 8.

Dados los ángulos:

$$\delta = 54^\circ 54' 43'' \text{ y } \gamma = 23^\circ 11' 14''$$

Determine la diferencia $\delta - \gamma$.

Solución:

- Restamos los segundos entre sí:

$$43'' - 14'' = 29''$$

- No fue necesario pedir prestado.
- Restamos los minutos:

$$54' - 11 = 43'$$

- Restamos los grados:

$$54^\circ - 23^\circ = 31^\circ$$

Resultado final: la resta $\alpha - \beta = 31^\circ 43' 29''$

Este mismo resultado puede ser obtenido a través del uso de tu calculadora, al dar clic aquí podrás visualizar cómo realizar esta operación y obtener el resultado.

Ejemplo 9.

Dados los ángulos:

$$\gamma = 48^\circ\ 12'\ 25''\ \text{y}\ \ \phi = 23^\circ 45' 38''$$

Realizar la resta $\gamma - \phi$.

Solución:

- Al querer restar los segundos, nos damos cuenta de que no podemos efectuar esta sustracción debido a que $25''$ es menor que $38''$; entonces, **pedimos prestado** $\mathbf{1}'$ del valor de los minutos:

Restamos $1'$ al valor de los minutos del primer ángulo, es decir:

$$12' - 1' = 11'$$

Convertimos ese $1'$ prestado en $60''$, y los sumamos a los segundos del primer ángulo:

$$60'' + 25'' = 85''$$

Ahora sí podemos restar:

$$85'' - 38'' = 47''$$

- Restamos los minutos, pero al querer realizar esta operación también nos damos cuenta de que no podemos efectuarla por que $11'$ es menor que $45'$, por lo que tenemos que **pedir prestado** $\mathbf{1}^\circ$, de tal manera que lo restamos al valor de los grados del primer ángulo:

$$48^\circ - 1^\circ = 47^\circ$$

Ahora convertimos ese 1° prestado en $60''$, y los sumamos a los $11'$ del segundo ángulo:

$$60' + 11' = 71'$$

Y procedemos a restar:

$$71' - 45' = 26'$$

- Finalmente restamos los grados:

$$47^\circ - 23^\circ = 24^\circ$$

Resultado final: después de este procedimiento, la resta de los ángulos

$$\gamma - \phi = 24^\circ 26' 47''$$

Te sugerimos constatar el resultado obtenido de forma manual con el que se obtiene a través del uso de la calculadora como se explico en el ejemplo anterior.

Así como podemos sumar varias veces una misma cantidad, también podemos **multiplicar un ángulo por un número.** Esto equivale a sumar ese ángulo consigo mismo, tantas veces como lo indique el número. Este procedimiento es útil cuando, por ejemplo, necesitamos obtener el **doble** o el **triple** de un ángulo, o bien **fracciones de una rotación**. Si un ángulo está representado en el sistema sexagesimal, es decir, en grados, minutos y segundos, la multiplicación por el número se hace en los tres niveles, pero debemos tener especial precaución, pues es probable que, al multiplicar la cantidad de minutos o segundos, el resultado exceda las 60 unidades, en cuyo caso debemos considerar convertir el excedente a la unidad superior y sumarla donde corresponda. Realicemos un ejemplo:

Ejemplo 10.

Dado el ángulo:

$$\alpha = 27^\circ 34' 45''$$

Calcule el ángulo $\psi = 3\alpha$.

Solución:

- Multiplicamos primero los segundos por el número 3:

$$3 \times 45'' = 135''$$

como $135'' = 120'' + 15''$, escribimos como resultado para los segundos $15''$ y llevamos $2'$, es decir, $120''$ a los minutos.

- Multiplicamos los minutos del ángulo original por 3 y consideramos los $2'$ resultantes del primer paso:

$$3 \times 34' = 102'$$

$$102' + 2' = 104'$$

ahora como $104' = 60' + 44' = 1^\circ 44'$, escribimos $44'$ como resultado para los minutos y llevamos 1° a los grados.

- Multiplicamos los grados y sumamos 1° que llevamos:

$$3 \times 27^\circ = 81^\circ$$

$$81^\circ + 1^\circ = 82^\circ$$

Resultado final: el resultado de realizar la operación que define al ángulo $\psi = 3\alpha$ es

$$\psi = 3 \times 27°34'45'' = 82°44'15''$$

Este mismo resultado puede ser obtenido a través del uso de tu calculadora, al dar clic aquí podrás visualizar cómo realizar esta operación y obtener el resultado.

También podemos **dividir un ángulo entre un número**, lo que equivale a repartir su abertura en partes iguales, como haciendo rebanadas más pequeñas e iguales de un pastel a partir de una rebanada mayor. Esta operación se utiliza cuando se desea dividir una circunferencia, por ejemplo, en sectores iguales. En este caso debemos tener presente que, si al dividir los grados o minutos se obtiene un número entero y un residuo, este residuo se convierte a la siguiente unidad inferior (minutos o segundos), esto para continuar la división con precisión.

Ejemplo 11.

Divida el siguiente ángulo entre 3:

$$\beta = 125°45'30''$$

Solución:

- Queremos calcular la división $\frac{\beta}{3} = ?$
- Comenzamos dividiendo primero los grados:

$$125° \div 3 = 41° \text{ (enteros) y sobran } 2°$$

estos $2°$ sobrantes se convierten en minutos y se suman a los minutos del ángulo original:

$$2° = 2 \times 60' = 120'$$

$$120' + 45' = 165'$$

- Ahora dividimos los minutos:

$$165' \div 3 = 55'$$

en este caso no sobran minutos, así que seguimos con los segundos.

- Dividimos los segundos:

$$30'' \div 3 = 10''$$

Resultado final: al realizar la división se obtiene

$$\frac{\beta}{3} = \frac{125°45'30''}{3} = 41°55'10''$$

Este mismo resultado puede ser obtenido a través del uso de tu calculadora, al dar clic aquí podrás visualizar cómo realizar esta operación y obtener el resultado.



Actividad 4. Operaciones con ángulos

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 4.
Operaciones con
ángulos

1.1.1 Clasificación de ángulos por su medida y por su posición

Ahora que ya sabemos cómo se mide un ángulo y los instrumentos que podemos usar para realizar estas mediciones, **podemos clasificarlos** de acuerdo con dos criterios:

- **Por su medida**, es decir cuánto se abren sus lados o segmentos de recta,
- **Por su posición**.

Estas clasificaciones nos permitirán identificar ángulos en distintos objetos, en construcciones y situaciones de la vida diaria y, además, podemos analizar también cuestiones más didácticas como los temas que siguen en este *ebook*.

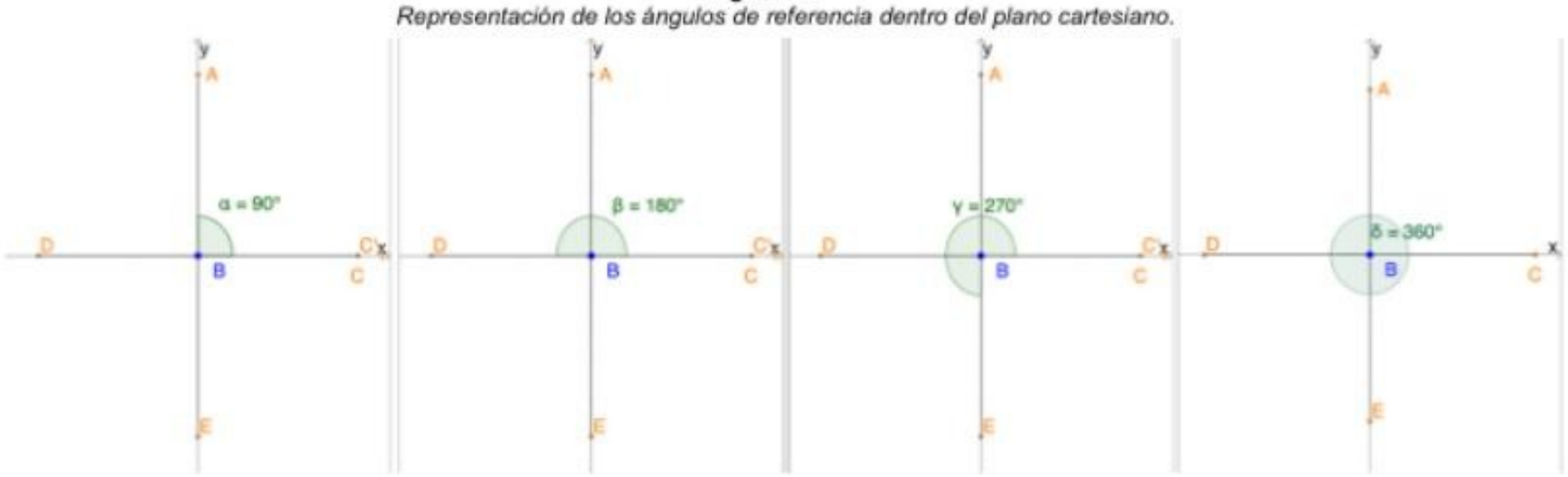
Antes de estudiar cómo se clasifican los ángulos por su medida o por su posición, es importante primero reconocer **cuatro ángulos de referencia**, estos nos ayudarán a comprender cómo se representa un ángulo en un espacio y cómo va cambiando su **posición** mientras crece en valor.

En la Figura 10 se muestran estos cuatro ángulos fundamentales:

- $\alpha = 90^\circ$
- $\beta = 180^\circ$
- $\gamma = 270^\circ$
- $\delta = 360^\circ$

Para cada uno de ellos el punto B representa el vértice del ángulo, y desde él parten los dos segmentos de recta que delimitan el valor correspondiente; a medida que el ángulo gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj pasa por los valores de $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ y finalmente al completar una vuelta completa, llega al valor de 360°, regresando a la posición inicial. Estos cuatro valores marcan los puntos de referencia básicos para medir cualquier otro ángulo dentro del plano y tenerlos presentes permite interpretar fácilmente si un ángulo es mayor o menor que estos valores de referencia y comprender mejor su posición en el espacio.

Figura 10.
Representación de los ángulos de referencia dentro del plano cartesiano.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de los ángulos de referencia dentro del plano cartesiano.]

Tipos de ángulo por su medida. Una vez que conocemos los ángulos de referencia, podemos comenzar con la clasificación de los ángulos de acuerdo con su medida, es decir, según el grado de abertura que existe entre sus lados o semirrecta.

Cada tipo de ángulo tiene un valor característico dentro del sistema sexagesimal, por lo que basta con observar su medida en grados para reconocer a qué grupo pertenece. A continuación, describiremos cada uno de estos grupos:

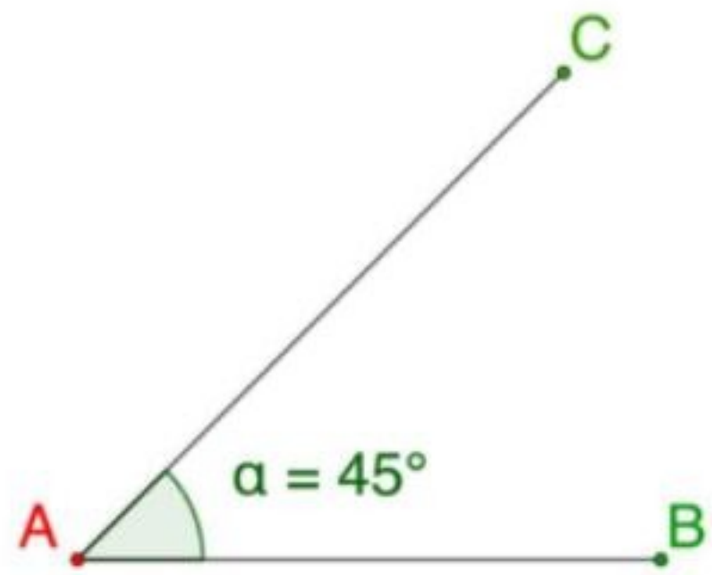
Ángulo agudo

Es aquel cuya abertura es menor que 90° y mayor a 0°.

Por ejemplo, el ángulo que forman las agujas de un reloj a las 10:10, o el que se observa entre las ramas de una honda antes de lanzar una piedra.

En la Figura 11 se muestra un ejemplo de **ángulo agudo**, como el ángulo $\angle \mathrm{BAC} = \mathbf{45}^{\circ}$ cumple con el requisito de tener un valor menor de $\mathbf{90}^{\circ}$.

Figura 11.
Representación de un ángulo agudo.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de un ángulo agudo.] [Representación de un radián.]

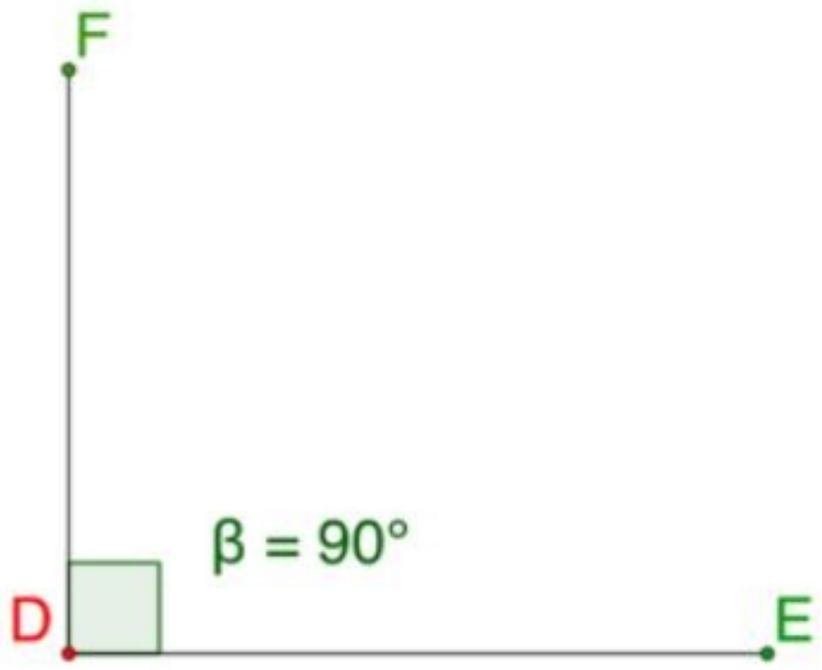
Ángulo recto

Es el ángulo que mide exactamente 90°.

Es el ángulo que forma una esquina perfecta, como la unión entre el piso y una pared, o el borde de una hoja de papel. En los planos y construcciones, este tipo de ángulo se marca con un pequeño cuadrado en el vértice.

En la Figura 12 se aprecia el ángulo $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{90}^{\circ}$, recordemos que este es uno de los ángulos de referencia descritos previamente; el valor de este ángulo también puede ser descrito por el valor $\frac{\pi}{2}$ en el sistema cíclico.

Figura 12.
Representación de un ángulo recto.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de un ángulo recto.]

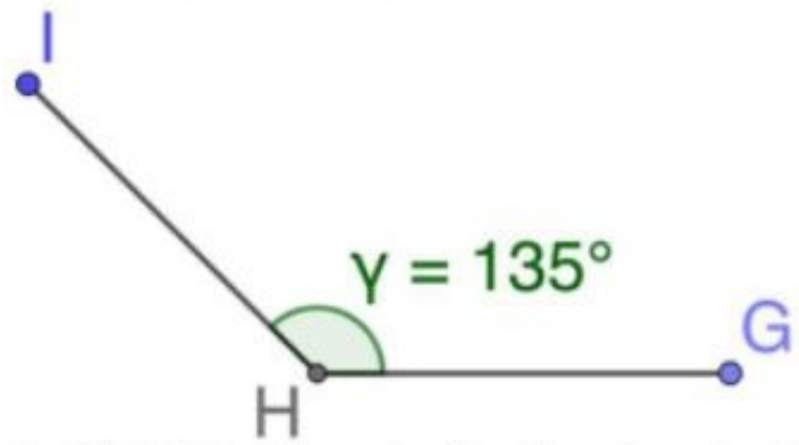
Ángulo obtuso

Su abertura es mayor que 90° pero menor que 180°.

Se aprecia, por ejemplo, cuando una puerta se abre un poco más de la mitad, o cuando los rayos del sol inciden de forma inclinada en la tarde.

En la Figura 13 observamos que el ángulo que se forma entre los puntos $\mathrm{H} - \mathrm{G} - \mathrm{I}$ tiene un valor de $\mathbf{135}^{\circ}$, lo que lo hace un ángulo obtuso.

Figura 13.
Representación de un ángulo obtuso.



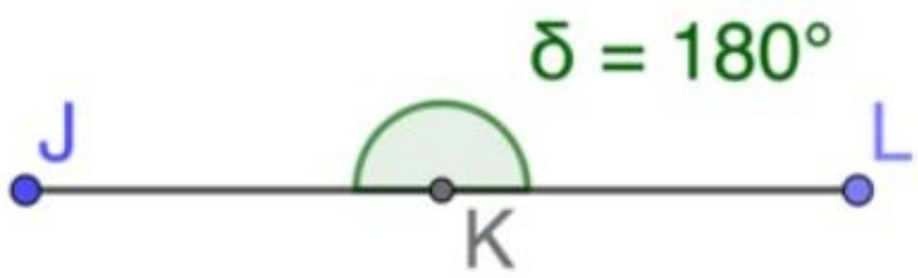
Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de un ángulo obtuso.]

Ángulo llano

Mide exactamente 180°. Representa una línea completamente recta.

Se forma, por ejemplo, cuando una regla se coloca en línea continua sin formar quiebre alguno. Reconocer los ángulos llanos en la vida real es de particular importancia, por ejemplo, cuando abres un cuaderno con espiral completamente la sección del lado derecho forma un ángulo llano con la sección del lado izquierdo. Este ángulo se vuelve vital en las construcciones en las que se unen dos paredes independientes para que resulten estar "a nivel" y garantizar con esto el refuerzo estructural de una pared con otra. La Figura 14 muestra la representación de un ángulo llano entre los segmentos de recta $\overline{\mathrm{JK}}$ y $\overline{\mathrm{KL}}$.

Figura 14.
Representación de un ángulo llano.



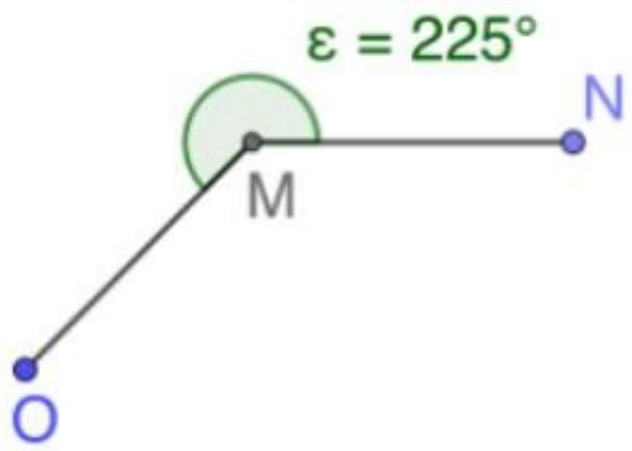
Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de un ángulo llano.]

Ángulo cóncavo o reflejo

Es el que mide más de 180° y menos de 360°.

Se puede observar en la apertura de una sombrilla extendida o en las aspas de un ventilador cuando giran ampliamente. En otras palabras, un **ángulo cóncavo** se forma cuando uno de los segmentos de recta, por ejemplo, en la Figura 15 el segmento $\overline{OM}$, gira más allá del ángulo llano ($\mathbf{180}^{\circ}$), pero sin llegar a completar una vuelta.

Figura 15.
Representación de un ángulo cóncavo.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de un ángulo cóncavo.]

Ángulo completo o perigonal

Mide 360°, es decir, una vuelta completa (Figura 16).

Aparece cada vez que un objeto regresa a su posición inicial después de girar, como la rueda de una bicicleta tras dar una vuelta entera

Figura 16.
Representación de un ángulo perigonal.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra

Cada tipo de ángulo describe una manera distinta en la que los segmentos de recta se separan desde un mismo punto. En la vida diaria, estos ángulos se manifiestan en casi todo lo que gira, se abre o se dobla, desde las manecillas de un reloj hasta el movimiento de un compás o una puerta.

Tipos de ángulo por su posición. Hasta este momento, hemos clasificado los ángulos según cuánto miden, es decir, de acuerdo con la apertura que existe entre sus lados. Sin embargo, también se les puede clasificar según cómo se colocan o relacionan unos con otros en el mismo plano. Esta clasificación nos permite identificar cuándo dos ángulos comparten un lado, o cuando se encuentran uno frente a otro a través del vértice o si se encuentran en posiciones complementarias, es decir tenemos los siguientes tipos:

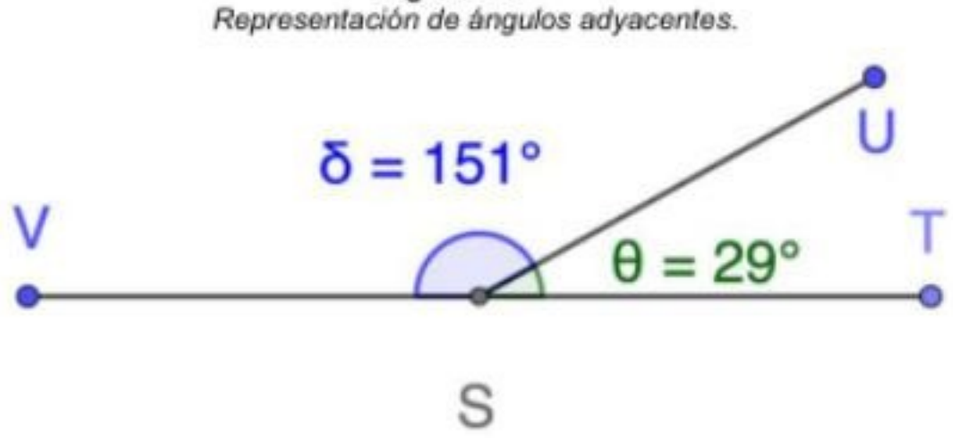
a) Adyacentes,
b) Consecutivos
c) Opuestos por el vértice
d) Complementarios y suplementarios

Ángulos adyacentes

Son aquellos que comparten un mismo vértice y uno de sus lados (o segmentos de recta) pero sus otros lados están en direcciones opuestas, es decir, se encuentran en la misma recta.

En otras palabras, están **uno junto al otro**; en la Figura 17, puedes observar que los ángulos $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\delta}$ son adyacentes, porque comparten la semirrecta $\overline{US}$, pero no la semirrecta $\overline{ST}$ del ángulo $\boldsymbol{\theta}$ que está al lado contrario de la semirrecta $\overline{SV}$, y entre los puntos $V - S - T$ forman un ángulo llano.

Figura 17.
Representación de ángulos adyacentes.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de ángulos adyacentes.]

Una de las características que deben cumplir dos ángulos que son adyacentes es que su suma siempre es $\boldsymbol{180^\circ}$, en este caso el ángulo $\boldsymbol{\delta = 151^\circ}$ más el ángulo $\boldsymbol{\theta = 29^\circ}$ sí cumplen con esta característica pues $\boldsymbol{\delta + \theta = 180^\circ}$. Es decir, los ángulos $\boldsymbol{\delta}$ y $\boldsymbol{\theta}$ son suplementarios (más adelante consideraremos esta definición).

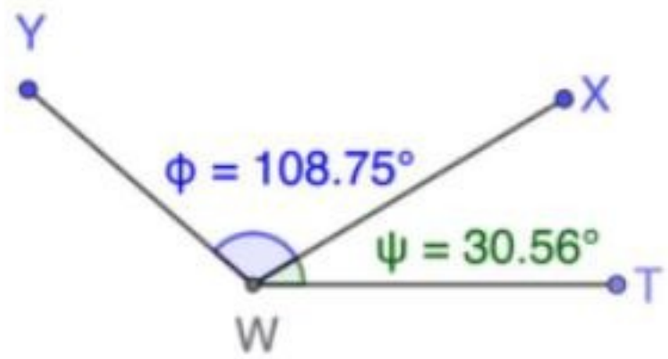
Veamos ahora el segundo tipo de ángulo con respecto a su posición:

Ángulos consecutivos

Son los ángulos que tienen el mismo vértice, y comparten un lado, pero no se superponen, esto quiere decir que están colocados uno después del otro y, los segmentos de recta no compartidos no forman una línea recta.

Observa bien la Figura 18, en esta, los ángulos ψ y ϕ son consecutivos porque comparten el segmento de recta $\overline{WX}$, pero los lados o segmentos de recta $\overline{WY}$ y $\overline{WT}$ no se encuentran en la misma recta.

Figura 18.
Representación de dos ángulos consecutivos.



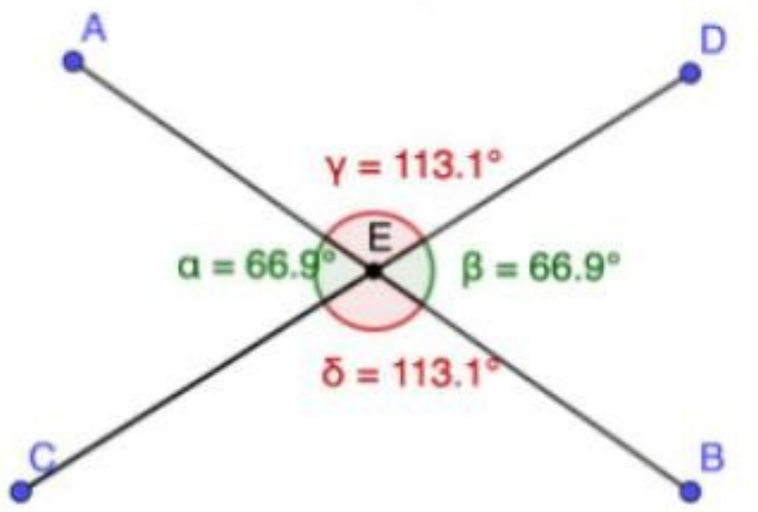
Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de ángulos consecutivos.] [Representación de un ángulo perigonal.]

Ángulos opuestos por el vértice

Se refieren a dos ángulos formados por un par de rectas secantes o también segmentos de recta.

Un aspecto importante es que los ángulos opuestos por el vértice poseen la misma medida o magnitud. Cuando se dice que **dos rectas** son **secantes**, quiere decir que se intersecan en algún punto; si observamos la Figura 19 los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son secantes porque se cortan mutuamente en el punto E, y aquí mismo se originan cuatro ángulos: $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\delta}$. Podemos percatarnos también que los ángulos $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son opuestos por el vértice, pero además tienen la misma magnitud ($\boldsymbol{\alpha = \beta = 66.9^{\circ}}$), de la misma manera los ángulos $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\delta}$ también son opuestos por el vértice y tienen la misma magnitud $\boldsymbol{\gamma = \delta = 113.1^{\circ}}$. Una cuestión adicional es que, al sumar todos los ángulos, el valor resultante es $\boldsymbol{360^{\circ}}$.

Figura 19.
Representación de dos ángulos consecutivos.



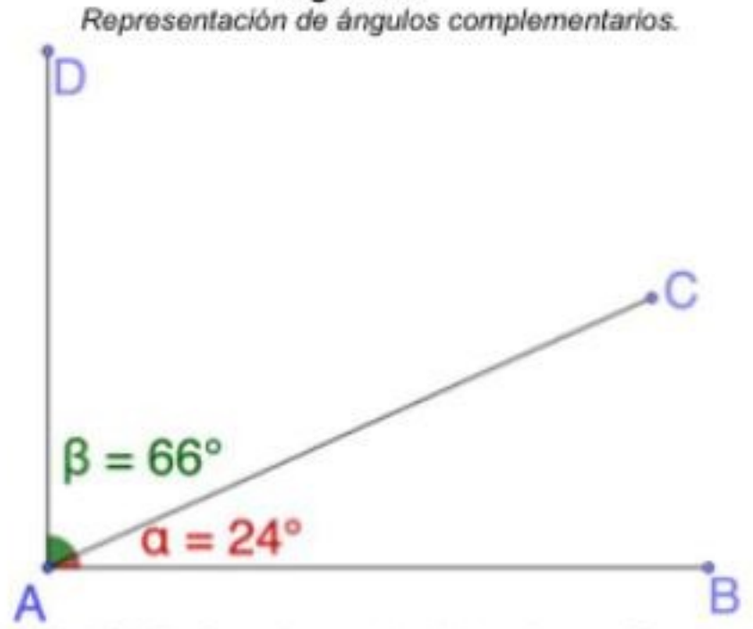
Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de ángulos consecutivos.] [Representación de un ángulo perigonal.]

Ángulos complementarios.

Dos ángulos son complementarios siempre que su suma sea de $\mathbf{90}^\circ$.

Los ángulos $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ de la figura son complementarios porque: $\boldsymbol{\alpha + \beta = 90^\circ}$

Figura 20.
Representación de ángulos complementarios.



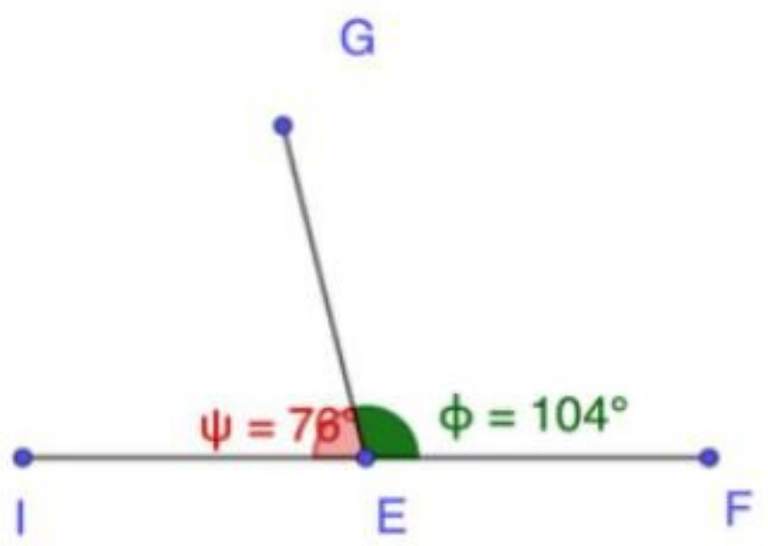
Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de ángulos complementarios.]

Ángulos suplementarios

Dos ángulos son suplementarios siempre que su suma sea 180°.

Para que dos ángulos sean suplementarios no necesariamente tienen que ser consecutivos. En la Figura 21 los ángulos $\boldsymbol{\phi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ son ángulos suplementarios puesto que al sumarlos se obtiene un valor de $\mathbf{180}^\circ$.

Figura 21.
Representación de ángulos suplementarios.



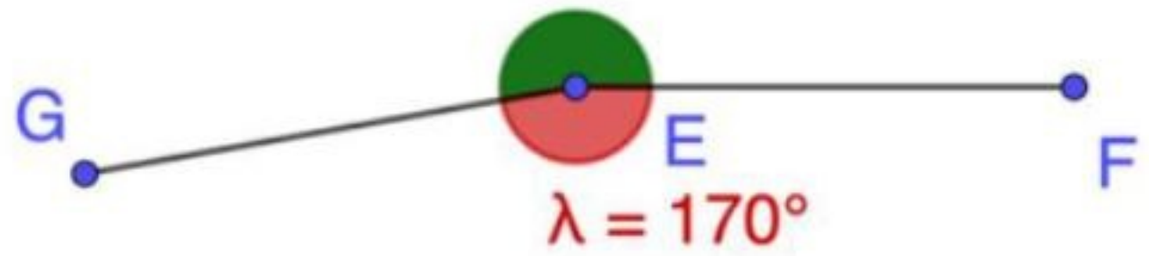
Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de ángulos suplementarios.]

Ángulos conjugados

Dos ángulos son conjugados cuando al sumarlos se obtiene un valor de 360°.

En la Figura 22 los ángulos ε y λ son conjugados puesto que al sumarlos resulta el valor de 360°.

Figura 22.
Representación de ángulos conjugados.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Representación de ángulos conjugados.]

Idea clave 5. Clasificación de los ángulos

Los ángulos se clasifican según su medida (**agudo**, **recto**, **obtuso**, **llano,** etc.) y su posición (**adyacentes, opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios, conjugados,** etc.), para que esta clasificación nos ayude a reconocer las relaciones geométricas entre ellos sin necesidad de medirlos directamente.

Ahora que ya hemos cubierto el tema de la clasificación de los ángulos según su medida y posición, es momento de poner en práctica lo aprendido. En los siguientes ejercicios aplicaremos tanto la interpretación geométrica, así como algunos conceptos básicos de álgebra, lo cual nos ayudará a razonar relaciones entre ángulos y a comprobar que las medidas tienen sentido dentro de un sistema coherente.

Ejemplo 12.

Determina el complemento del ángulo dado por $\alpha = 48^\circ 40'$.

Solución:

- Recordemos que dos ángulos son complementarios si y solo si su suma es equivalente a 90°, de modo que podemos establecer la siguiente expresión cuando se intenta saber el ángulo complementario para α:

$$\alpha + x = 90^\circ 00'$$

- Al resolver la expresión anterior para x se obtiene

$$x = 90^\circ 00' - \alpha$$

$$x = 90^\circ 00' - 48^\circ 40'$$

- Como no podemos hacer la resta en los minutos: $\mathbf{00'-40'}$, tomamos prestado un grado para expresar la cantidad de $\mathbf{90°00'}$ como $\mathbf{89°60'}$, de modo que entonces:

$$\boldsymbol{x = 89°60' - 48°40'}$$

- Al realizar la resta entre grados y entre minutos se obtiene:

$$\boldsymbol{x = 41°20'}$$

Resultado final: el ángulo que es complemento de $\boldsymbol{\alpha}$ es igual a $\boldsymbol{x = 41°20'}$, y lo sabemos puesto que $\boldsymbol{\alpha + x = 48°40' + 41°20' = 89°60' = 90°00'}$.

Ejemplo 13.

Si el suplemento del ángulo $\boldsymbol{\psi}$ es $\boldsymbol{\phi}$, y además este último es igual a $\boldsymbol{\phi = 3\psi + 24°12'}$. ¿Cuál es el valor de cada ángulo $\boldsymbol{\psi}$ y $\boldsymbol{\phi}$?

Solución:

- Sabemos que si $\boldsymbol{\psi}$ y $\boldsymbol{\phi}$ son suplementos, entonces $\boldsymbol{\psi + \phi = 180°00'}$.
- Pero además existe una relación que establece que $\boldsymbol{\phi = 3\psi + 24°12'}$, de tal manera que:

$$\boldsymbol{\psi + (3\psi + 24°12') = 180°00'}$$

- Al simplificar la expresión anterior:

$$\boldsymbol{4\psi = 180°00' - 24°12'}$$

- Nuevamente nos encontramos con la imposibilidad de restar entre minutos, es decir, no podemos realizar la resta $\boldsymbol{00'-12'}$, de modo que lo más conveniente sería expresar la cantidad $\boldsymbol{180°00'}$ como $\boldsymbol{179°60'}$, y entonces:

$$\boldsymbol{4\psi = 179°60' - 24°12' = 155°48'}$$

- Ahora tenemos que realizar la siguiente división en el sistema sexagesimal:

$$\boldsymbol{\psi = \frac{155°48'}{4}}$$

- Al dividir la cantidad de grados entre 4:

$$\boldsymbol{155° \div 4 = 38°} \text{ y sobran } \boldsymbol{3°}$$

- Convertimos ahora este sobrante en minutos, y los sumamos al número $\boldsymbol{48'}$

$$\boldsymbol{3° = 180'}$$

$$\boldsymbol{180' + 48' = 228'}$$

- Ahora dividimos estos minutos totales entre 4:

$$\boldsymbol{\frac{228'}{4} = 57'}$$

- De esta forma, se obtiene que:

$$\boldsymbol{\psi = \frac{155^\circ 48'}{4} = 38^\circ 57'}$$

- Ahora tenemos que hallar el valor de $\boldsymbol{\phi}$:

$$\boldsymbol{\phi + \psi = 180^\circ 00'}$$
$$\boldsymbol{\phi = 180^\circ 00' - 38^\circ 57'}$$
$$\boldsymbol{\phi = 179^\circ 60' - 38^\circ 57'}$$
$$\boldsymbol{\phi = 141^\circ 03'}$$

Resultado final: Los valores para los ángulos $\boldsymbol{\psi}$ y $\boldsymbol{\phi}$ se muestran a continuación: $\boldsymbol{\psi = 38^\circ 57'}$ y $\boldsymbol{\phi = 141^\circ 03'}$.

Ejemplo 14.

En la siguiente figura, tres ángulos ψ, λ y δ que cumplen con el requisito de que al sumarse forman un ángulo llano. Las medidas de estos ángulos son:

$$\psi = 2x + 10°, \lambda = 3x + 25°, \delta = x + 15°$$

Figura 23.
Figura del ejemplo 14.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Figura del ejemplo 14.]

Solución:

- Sabemos que la suma de los tres ángulos forma un ángulo llano:

$$\psi + \lambda + \delta = 180°$$

- Sustituimos las expresiones para cada uno de los ángulos en la ecuación anterior:

$$2x + 10° + 3x + 25° + x + 15° = 180°$$
$$6x + 50° = 180°$$
$$6x = 180° - 50° = 130°$$
$$x = \frac{130°}{6}$$

- Al dividir los $130°$ entre 6, se obtiene:

$$130° \div 6 = 21° \text{ y sobran } 4°$$

- Si convertimos esos $4'$ sobrantes en minutos, y el resultado lo dividimos entre 6:

$$4 \times 60' = 240'$$

$$\frac{240'}{6} = 40'$$

- De tal manera que:

$$x = 21°\,40'$$

- Sustituyendo el valor de x en cada una de las expresiones de definen a los ángulos:

$$\psi = 2x + 10° = 2(21°\,40') + 10° = 42°\,80' + 10° = 52°\,80' = 53°\,20'$$

$$\lambda = 3x + 25° = 3(21°\,40') + 25° = 63°120' + 25° = 65° + 25° = 90°$$

$$\delta = x + 15° = (21°\,40') + 15° = 36°40'$$

Resultado final: Los valores obtenidos para los ángulos son:

$$\psi = 53°\,20'$$

$$\lambda = 90°$$

$$\delta = 36°40'$$

Esto lo podemos comprobar cuando al sumarlos se obtiene un ángulo llano:

$$\psi + \lambda + \delta = 53°\,20' + 90° + 36°\,40' = 179°\,60' = 180$$

Ejemplo 15.

En la figura se muestran cuatro ángulos formados por la intersección de dos segmentos de recta secantes. Si se tiene que:

$$\alpha = 3x + 20°, \qquad \beta = 2x + 10°$$

Determina el valor de los cuatro ángulos.

Figura 24.
Figura del ejemplo 15.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Figura del ejemplo 15.]

Solución:

- Como los dos segmentos de recta se cruzan, se forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice, por lo que:

$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = \delta$$

- La suma de los cuatro ángulos que rodean al punto de intersección es:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

- Sustituyendo las igualdades $(\alpha = \gamma, \beta = \delta)$:

$$2\alpha + 2\beta = 360°$$

- Sustituimos las expresiones dadas para α y β:

$$2(3x + 20°) + 2(2x + 10°) = 360°$$

$$6x + 40° + 4x + 20° = 360°$$

- Al simplificar:

$$10x + 60° = 360°$$

- Al resolver para x:

$$10x = 360° - 60° = 300°$$

$$x = \frac{300°}{10} = 30°$$

- Al sustituir el valor de x para cada ángulo:

$$\alpha = 3x + 20° = 3(30°) + 20° = 110°$$

$$\beta = 2x + 10° = 2(30°) + 10° = 70°$$

$$\gamma = 3x + 20° = 3(30°) + 20° = 110°$$

$$\delta = 2x + 10° = 2(30°) + 10° = 70°$$

Resultado final: Los valores obtenidos para cada ángulo son

$$\alpha = 110°,\ \beta = 70°,\ \gamma = 110°,\ \delta = 70°$$

Que al ser sumados resultan en $360°$.

Ejemplo 16.

Con base en la siguiente figura y considerando que:

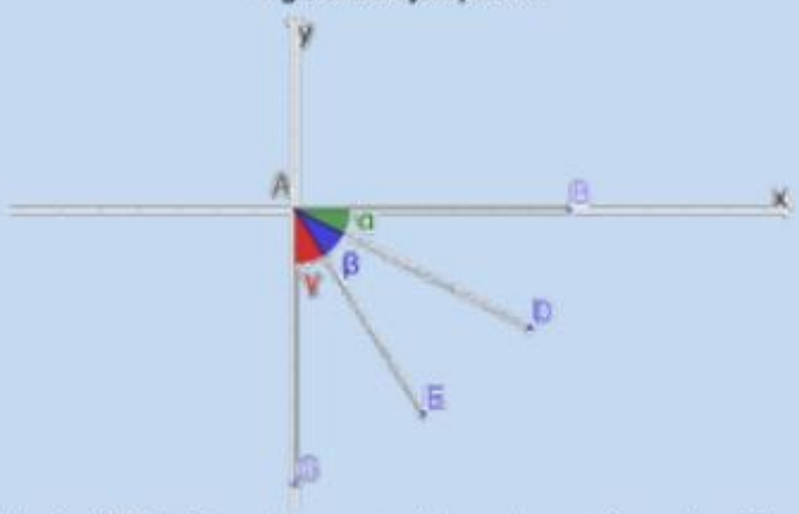
$$\boldsymbol{\alpha = 2x + 2°15'18''}$$

$$\boldsymbol{\beta = 2x + 3°07'27'',}$$

$$\boldsymbol{\gamma = 3x + 12°\,14'33''}$$

Determine los valores respectivos a α, β y γ.

Figura 25.
Figura del ejemplo 16.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Figura del ejemplo 16.]

Solución:

- De acuerdo con la figura y los datos proporcionados, α, β y γ son consecutivos y juntos forman un ángulo recto, es decir:

$$\alpha + \beta + \gamma = 90°00'00''$$

- Al sustituir los valores para cada uno de los ángulos se obtiene:

$$\alpha + \beta + \gamma = 90°00'00''$$

$$(2x + 2°15'18'') + (2x + 3°7'27'') + (3x + 12°14'33'') = 90°00'00''$$

- Al agrupar términos semejantes se obtiene:

$$7x + 17°\,36'\,78'' = 90°00'00''$$

- Observemos que la cantidad de $78''$ se puede expresar como $1'18''$, de modo que la expresión anterior se modifica a:

$$7x + 17°37'18'' = 90°00'00'' = 89°59'60''$$

- De tal manera que al resolver para el término $7x$:

$$7x = 89°59'60'' - 17°37'18''$$

$$7x = 72°22'42''$$

- Para saber el valor de x, se tiene que efectuar la división:

$$x = \frac{72°22'42''}{7}$$

- Al dividir los minutos entre 7:

$$72° \div 7 = 10° \text{ y sobran } 2°$$

- Convertimos esos $2°$ sobrantes a minutos y los sumamos a los $22'$, de forma que:

$$2 \times 60' = 120'$$

$$120' + 22' = 142'$$

- Dividimos esos $144'$ entre 7:

$$142' \div 7 = 20' \text{ y sobran } 2'$$

- Convertimos esos $4'$ sobrantes en segundos y los sumamos a $42''$

$$2 \times 60'' = 120''$$

$$120'' + 42'' = 162''$$

- Dividimos la cantidad de $282''$ entre 7 y lo expresamos con decimales:

$$\frac{162''}{7} = 23\frac{1''}{7} \approx 23.143''$$

- Ahora sí, el valor para $x = 10°20'23\frac{1''}{7}$, de modo que los valores para α, β y γ, son:

$$\alpha = 2x + 2°15'18'' = 2\left(10°20'23\tfrac{1''}{7}\right) + 2°15'18'' = 22°56'04\tfrac{2''}{7}$$

$$\beta = 2x + 3°07'27'' = 2\left(10°20'23\tfrac{1''}{7}\right) + 3°07'27'' = 23°48'13\tfrac{2''}{7}$$

$$\gamma = 3x + 12°14'33'' = 3\left(10°20'23\tfrac{1''}{7}\right) + 12°14'33'' = 43°15'42\tfrac{3''}{7}$$

Resultado final: a través del análisis previo se obtuvieron los siguientes valores para los ángulos

$\alpha = 22°\,56'\,04\frac{2''}{7}$, $\beta = 23°\,48'\,13\frac{2''}{7}$ y $\gamma = 43°\,15'\,42\frac{3''}{7}$, se corrobora que los resultados son correctos pues al sumar estas tres cantidades se obtiene el valor de un ángulo recto.

$$22°\,56'04\tfrac{2''}{7} + 23°\,48'13\tfrac{2''}{7} + 43°\,15'42\tfrac{3''}{7} = 88°119'60'' = 90°00'00''$$



Actividad 5. Clasificación de ángulos

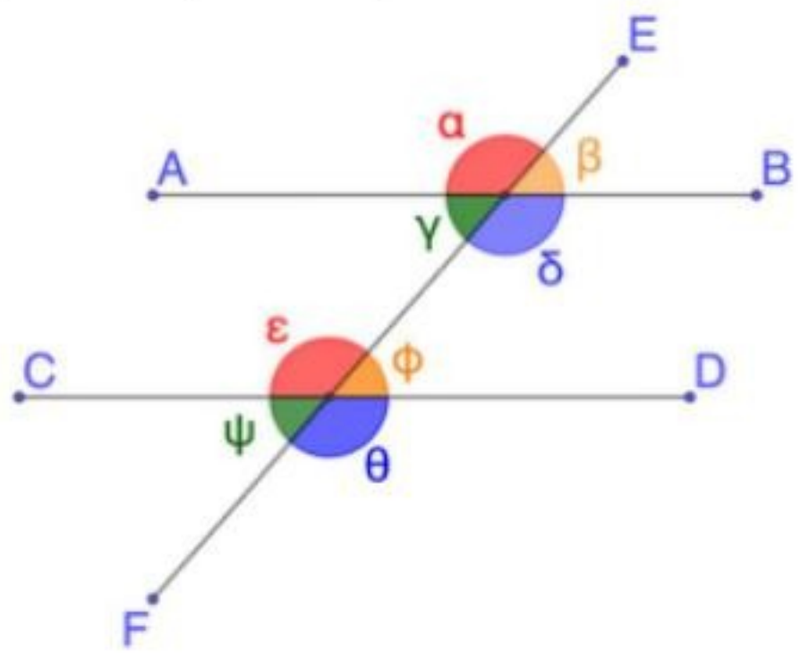
Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 5. Clasificación de ángulos

1.1.2 Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante

Dos rectas son **paralelas** cuando, al extenderse indefinidamente en el mismo plano (x, y), nunca se cruzan, sin importar realmente cuan lejos se prolonguen. Esto ocurre porque las dos rectas mantienen la misma dirección e inclinación en todo su recorrido. En geometría denotamos que dos rectas o segmentos de rectas son paralelas mediante el símbolo (∥). Por ejemplo, en la Figura 26, los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos entre sí, de modo que podríamos denotar este hecho a través de $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; por otro lado, el segmento de recta $\overline{EF}$ corta a las dos rectas paralelas en un punto, de modo que esto la convierte en una recta secante, y al hacerlo se forman ocho ángulos ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi, \psi$ y θ) que presentan relaciones muy especiales y que resultan fundamentales de comprender. De estos ocho ángulos debemos clasificarlos en dos grupos, los ángulos $\gamma, \delta, \varepsilon$ y ϕ se conocen como **ángulos internos**, en tanto que los ángulos α, β, ψ y θ son considerados como **ángulos externos**.

Figura 26.
Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra [Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante.]

Considerando la Figura 26, estos ángulos reciben los siguientes nombres:

Ángulos alternos internos

Se refieren a ángulos internos no adyacentes situados en distinto lado de la secante y que son iguales en magnitud, es decir: $\gamma = \phi$; $\delta = \varepsilon$.

Ángulos alternos externos

Son los ángulos externos no adyacentes que situados en distinto lado de la secante tienen la misma medida, es decir: $\alpha = \theta$, $\beta = \psi$.

Ángulos correspondientes

Se refiere a los ángulos no adyacentes que situados en un mismo lado de la secante tienen la misma magnitud, es decir: $\alpha = \varepsilon,\ \gamma = \psi,\ \beta = \phi,\ \delta = \theta$.

Ángulos colaterales internos (suplementarios)

Son los ángulos internos no adyacentes que estando del mismo lado de la secante suman $180°$. Es decir: $\gamma + \varepsilon = 180°, \delta + \phi = 180°$.

Ángulos colaterales externos (suplementarios)

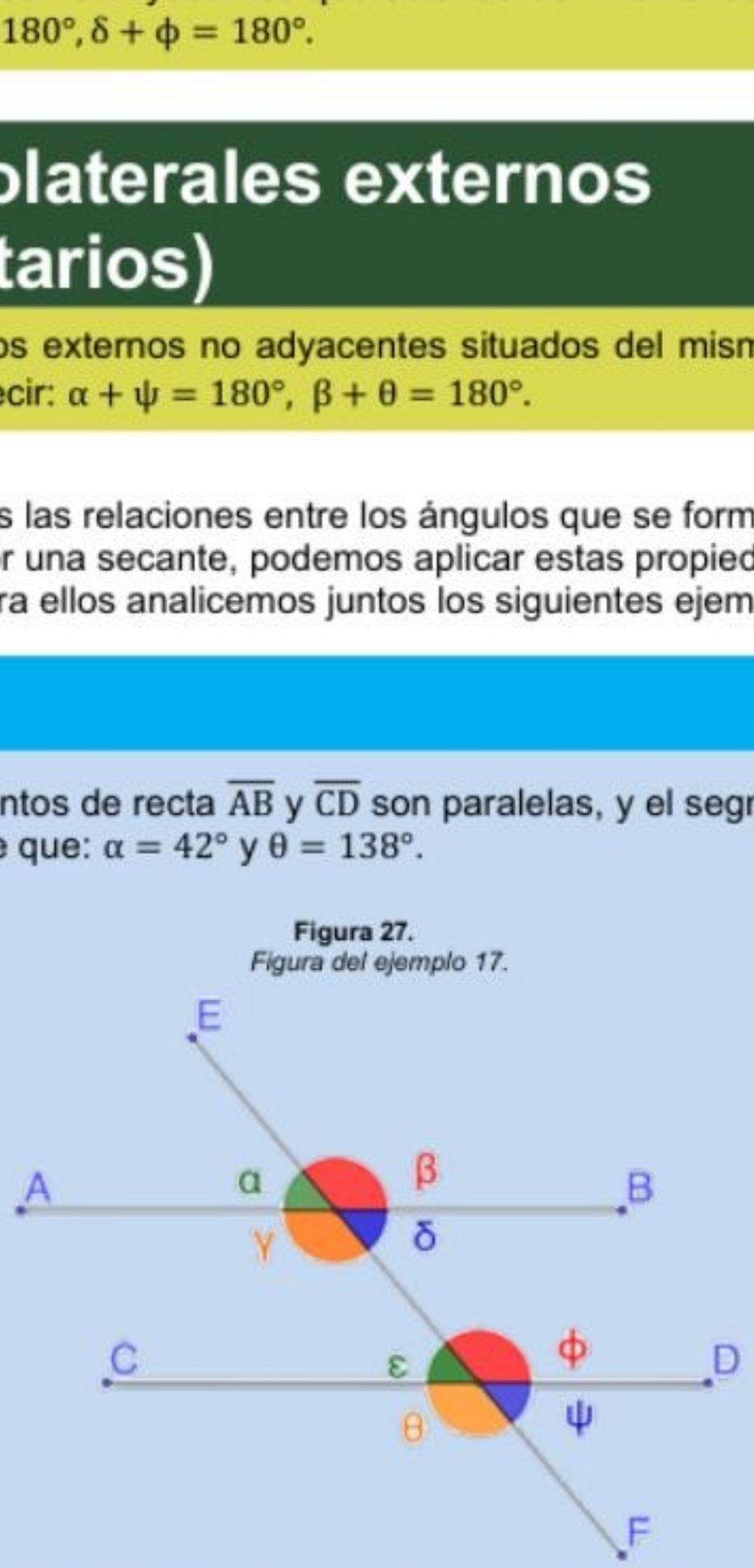
Se refiere a los ángulos externos no adyacentes situados del mismo lado de la secante y que suman $180°$, es decir: $\alpha + \psi = 180°,\ \beta + \theta = 180°$.

Ahora que comprendemos las relaciones entre los ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante, podemos aplicar estas propiedades para determinar valores desconocidos, para ellos analicemos juntos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 17.

En la figura, los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelas, y el segmento de recta $\overline{EF}$ actúa como secante. Se sabe que: $\alpha = 42°$ y $\theta = 138°$.

Figura 27.
Figura del ejemplo 17.



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Creación propia elaborada con Geogebra Figura del ejemplo 17.]

Determina los valores para los ángulos restantes.

Solución:

- **ángulos opuestos por el vértice**:

en el primer ángulo de cruce (arriba)

$$\alpha = \delta = 42°$$

β es opuesto de γ, entonces ambos son iguales. Además β es suplementario de α:

$$\alpha + \beta = 180 \implies \beta = 180° - \alpha = 180° - 42° = 138°$$

$$\beta = \gamma = 138°$$

- **ángulos correspondientes:**

α y ε, son correspondientes, entonces:

$$\alpha = \varepsilon = 42°$$

β y ϕ también son correspondientes:

$$\beta = \phi = 138°$$

Ya conocíamos que $\theta = 138°$, y como ψ y θ son suplementarios, entonces:

$$\psi = 180° - 138° = 42°$$

Resultado final: Los valores para los ángulos son los siguientes

$$\alpha = \delta = \varepsilon = \psi = 42°$$

$$\beta = \gamma = \theta = \phi = 138$$

Idea clave 6. Dos rectas paralelas cortadas por una secante

Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante, los ángulos que se forman guardan relaciones fijas: algunos son iguales y otros son suplementarios.



Actividad 6.
Dos rectas paralelas y una secante, ángulos y más ángulos

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 6.
Dos rectas paralelas y una secante, ángulos y más ángulos

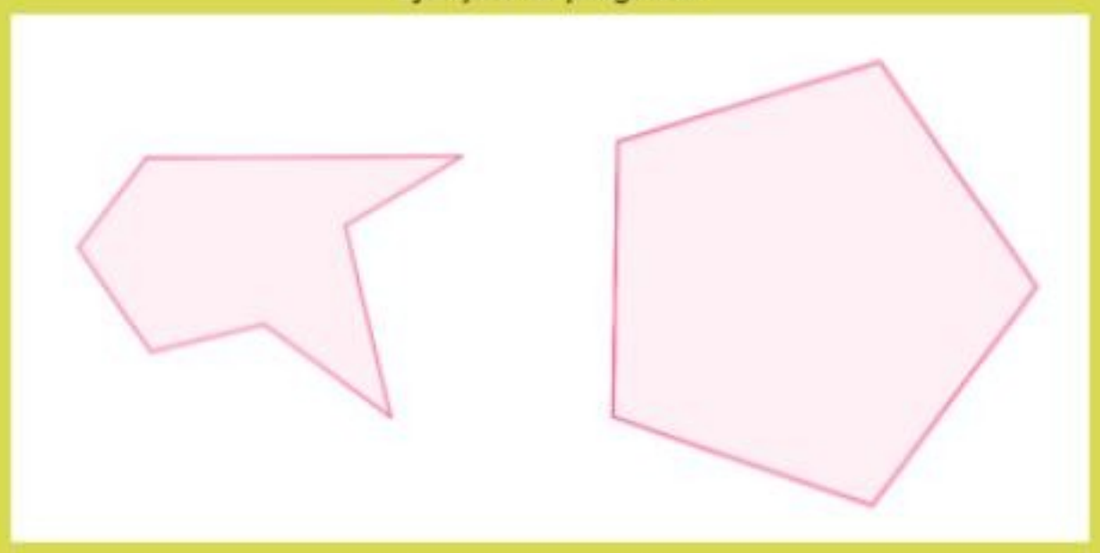
1.2 Polígonos: Conceptos y elementos

En geometría, los polígonos nos ayudan a comprender la forma y estructura de los objetos que nos rodean. Están presentes en construcciones naturales y artificiales desde triángulos hasta hexágonos.

Polígono

Un polígono es una figura geométrica plana, cerrada y formada por un número infinito de segmentos de recta que se unen consecutivamente sin cruzarse entre sí como se muestra en la Figura 28.

Figura 28.
Ejemplos de polígonos.



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Ejemplos de polígonos.]

Los segmentos de recta se conectan de manera consecutiva, sin cruzarse entre sí, formando una figura cerrada. A esos segmentos se les llama lados, si existe una curvatura en la figura, no puede ser un polígono.

Todo polígono está compuesto por partes o elementos geométricos que le dan forma y permiten describirlo matemáticamente. Comprender estos elementos es fundamental para identificar, clasificar y analizar los polígonos.

Los principales elementos de un polígono son: **lados, vértices, ángulos interiores y exteriores, diagonales, centro y apotema.**

Lados

Los lados son los segmentos de recta que forman el contorno o perímetro del polígono, un polígono debe tener mínimo tres lados y no existe un máximo de cantidad de lados.

Vértice

Son las intersecciones o puntos que se generan al unir dos lados o líneas del polígono como se muestra en la **Figura 32**. La cantidad de vértices de un polígono es igual a la cantidad de lados de la figura.

Ángulos interiores

Los ángulos internos son los ángulos formados por dos lados consecutivos dentro del polígono, tal como se observa en la **Figura 32.**

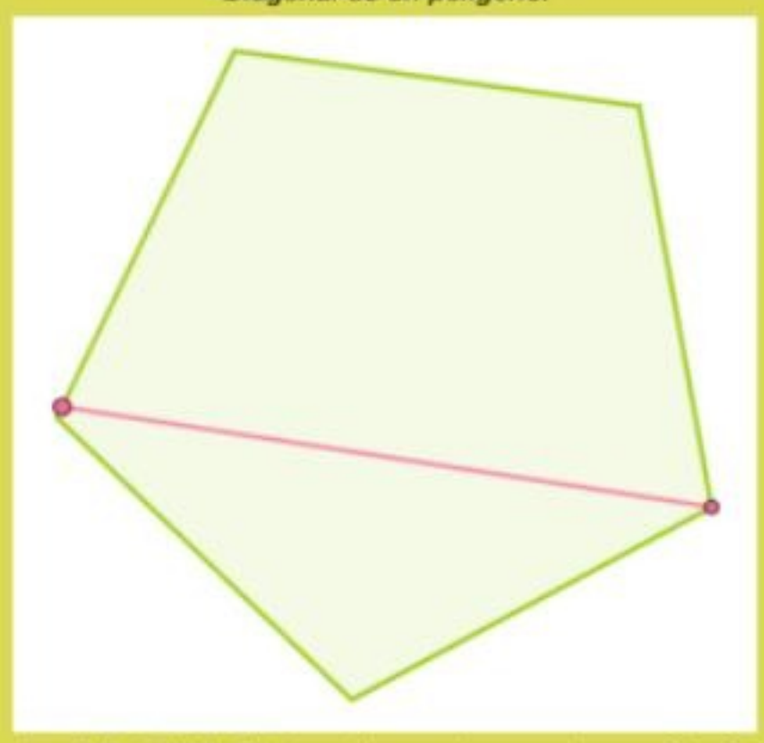
Ángulos exteriores

Los ángulos exteriores se forman al prolongar un lado del polígono y medir el ángulo que se genera con el lado adyacente, de acuerdo con la **Figura 32.**

Diagonal

Las diagonales son los segmentos que unen vértices no consecutivos dentro del polígono, dos vértices son no consecutivos cuando no están unidos directamente por un lado del polígono como lo puedes ver en la Figura 29:

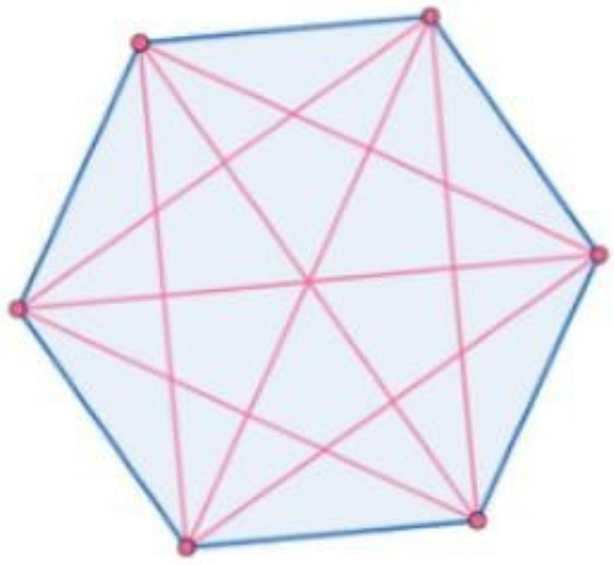
Figura 29.
Diagonal de un polígono.



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Diagonal de un polígono]

En un polígono regular que es una figura plana cerrada formad por lados rectos todos de la misma longitud, todas las diagonales presentan longitudes iguales o simétricas, las diagonales se distribuyen de forma homogénea desde cada vértice, observa la Figura 30:

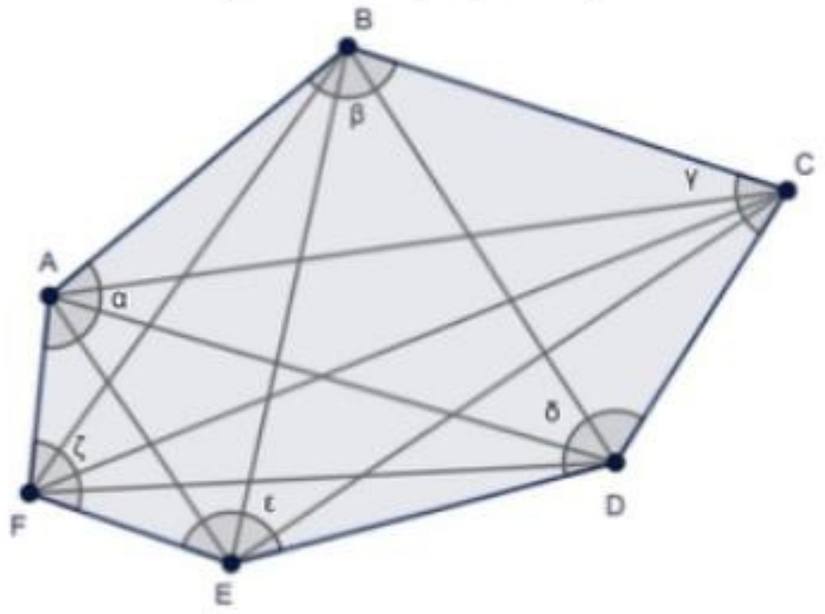
Figura 30.
Diagonales de un hexágono.



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Diagonales de un hexágono]

En un polígono irregular que es una figura plana cerrada cuyos lados y ángulos no son todos iguales, las diagonales no son iguales entre sí, algunas diagonales pueden ser más largas o cortas, incluso pueden salir del contorno de la figura, convirtiéndose en diagonales exteriores.

Figura 31.
Diagonales de un polígono irregular.



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Diagonales de un polígono irregular]

Idea clave 7. Número total de diagonales

Las diagonales dividen al polígono en triángulos, lo que permite calcular la suma de los ángulos interiores.

El número total de diagonales es:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Donde:

$$D = número\ de\ diagonales$$
$$n = número\ de\ lados\ del\ polígono$$

Centro

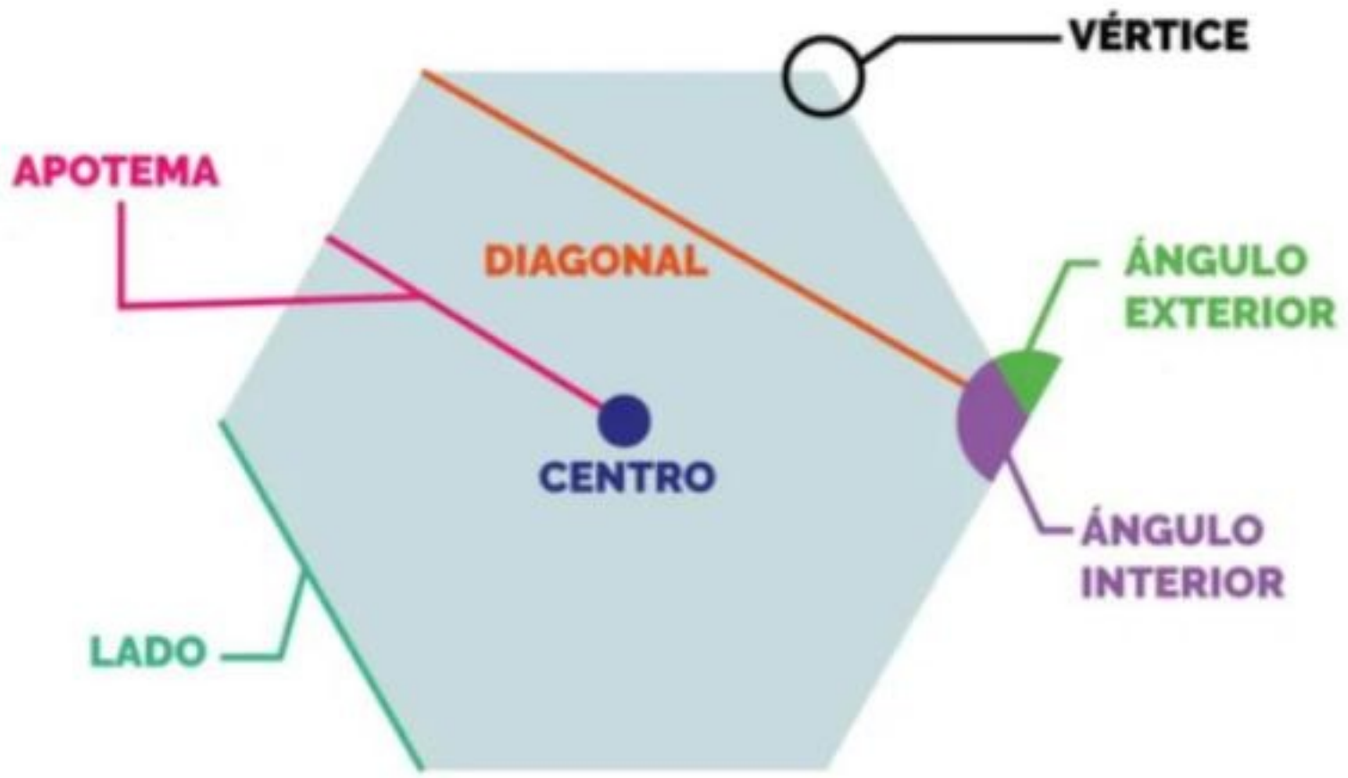
El centro de un polígono regular es el punto que está a la misma distancia de todos los vértices y lados.

Apotema

La apotema en un polígono regular es el segmento que va del centro de un polígono al punto medio de uno de sus lados, formando un ángulo recto con ese lado.

Una vez definido cada elemento en la Figura 32 puedes ver la identificación de cada uno de ellos:

Figura 32.
Elementos de un polígono.



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Elementos de un polígono.]

Los lados y vértices definen su forma; los ángulos determinan su tipo; las diagonales su complejidad interna; el centro y la apotema en los polígonos regulares, permiten estudiar sus propiedades de simetría y calcular su área con precisión.



Actividad 7.
Polígonos y elementos

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 7.
Polígonos y elementos

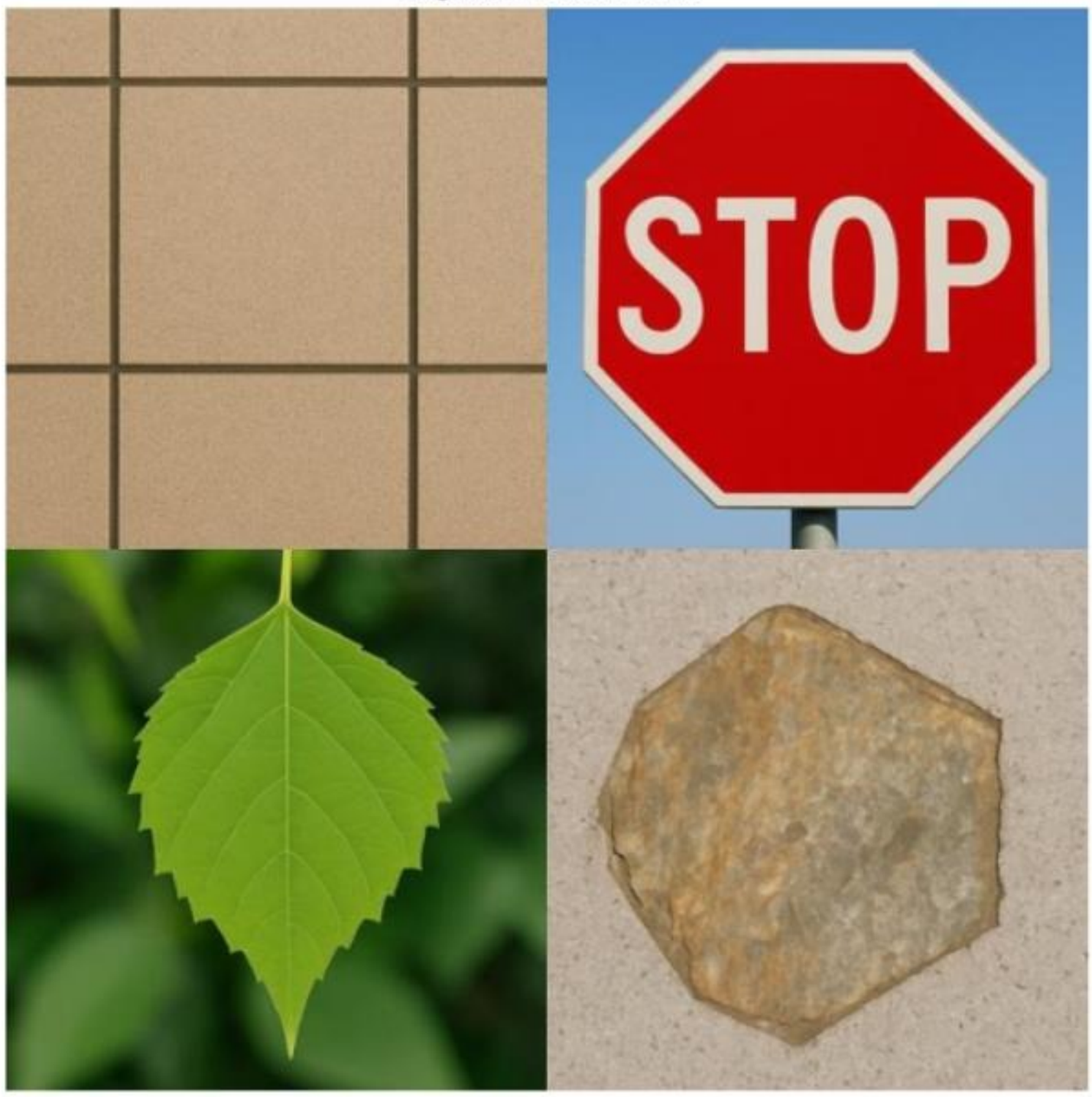
1.2.1 Clasificación de polígonos

Los polígonos forman parte constante del entorno que nos rodea. Su estudio no solo pertenece al ámbito de la geometría, sino que también se aplica en el arte, la arquitectura, la ingeniería y el diseño.

Cada figura poligonal tiene características propias, algunas tienen diferente número de lados; algunas son simétricas, mientras que otras presentan formas irregulares.

Por esta razón, los polígonos se clasifican según diferentes criterios que permiten reconocer sus propiedades y comprender mejor su estructura. A continuación, conocerás los principales criterios de clasificación de los polígonos.

Figura 33.
Polígonos en la vida cotidiana.

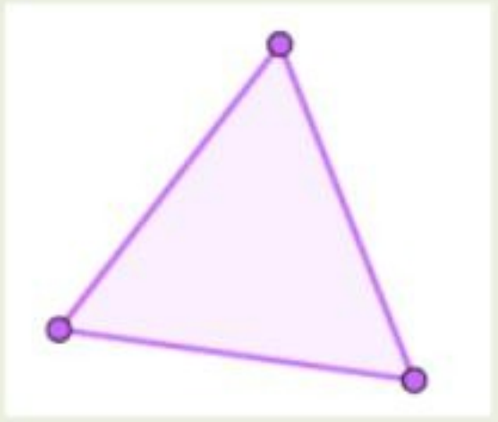
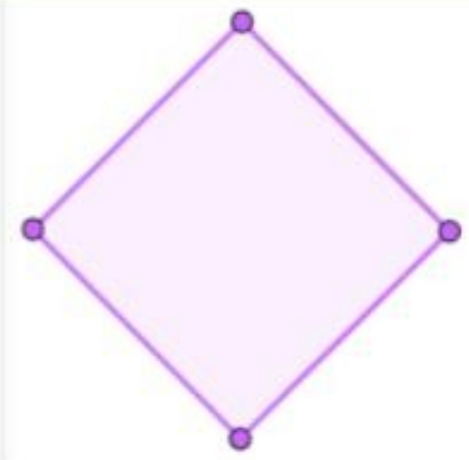
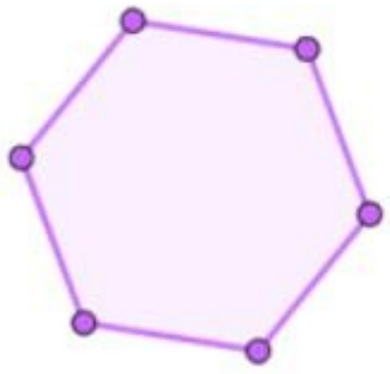


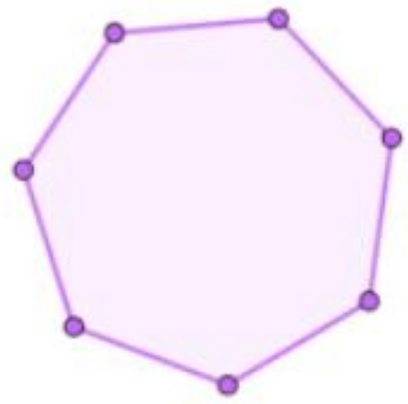
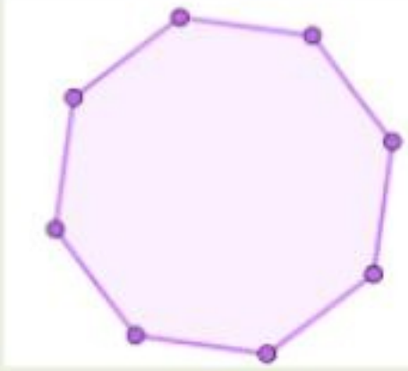
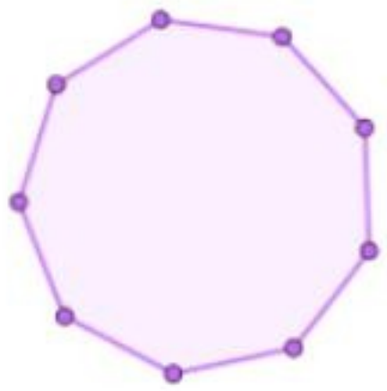
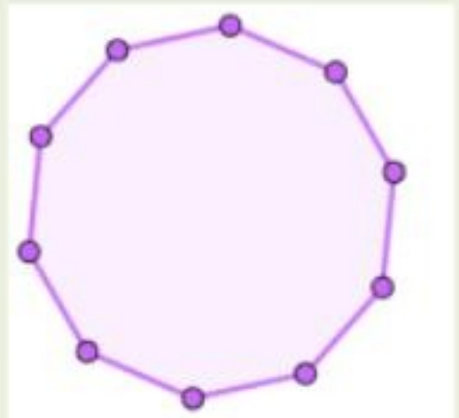
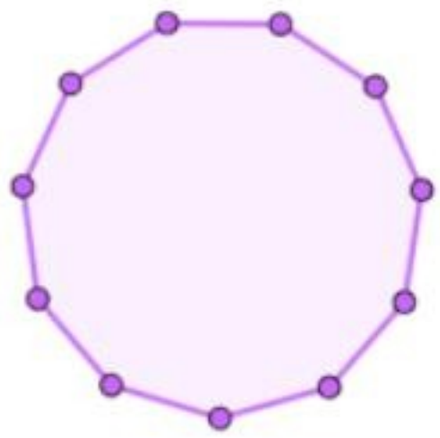
Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Polígonos en la vida cotidiana.]

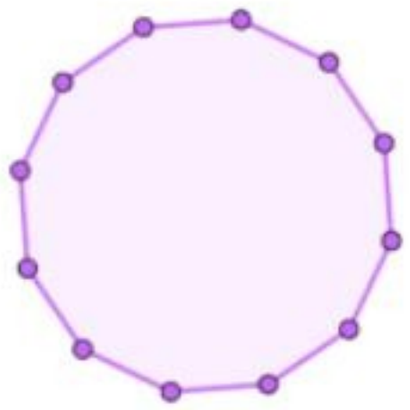
1.2.1.1 Por el número de lados y ángulos

Los polígonos pueden distinguirse, en primer lugar, por la cantidad de lados y ángulos que poseen. A cada tipo de polígono se le asigna un nombre específico según su número de lados; al aumentar la cantidad de lados, también aumenta el número de vértices y ángulos.

Tabla 1.
Clasificación de los polígonos por él número de lados y ángulos.

Número de lados	Nombre del polígono	Figura	Características
3	Triángulo		Figura más simple, tiene tres lados y tres ángulos.
4	Cuadrilátero		Cuatro lados y cuatro ángulos, incluye figuras como el cuadrado y el rectángulo.
5	Pentágono		Cinco lados y cinco ángulos.
6	Hexágono		Seis lados y seis ángulos.

7	Heptágono		Siete lados
8	Octágono		Ocho lados
9	Nonágono		Nueve lados
10	Decágono		Diez lados
11	Endecágono		Once lados

12	Dodecágono		Doce lados
N	Polígono n-gonal		n lados

Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Clasificación de los polígonos por él número de lados y ángulos.]

En todo polígono, el número de lados, vértices y ángulos es el mismo. Comprender esta relación ayuda a observar que cada lado tiene un ángulo asociado, y que, al aumentar el número de lados, la figura se aproxima cada vez más a una forma circular.



Actividad 8. Clasificación de polígonos por número de lados y ángulos

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 8. Clasificación de polígonos por número de lados y ángulos

1.2.1.2 Regulares e irregulares

En tu entorno puedes observar figuras geométricas que, aunque parezcan similares, poseen diferencias en su forma y proporciones. Algunas muestran equilibrio y simetría, como un mosaico de piso o una señal de tránsito; otras, presentan lados y ángulos distintos como la silueta de una piedra o una hoja.

Estas variaciones nos permiten clasificar a los polígonos en **regulares e irregulares**, dependiendo de si todos sus lados y ángulos son iguales o no. Comprender esta distinción te ayudará a reconocer la relación entre simetría y forma.

Polígono regular

Un polígono regular es aquel que tienen las longitudes de sus lados y la medida de los ángulos interiores iguales. Si mides cada lado, todos tendrán la misma magnitud y cada ángulo mide lo mismo.

Figura 34.
Ejemplos de polígonos regulares.



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Diagonal de un polígono]

Los polígonos regulares tienen las siguientes características:

- ✓ Todos sus lados tienen la misma longitud.
- ✓ Todos sus ángulos interiores son iguales.
- ✓ Poseen simetría central y axial, la simetría axial se presenta cuando una figura se puede dividir por una línea y ambos lados queda iguales, como si se reflejara un espejo. La simetría central ocurre cuando una figura se puede reflejar respecto a un punto, de modo que al girarla 180° alrededor de ese punto coincide consigo misma.
- ✓ Pueden inscribirse en una circunferencia (todos sus vértices tocan la misma circunferencia).

Idea clave 8. Suma de los ángulos interiores

En los polígonos regulares, todos los ángulos interiores son iguales; en los irregulares pueden ser diferentes.

La suma de los ángulos interiores es:

$$S = (n-2) \times 180°$$

Donde n es el número de lados del polígono.

Ejemplo 18.

Calcula la suma de los ángulos interiores de un pentágono regular.

Solución

La suma de los ángulos interiores se calcula con la fórmula:

$$S = (n-2) \times 180°$$

Datos:

$$n = 5$$

Sustitución:

$$S = (5-2) \times 180°$$

$$S = 3 \times 180°$$

$$S = 540°$$

La suma de los ángulos interiores de un pentágono regular es de $540°$

Idea clave 9. Suma de los ángulos exteriores

La suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono convexo es siempre 360°, equivale a una vuelta completa.

Cada vértice posee un ángulo exterior, se calcula con:

$$A_e = \frac{360°}{n}$$

y se relaciona con el ángulo interior mediante:

$$A_e = 180° - A_i$$

Los ángulos exteriores son útiles para analizar giros y rotaciones en geometría, diseño y robótica, describen la orientación del polígono en el plano.

Ejemplo 19.

Obtén el ángulo exterior de un hexágono regular sabiendo que cada ángulo interior mide 120°.

Solución:

La fórmula que utilizaremos es:

$$A_e = 180° - A_i$$

Datos:

$$A_i = 120°$$

Sustitución:

$$A_e = 180° - 120°$$

$$A_e = 60°$$

Cada ángulo exterior del hexágono regular mide $60°$.

Polígono irregular

Un polígono irregular es aquel que no tiene todos sus lados ni todos sus ángulos iguales. En ese tipo de figura, puede haber lados de diferente longitud o ángulos de distintas medidas.

Figura 35.
Ejemplos de polígonos irregulares.

Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia creada con GeoGebra. [Ejemplos de polígonos irregulares.]

Los polígonos irregulares tienen las siguientes características:

- ✓ Los lados pueden tener longitudes distintas.
- ✓ Los ángulos interiores no son todos iguales.
- ✓ Generalmente no poseen simetría.
- ✓ No siempre pueden inscribirse en una circunferencia.

Idea clave 10. Perímetro (P)

Los lados definen el perímetro (P) del polígono, que se calcula sumando las longitudes de todos los lados:

$$P = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n$$

En polígonos regulares:

$$P = n \times L$$

Donde n es el número de lados y L la longitud de cada lado.

Ejemplo 20. Perímetro de un polígono regular

Calcula el perímetro de un hexágono regular (seis lados iguales) donde cada lado mide 7.5 cm

Solución:

Utilizamos la expresión:

$$P = n \times L$$

Datos:

$$n = 6$$

$$L = 7.5\ cm$$

Sustitución:

$$P = 6 \times 7.5$$

$$P = 45\ \text{cm}$$

El perímetro del hexágono regular es de $45\ \text{cm}$

Ejemplo 21.

Obtén el número de diagonales que se pueden trazar en un heptágono regular.

Solución:

Para obtener el número total de diagonales utilizamos la fórmula:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Datos:

$$n = 7$$

Sustitución:

$$D = \frac{7(7-3)}{2}$$

$$D = \frac{7(4)}{2}$$

$$D = \frac{28}{2}$$

$$D = 14$$

El heptágono regular tiene 14 diagonales en total.



Actividad 9.
Polígonos regulares e irregulares

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 9.
Polígonos regulares e irregulares

1.2.1.3 Cóncavos y convexos

Como has tenido la oportunidad de analizar en temas pasados, los polígonos se clasifican de diversas formas atendiendo a una u otra propiedad o característica, en esta ocasión hablaremos de los **polígonos cóncavos y convexos**, los cuales están relacionados con la medida de sus ángulos internos, aunque de forma análoga, esta clasificación puede atenderse desde el punto de vista de diagonal.

Polígono convexo

Es un polígono en el cual todos sus **ángulos interiores** miden menos de 180°.

Como se mencionó en la idea clave 8, la suma de los ángulos interiores de un polígono se calcula con la fórmula:

$$\boldsymbol{S = (n-2) \times 180^\circ}$$

Por lo que la medida de un solo ángulo interior de un polígono regular se obtiene dividiendo esa suma entre el número de lados.

Llamemos $\boldsymbol{A}$ a un ángulo cualquiera de un polígono regular, entonces:

$$\boldsymbol{A = \frac{S}{n} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}}$$

Con $\boldsymbol{n}$ igual al número de lados del polígono regular, entonces, cada ángulo interior de un cuadrado (cuadrilátero regular) $\boldsymbol{n = 4}$ mide:

$$\boldsymbol{A = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = \frac{(4-2) \times 180^\circ}{4} = \frac{(2) \times 180^\circ}{4} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ}$$

De forma similar se puede calcular la medida de cada ángulo interno de un pentágono $\boldsymbol{n = 5}$:

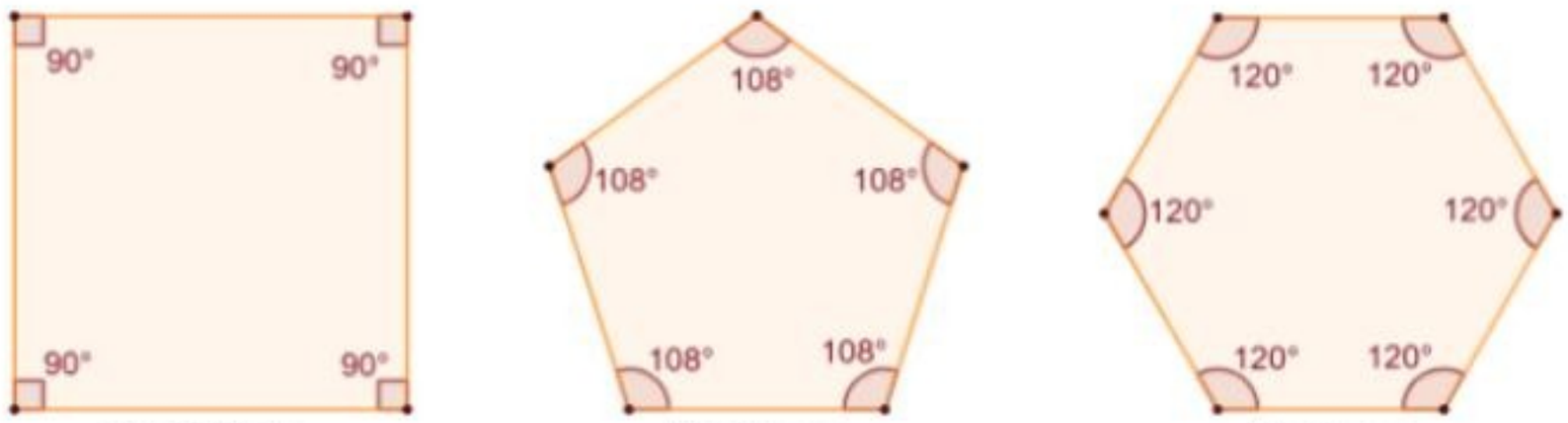
$$\boldsymbol{A = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = \frac{(3) \times 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ}$$

Y de un hexágono $\boldsymbol{n = 6}$:

$$\boldsymbol{A = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = \frac{(4) \times 180^\circ}{6} = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ}$$

En la Figura 36 se muestran ejemplos de estos **polígonos regulares** en donde puedes observar que sus **ángulos interiores miden menos de 180°**, por lo que, por la Definición 31, son polígonos convexos:

Figura 36.
Ángulos interiores en polígonos regulares convexos.

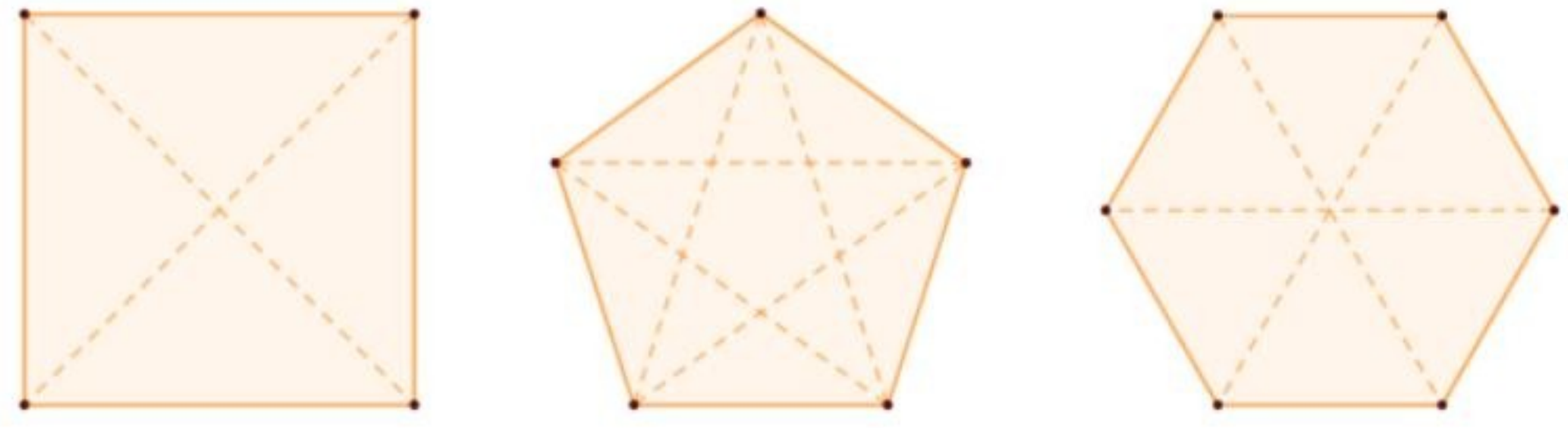


Cuadrilátero regular convexo | Pentágono regular convexo | Hexágono regular convexo

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Ángulos interiores en polígonos regulares convexos.]

También es posible definir a un polígono convexo considerando sus **diagonales**, ya que todas ellas son internas, es decir, están dentro del polígono, analiza esto en la Figura 37 donde las diagonales interiores están trazadas con segmentos punteados:

Figura 37.
Diagonales interiores (segmentos punteados) en polígonos regulares convexos.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Diagonales interiores (segmentos punteados) en polígonos regulares convexos.]

Idea clave 11. Todo polígono regular es convexo

En la idea clave 8 aprendimos que la suma de ángulos interiores de un polígono está dada por:

$$S = (n-2) \times 180°$$

Para un polígono hexagonal, por ejemplo, la suma de sus ángulos internos es:

$$S = (6-2) \times 180° = (4)180° = 720°$$

Esta afirmación es válida y verdadera para un hexágono así sea regular o irregular.

Analicemos un ejemplo particular para un hexágono en el que vamos a suponer que cada ángulo interno (porque deben ser iguales por ser regular) es mayor de 180°, podemos elegir cualquier número, por ejemplo 190° (puedes intentarlo con cualquier otro), entonces la suma de sus ángulos internos sería:

$$S = 190°(6) = 1140°$$

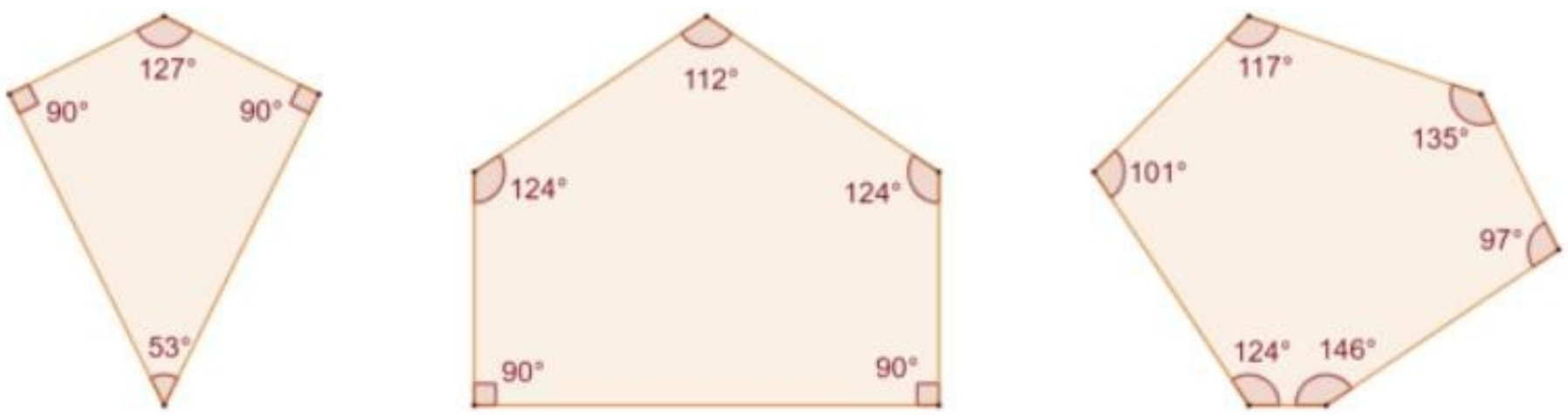
Podemos observar que $1140° > 720°$, lo cual **contradice la definición de suma de ángulos internos** de un polígono cualquiera, por lo tanto, los polígonos regulares tienen ángulos interiores menores a 180°.

Haber elegido un número mayor a 180° y llegar a una contradicción, se conoce en matemáticas como **reducción al absurdo**, lo cual es bastante útil para realizar demostraciones importantes como que todo polígono regular es convexo.

Comprueba la idea clave 11 con ayuda de tus compañeros y tu profesor.

No solamente los polígonos regulares son convexos, **existen algunos polígonos irregulares que son convexos**, observa algunos ejemplos en la Figura 38, estos tienen todos sus ángulos internos menores a 180°:

Figura 38.
Ángulos internos en polígonos irregulares convexos.

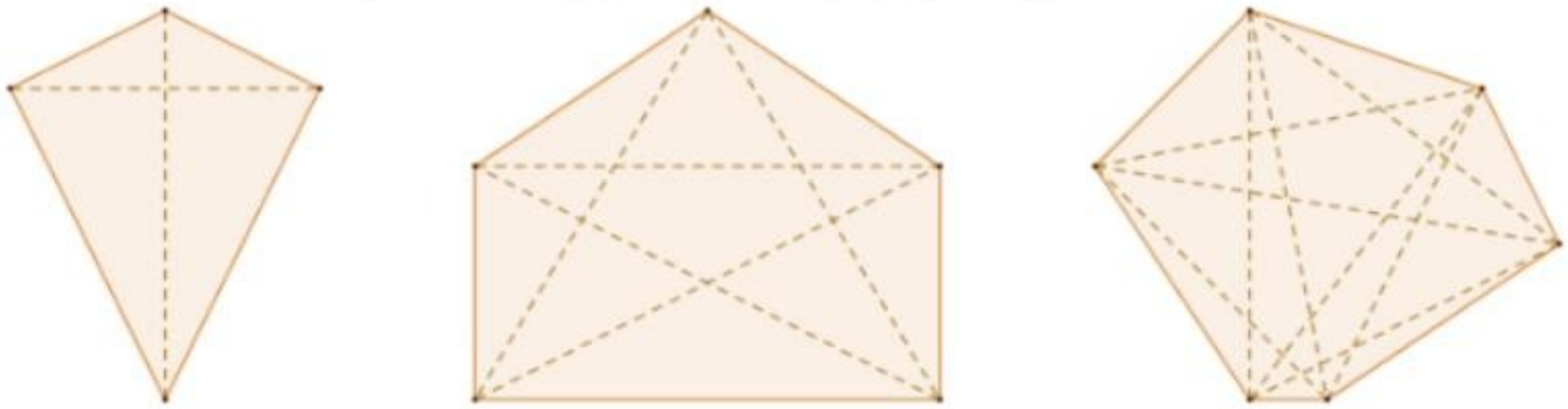


Cuadrilátero irregular convexo	Pentágono irregular convexo	Hexágono irregular convexo

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Ángulos internos en polígonos irregulares convexos.]

De igual forma que con los polígonos regulares convexos, las diagonales de los polígonos irregulares convexos son interiores, observa la Figura 39 y compruébalo, las **diagonales interiores** están representadas con segmentos punteados:

Figura 39.
Diagonales interiores (segmentos punteados) en polígonos irregulares convexos.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Diagonales interiores (segmentos punteados) en polígonos irregulares convexos.]

Ahora veamos cuáles son algunas características de los polígonos cóncavos:

Polígono cóncavo

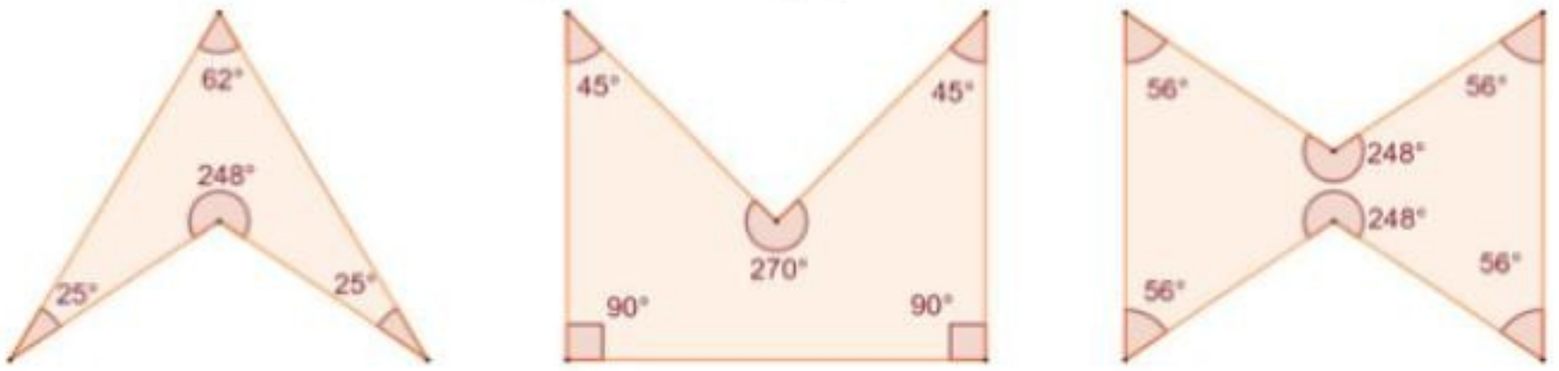
Es un polígono que posee, al menos, un ángulo interior mayor a 180°.

Idea clave 12. Todo polígono cóncavo es irregular

Como se mostró en la idea clave 11 **los polígonos regulares NO pueden tener ángulos interiores mayores a 180°**, por lo tanto, en caso de que un polígono posea al menos un ángulo mayor de 180° debe ser irregular.

La Figura 40 muestra algunos ejemplos de polígonos cóncavos incluyendo sus respectivos ángulos internos, observa que, además, son irregulares:

Figura 40.
Ángulos interiores en polígonos cóncavos.



Cuadrilátero irregular cóncavo

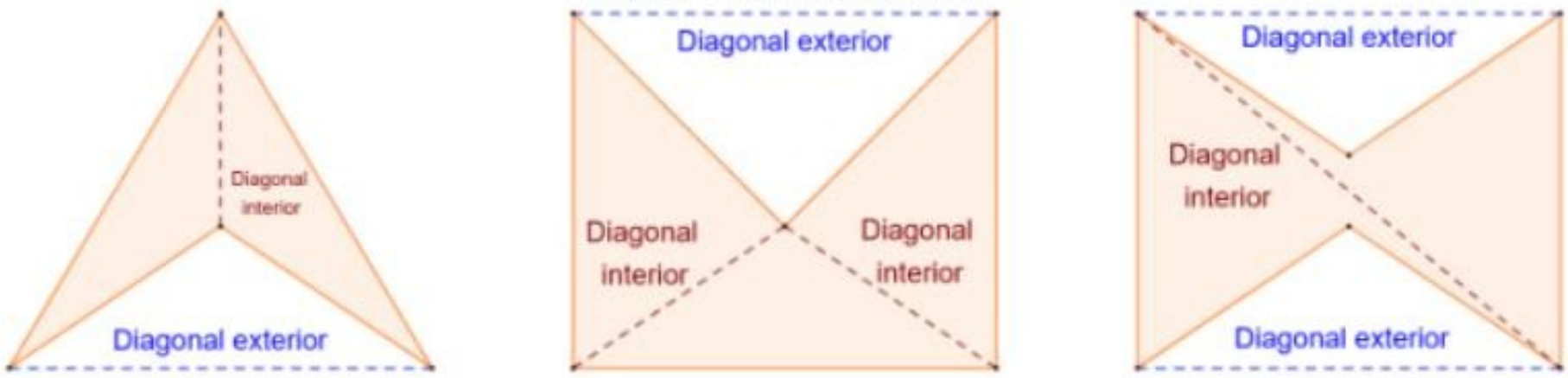
Pentágono irregular cóncavo

Hexágono irregular cóncavo

Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Ángulos interiores en polígonos cóncavos]

Por último, la Figura 41, muestra algunas diagonales en algunos polígonos cóncavos, no se trazan todas para evitar confusión con el exceso de líneas en la imagen, observa que **algunas de esas diagonales son interiores y otras son exteriores**:

Figura 41.
Diagonales en polígonos cóncavos.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Diagonales en polígonos cóncavos.]

Con ayuda de tus compañeros y tu profesor, **analicen diversos polígonos que puedan observar en su entorno**, represéntenlos en la libreta y definan si se trata de polígonos convexos o cóncavos. Ayúdense de la noción de ángulo mayor a 180° y de las diagonales interiores y exteriores.



Actividad 10.
Polígonos cóncavos y convexos

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 10.
Polígonos cóncavos y convexos

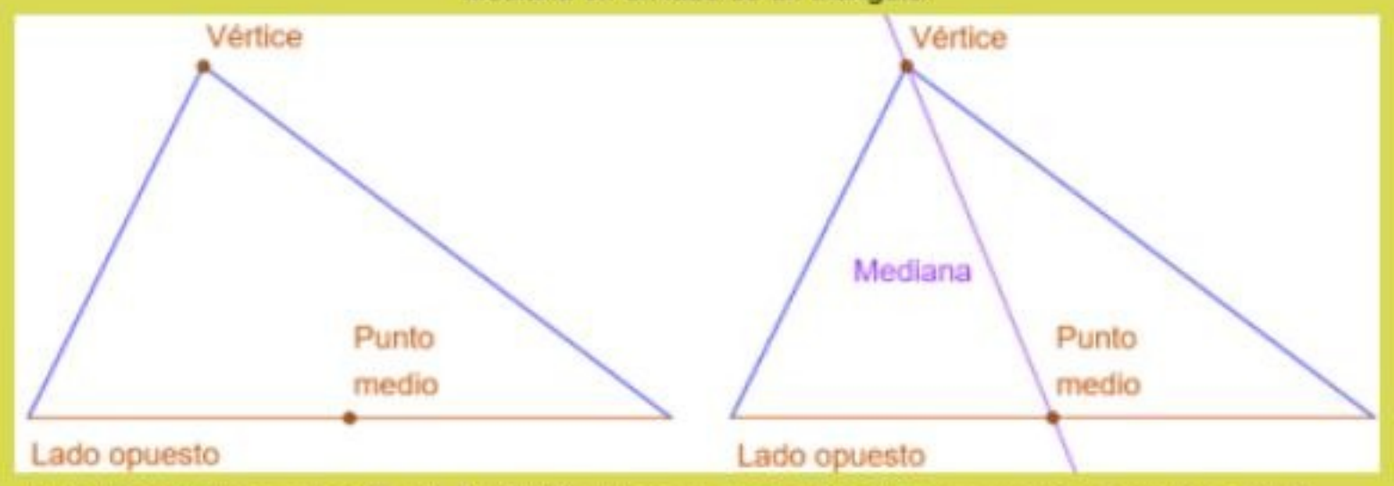
1.3 Rectas y puntos notables de un triángulo

Además de los lados, en un triángulo se pueden identificar elementos importantes que se emplean con diferentes objetivos, en este apartado hablaremos de 4 rectas notables y sus respetivas intersecciones: **mediana, mediatriz, bisectriz y altura**.

Mediana

Una mediana es la recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto, como se muestra en la Figura 42:

Figura 42.
Mediana en un lado de un triángulo.

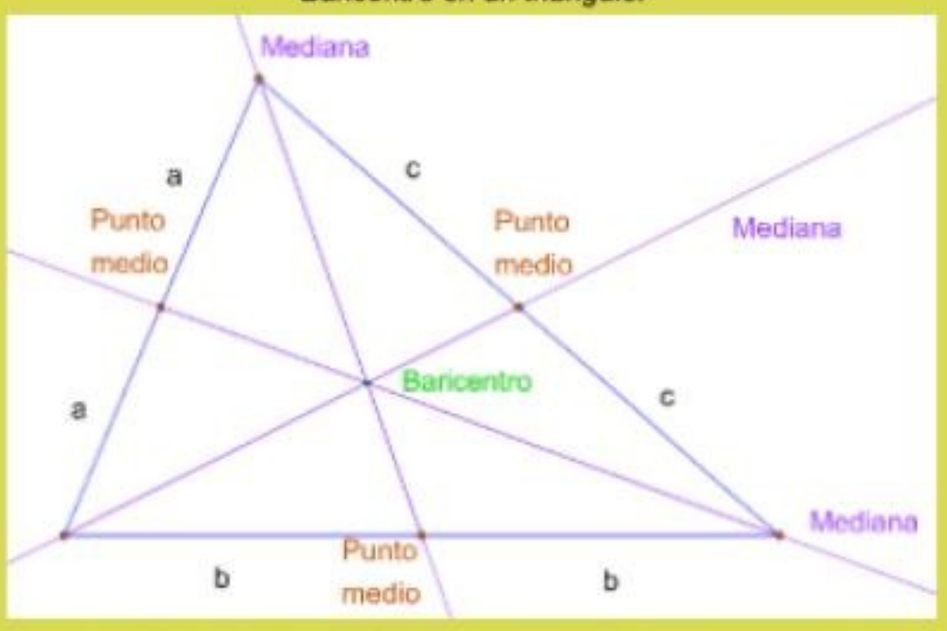


Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Mediana en un lado de un triángulo.]

Baricentro

El baricentro es el punto donde se intersecan las 3 medianas de un triángulo, como se muestra en la Figura 43. También es llamado centroide, gravicentro o centro de gravedad. El baricentro siempre queda al interior del triángulo.

Figura 43.
Baricentro en un triángulo.

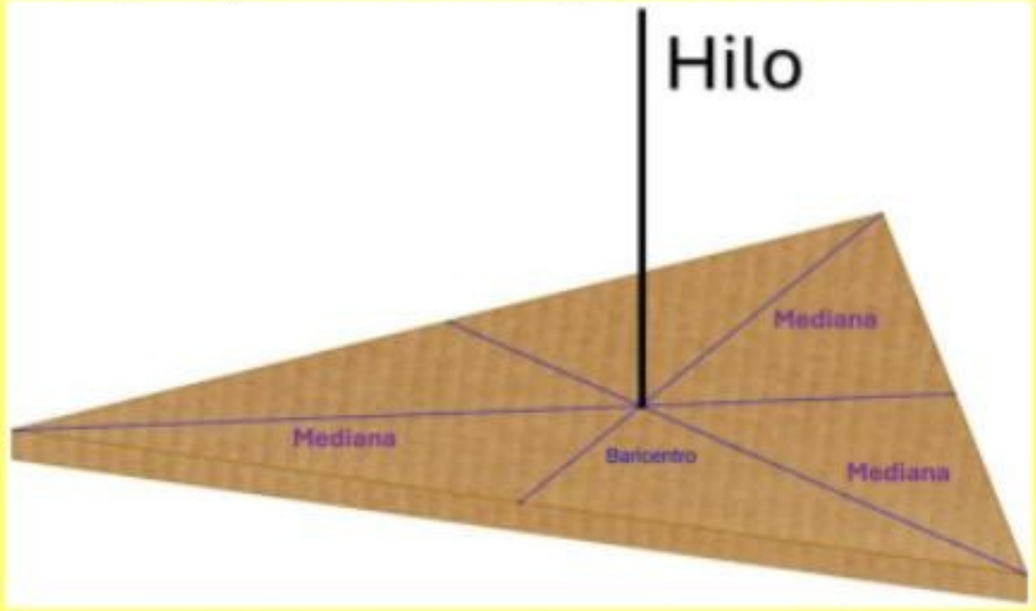


Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Baricentro en un triángulo.]

Idea clave 13. Equilibrando un triángulo

Una de las utilidades del baricentro es equilibrar un triángulo. Imagina que tienes un triángulo de cartón (o algún otro material firme y uniforme) y deseas colgarlo horizontalmente con un solo hilo, para lograrlo, puedes colocar ese hilo justo en el baricentro como se muestra en la Figura 44:

Figura 44.
Triángulo suspendido horizontalmente por un hilo desde su baricentro.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Triángulo suspendido horizontalmente por un hilo desde su baricentro.]

De forma similar, en lugar de que se emplee un hilo, se puede emplear una columna, para equilibrar estructuras triangulares desde un solo soporte, esto sería muy útil para arquitectura, por ejemplo.

Por esta propiedad, el baricentro en un triángulo sólido uniforme es conocido en Física como centro de masa.

Idea clave 14. Relación 2 a 1 de una mediana partida por el baricentro

Otra propiedad importante del baricentro es que divide a cualquier mediana en una relación 2 a 1, por ejemplo, si una mediana de un triángulo mide 12 cm, entonces, la distancia del vértice al baricentro mide 8 cm y la distancia del baricentro al punto medio del lado opuesto mide 4 cm, así sucede de forma general con los demás segmentos, observa la Figura 45 y analiza esta propiedad:

Figura 45.
Relación 2 a 1 de las medianas de un triángulo partidas por el baricentro.

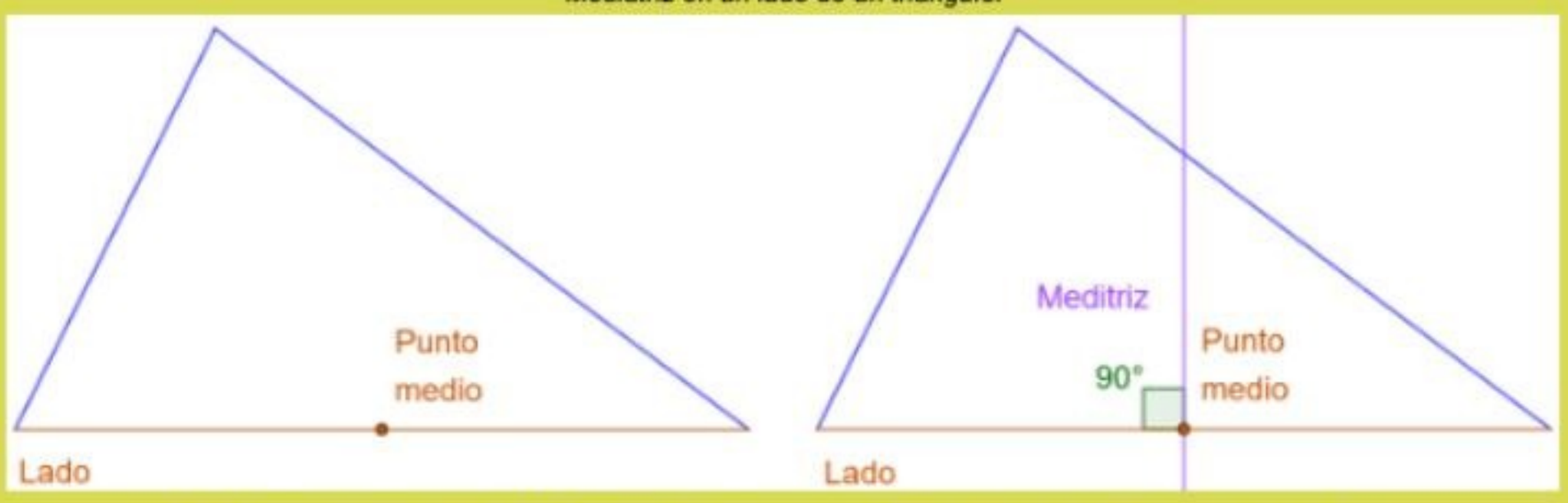


Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Relación 2 a 1 de las medianas de un triángulo partidas por el baricentro.]

Mediatriz

Una mediatriz es la recta que pasa por el punto medio de un lado de un triángulo y es perpendicular a este, es decir, forma un ángulo de 90° con ese lado como se observa en la Figura 46:

Figura 46.
Mediatriz en un lado de un triángulo.

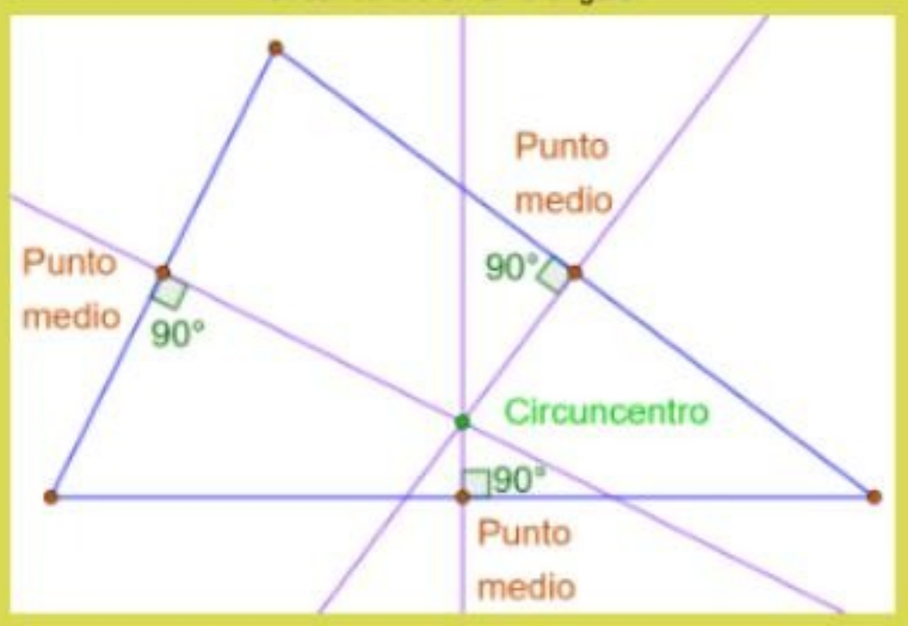


Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Mediatriz en un lado de un triángulo.]

Circuncentro

El circuncentro es el punto donde se intersecan las 3 mediatrices de un triángulo.

Figura 47.
Circuncentro en un triángulo.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia.[Circuncentro en un triángulo.]

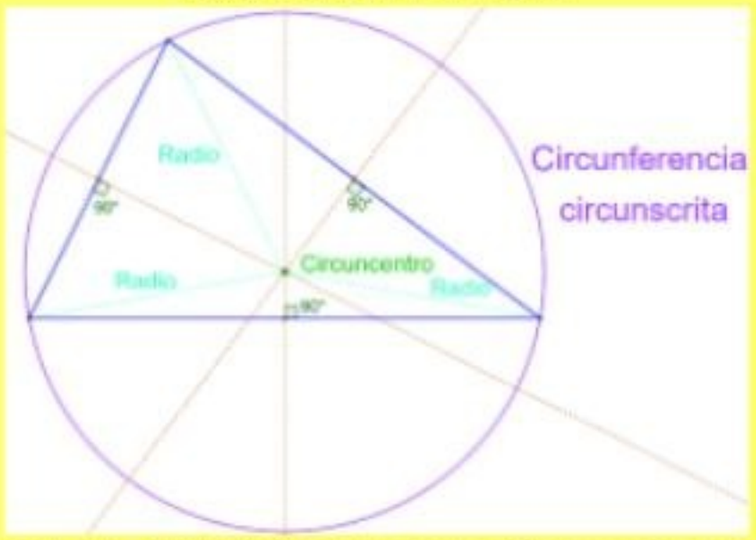
Observa que, a diferencia de la mediana, las mediatrices no necesariamente pasan por los vértices del triángulo, en algunos casos sí ocurre y parecerá que mediana y mediatriz son lo mismo, pero son casos particulares, como suele ocurrir en los triángulos isósceles y equiláteros.

NOTA: a diferencia del baricentro, el circuncentro no siempre queda al interior del triángulo.

Idea clave 15. Circunferencia circunscrita

La circunferencia circunscrita es aquella que, al ser trazada, pasa por los tres vértices. Su centro es el circuncentro y su radio es la distancia desde el circuncentro hacia cualquier vértice (que es la misma distancia a cualquiera de los tres vértices).

Figura 48.
Circuncentro en un triángulo.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Circuncentro en un triángulo.]

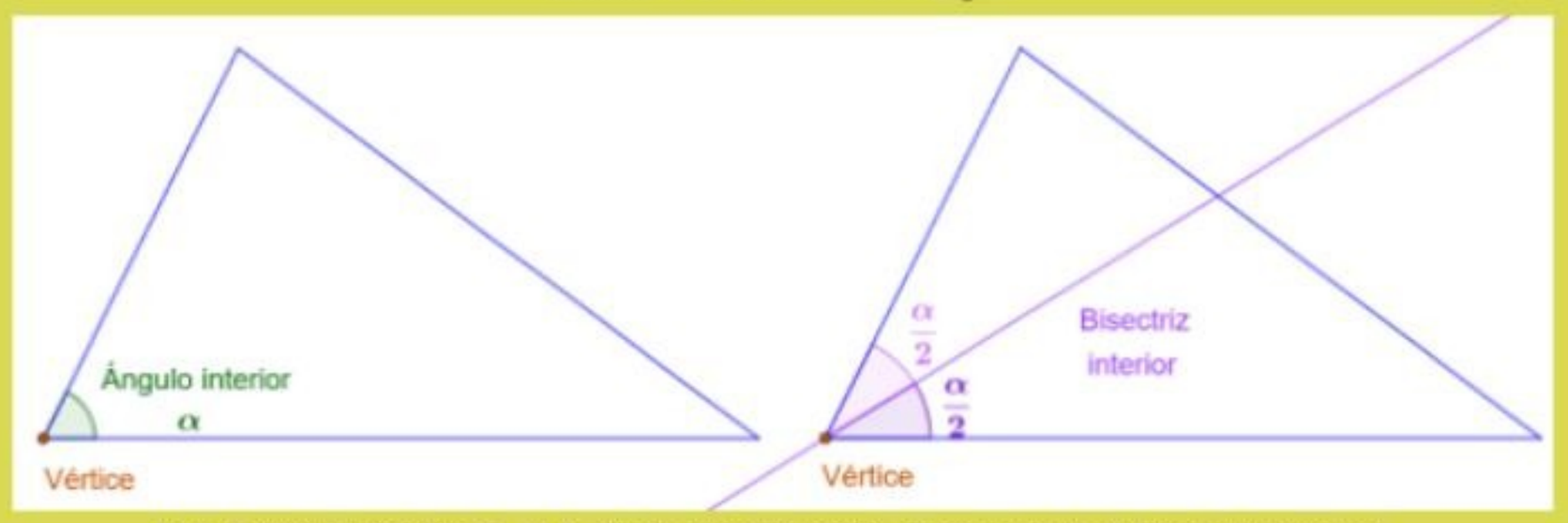
La noción de circunferencia circunscrita se emplea en la Geometría Analítica, para determinar la ecuación de una circunferencia de la cual se conocen al menos 3 puntos del plano cartesiano por donde pasa esa circunferencia.

Otro uso es trazar el centro de una circunferencia, pues se colocan tres puntos cualesquiera en ella, se unen esos tres puntos para formar un triángulo, se obtiene el circuncentro y con eso obtenemos el centro.

Bisectriz

Una bisectriz es la recta que divide exactamente por la mitad a un ángulo de un triángulo. Si el ángulo es interior, entonces, la bisectriz también es interior, de forma similar, si el ángulo es exterior, entonces, la bisectriz también es exterior.

Figura 49.
Bisectriz en un vértice de un triángulo.

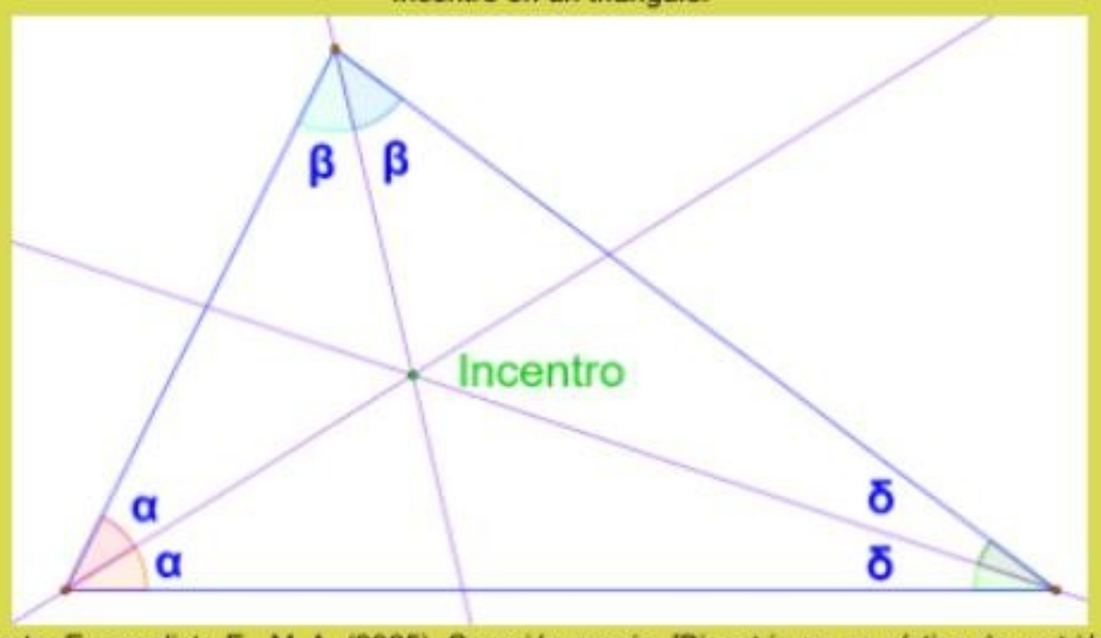


Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Bisectriz en un vértice de un triángulo.]

Incentro

El incentro es el punto donde se intersecan las 3 bisectrices de un triángulo.

Figura 50.
Incentro en un triángulo.

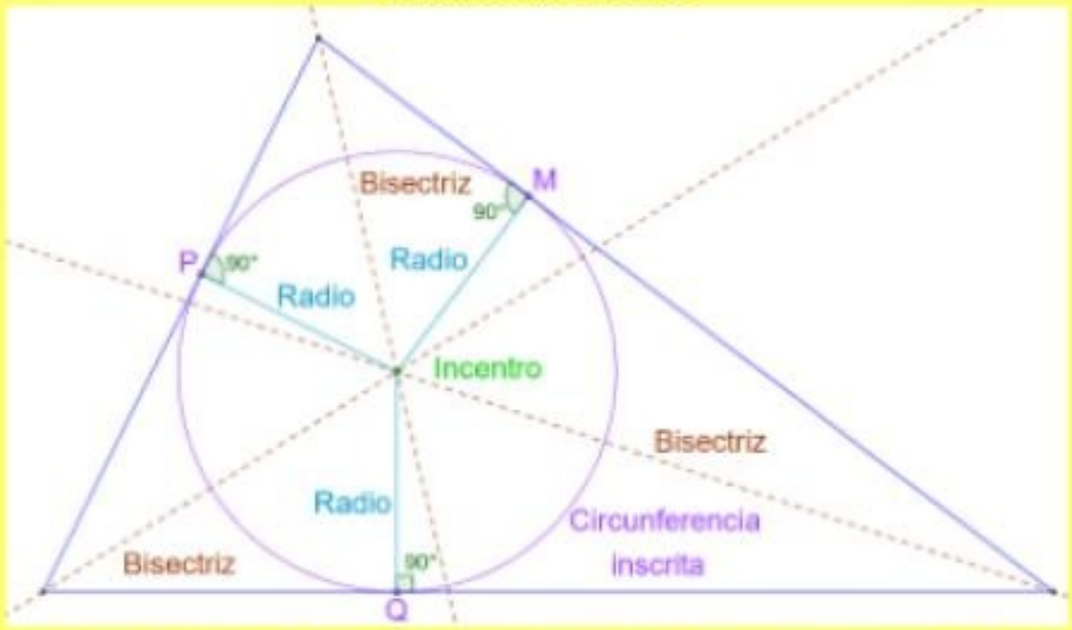


Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Bisectriz en un vértice de un triángulo.]

Idea clave 16. Circunferencia inscrita

La circunferencia inscrita es una circunferencia tangente a los tres lados de un triángulo cuyo centro es el incentro. En la Figura 51 puedes observar la circunferencia inscrita en un triángulo, los puntos P, Q y M se denominan puntos de tangencia, los segmentos formados con estos puntos y el incentro son radios y son perpendiculares a los lados del triángulo. Observa que, para el ejemplo mostrado, los puntos de tangencia y los radios indicados son independientes de las bisectrices.

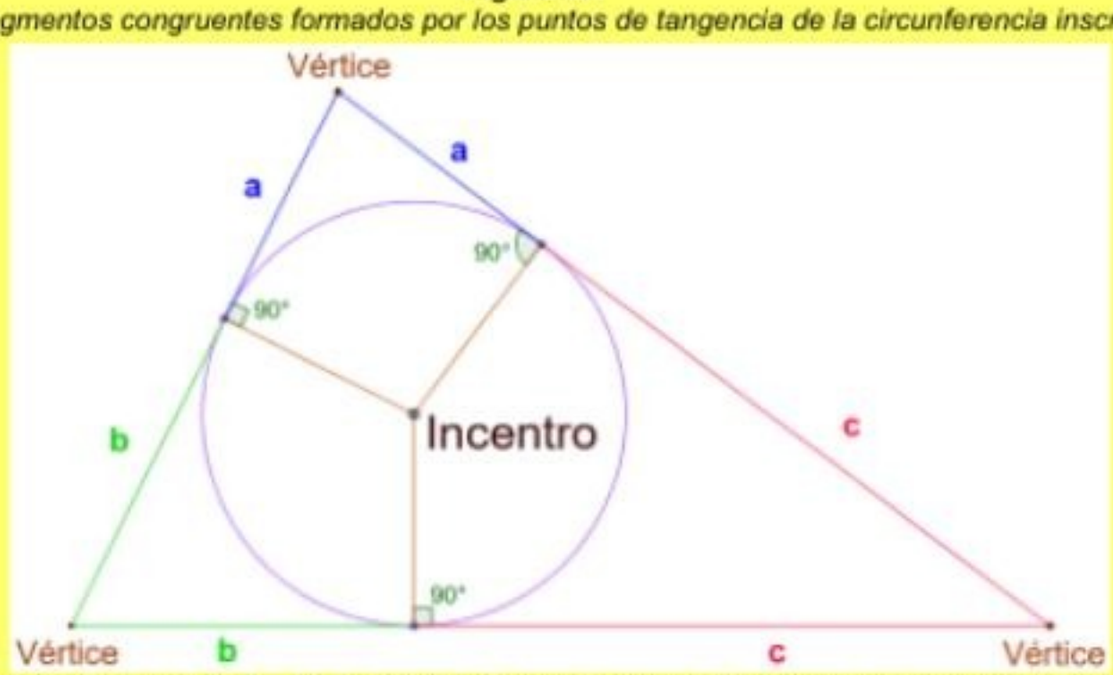
Figura 51.
Circunferencia inscrita.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Circunferencia inscrita.]

Un resultado importante de la Figura 51 es que los segmentos adyacentes a un vértice tienen la misma magnitud (segmentos congruentes), esto se puede demostrar con conceptos de congruencia que verás en el Módulo II, por ahora, observa la Figura 52 y analiza esta afirmación:

Figura 52.
Segmentos congruentes formados por los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita.

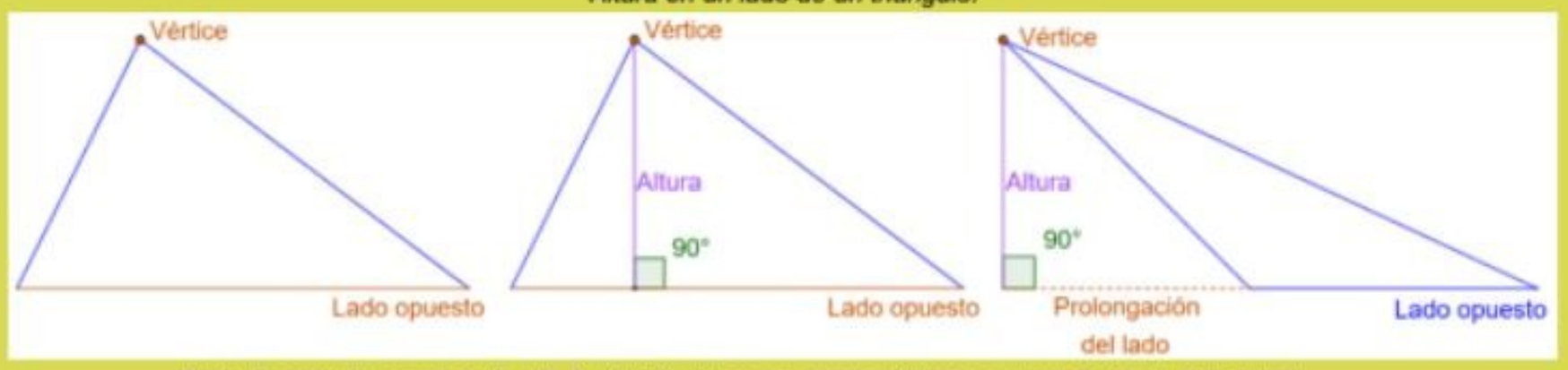


Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Segmentos congruentes formados por los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita.]

Altura

Una altura es un segmento de recta que pasa por un vértice de un triángulo y es perpendicular al lado opuesto o a su prolongación.

Figura 53.
Altura en un lado de un triángulo.

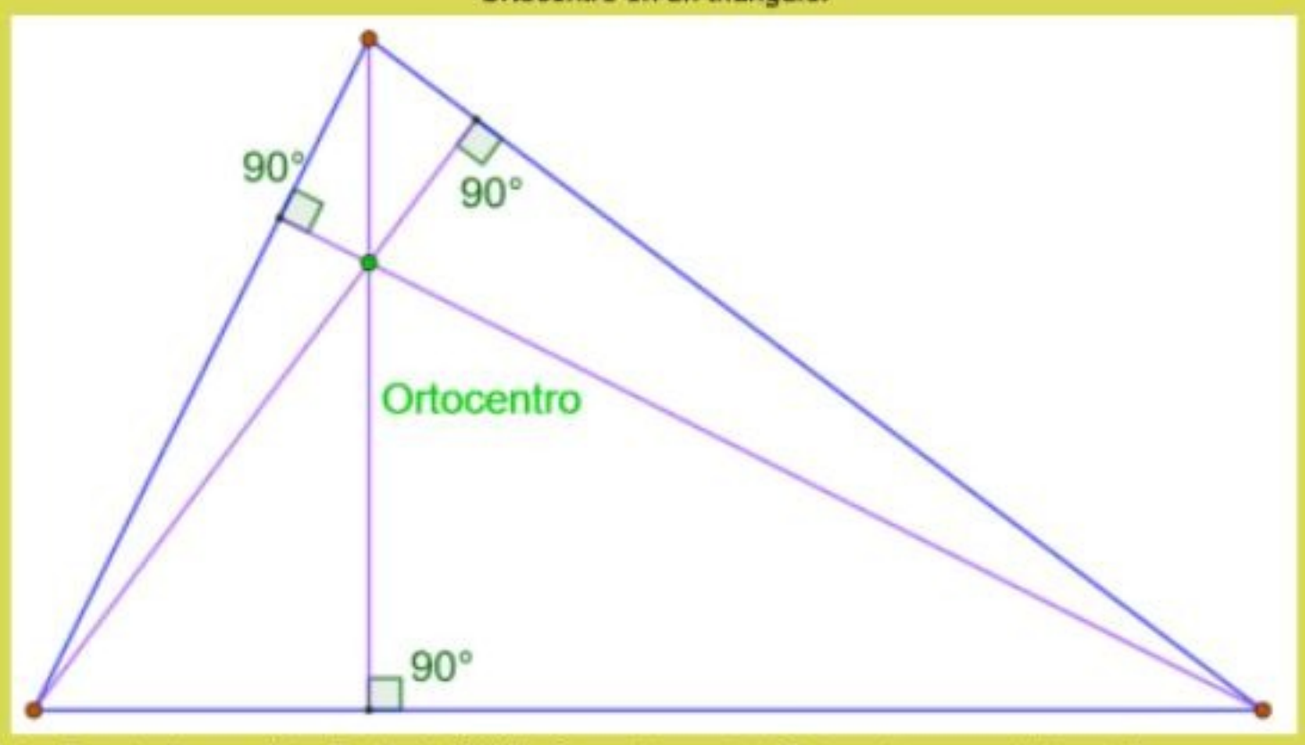


Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Altura en un lado de un triángulo.]

Ortocentro

El ortocentro es el punto donde se intersecan las 3 alturas de un triángulo.

Figura 54.
Ortocentro en un triángulo.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Ortocentro en un triángulo.]

Ahora que conoces las rectas y puntos notables que posee un triángulo, vamos a aprender a trazar algunas de ellas con instrumentos de dibujo, además, en temas posteriores, podrás identificar algunas aplicaciones de los conceptos vistos en esta sección.



Actividad 11. Puntos y rectas notables de un triángulo

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 11.
Puntos y rectas notables de un triángulo

1.3.1 Trazo con regla y compás de triángulos, bisectriz y mediatriz

RETO: únicamente con tu lápiz y regla intenta dibujar un triángulo en tu libreta cuyos lados deben medir 8 cm, 5 cm y 4 cm.

¿Lo lograste a la primera?

¿Tuviste problemas para que el triángulo cerrara?

¿En verdad los lados miden exactamente 8 cm, 5 cm y 4 cm? Pide a un compañero o compañera que mida los lados de tu triángulo con su regla y que lo compruebe.

En ocasiones al querer trazar un triángulo que debe tener medidas específicas experimentamos algunas de las complicaciones anteriores, esto es normal, porque para una terna de medidas dadas, los ángulos que deben tener esos lados entre uno y otro están bien definidos por las medidas de sus ángulos.

Esta propiedad la podrás comprobar en temas siguientes del **Módulo II**, por ahora, para poder trazar un triángulo con medidas específicas, **nos valdremos de dos herramientas de dibujo, la regla y el compás.**

La regla normalmente viene graduada en centímetros, y las divisiones menores, que generalmente no se etiquetan, son milímetros. Por otro lado, el compás, por sencillo que parezca, permite trazar circunferencias, arcos circulares, medir distancias a partir de un patrón dado y, en nuestro caso, trazar triángulos y las rectas notables vistas en el tema anterior.

En el Video 1 puedes observar paso a paso cómo trazar un triángulo:

Video 1.
Trazado de un triángulo con regla y compás.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. Video. [Trazado de un triángulo con regla y compás.]

¡Puedes repetir estas instrucciones para trazar cualquier triángulo que desees! Aplica estos conocimientos para dibujar los triángulos que se te mostrarán a continuación, en los cuáles, aprenderás cómo trazar bisectrices y mediatrices.

El Video 2 te muestra cómo trazar una bisectriz de un ángulo de un triángulo dado y, siguiendo los mismos pasos, podrás trazar las restantes dos, podrás también obtener su punto de intersección, el incentro, finalmente se te muestra cómo dibujar la circunferencia inscrita del triángulo:

Video 2.
Trazado de la bisectriz, el incentro y la circunferencia inscrita de un triángulo.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. Video. [Trazado de la bisectriz, el incentro y la circunferencia inscrita de un triángulo.]

El Video 3 te muestra cómo trazar una mediatriz de un lado de un triángulo dado y, siguiendo los mismos pasos, podrás trazar las restantes dos, podrás también obtener su punto de intersección, el circuncentro, finalmente se te muestra cómo dibujar la circunferencia circunscrita del triángulo:

Video 3.
Trazado de la mediatriz, el circuncentro y la circunferencia circunscrita de un triángulo.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. Video. [Trazado de la mediatriz, el circuncentro y la circunferencia circunscrita de un triángulo.]

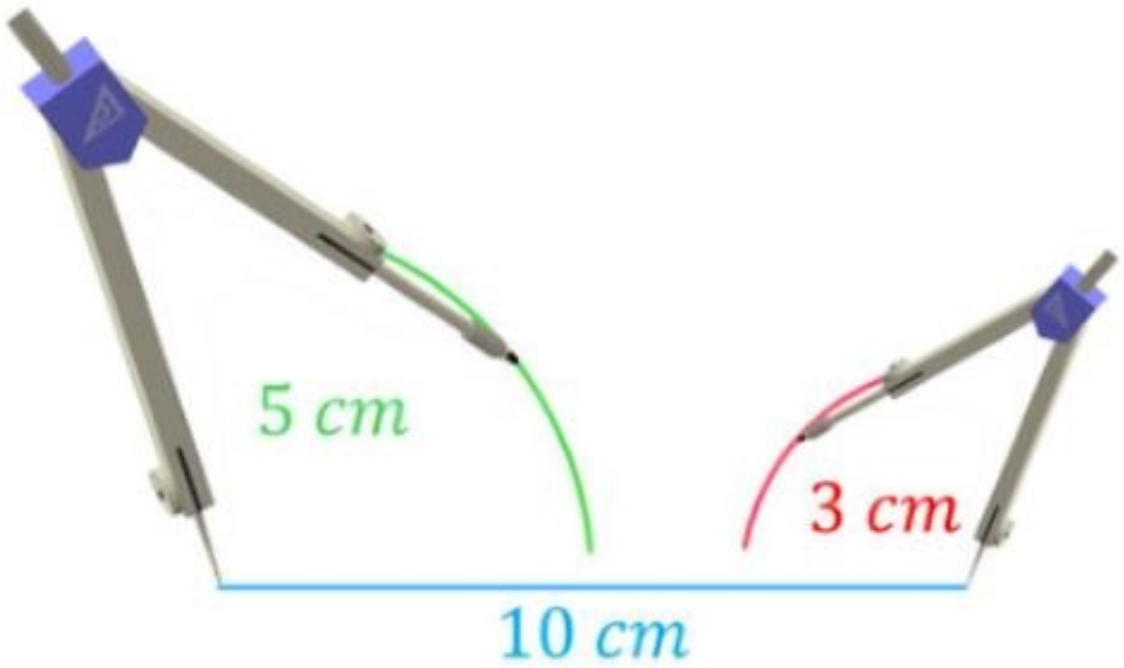
Idea clave 17. Desigualdad del triángulo

Este postulado establece que "*La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado*" (Clemens et al., 1998, p. 244).

Analiza los triángulos trazados con anterioridad y verifica que **¡Todos cumplen la desigualdad del triángulo descrita en la Idea Clave 17!**

Cuando vayas a trazar un triángulo considera la Idea Clave 17, pues con tres medidas cualesquiera no siempre se puede trazar un triángulo, observa la Figura 55 y verifica que, por ejemplo, no se puede trazar un triángulo de medidas 10 cm, 5 cm, 3 cm, porque al intentar seguir los pasos de construcción, los arcos circulares trazados desde los extremos del lado más largo **¡NO SE CRUZAN!**, esto lo puedes comprobar sumando la medida de los lados más pequeños $\mathbf{5\ cm + 3\ cm = 8\ cm}$, y verificar que esa suma es menor que la medida del tercer lado, es decir, $\mathbf{8\ cm < 10\ cm}$, lo cual contradice la desigualdad del triángulo.

Figura 55.
Las medidas 10cm, 5 cm y 3 cm no conforman los lados de un triángulo.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Las medidas 10cm, 5 cm y 3 cm no conforman los lados de un triángulo.]



Actividad 12.
Trazo de triángulos, bisectriz y mediatriz

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 12.
Trazo de triángulos, bisectriz y mediatriz

1.4 Problemas de aplicación

Los problemas de aplicación tienen como objetivo relacionar los conceptos teóricos con situaciones reales. A través de ellos, podrás desarrollar tu capacidad para razonar, analizar y plantear estrategias de solución, integrando el conocimiento matemático con la vida cotidiana.

Ejemplo 22.

Una familia decide construir un jardín con forma de hexágono regular. Cada lado del jardín mide 3.4 metros, y desean colocar una cerca decorativa alrededor de todo el contorno.

¿Cuántos metros de cerca se necesitan para rodear el jardín completo?

Solución:

Datos:

$$n = 6\ lados$$

$$L = 3.4\ m$$

Fórmula:

$$P = n \times L$$

Sustitución:

$$P = 6 \times 3.4$$

$$P = 20.4$$

El perímetro del jardín es de 20.4 metros, por lo tanto, se necesitan 20.4 metros para rodear el jardín completamente.

Ejemplo 23.

Una diseñadora de interiores está colocando mosaicos con forma de octágono regular para decorar un piso. Necesita saber la medida de cada ángulo interior y exterior del mosaico para las que las piezas encajen perfectamente. ¿Cuál es el valor de cada ángulo?

Solución:

Datos:

$$n = 8\ lados$$

Fórmulas:

$$S = (n - 2) \times 180°$$

$$A_e = 180° - A_i$$

Sustituciones:

$$S = (8 - 2) \times 180°$$

$$S = 6 \times 180°$$

$$S = 1080°$$

La suma total de los ángulos interiores es 1080° para obtener el valor de cada ángulo interior dividimos la suma total entre el número de lados:

$$A_i = \frac{1080°}{8}$$

$$A_i = 135°$$

Como cada ángulo interior mide 135°:

$$A_e = 180° - A_i$$

$$A_e = 180° - 135°$$

$$A_e = 45°$$

Cada ángulo exterior mide 45°.

Ejemplo 24.

Una persona posee un terreno con un establo, un gallinero y una huerta. Desea colocar una cisterna que esté exactamente a la misma distancia de los tres para que le sea fácil brindar de agua a sus animales y sus plantas. ¿Cómo es posible ayudar a esta persona aplicando los conceptos de puntos y rectas notables del triángulo?

Solución:

Independientemente de las distancias que separen al establo, el gallinero y la huerta, al trazar líneas entre ellos, podemos obtener un triángulo. Ahora, recordando el concepto de circuncentro, que es el punto notable del triángulo que equidista de los tres vértices, entonces es justo ahí donde se puede colocar la cisterna para ayudar a la persona. Observa esta solución representada en la Figura 56, en la cual se muestran:

- En verde, las líneas que unen al establo, el gallinero y la huerta;
- en rosa, la circunferencia circunscrita;
- en morado, las tres mediatrices;
- en rojo, tres segmentos de recta que parten del circuncentro y tocan a la circunferencia circunscrita, por lo tanto, son radios y, en consecuencia, miden lo mismo, que era justo lo que se solicita en la situación descrita.

Figura 56.
Establo, gallinero y huerta que equidistan de una cisterna.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Establo, gallinero y huerta que equidistan de una cisterna.]

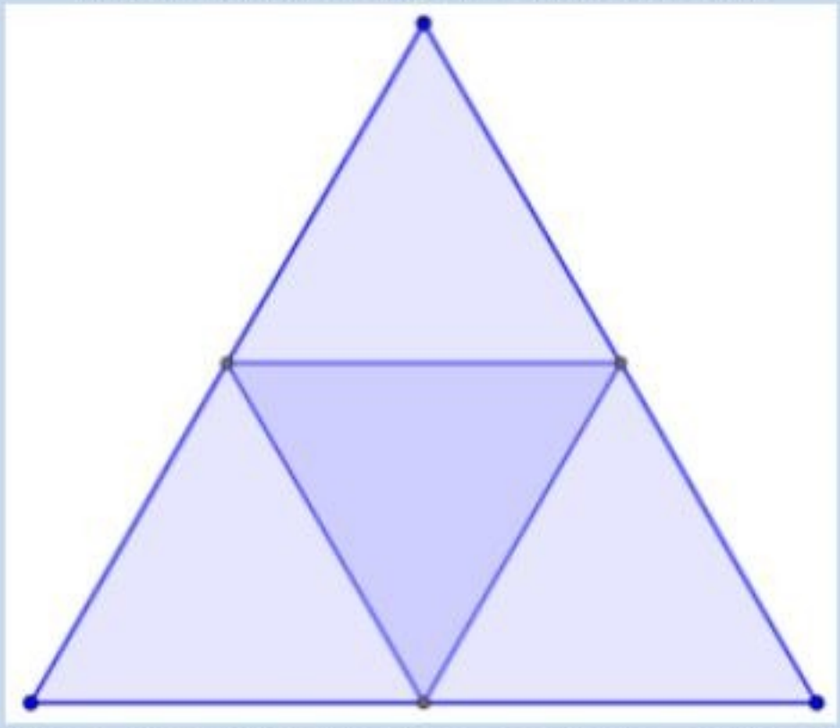
No obstante ¡esta no es la única solución!

RETO: Discute con tus compañeros y docente, cómo podrían resolver este problema con los conceptos de bisectriz e incentro.

Ejemplo 25.

Un triángulo regular (triángulo equilátero) se puede dividir en triángulos regulares como se muestra en la Figura 57:

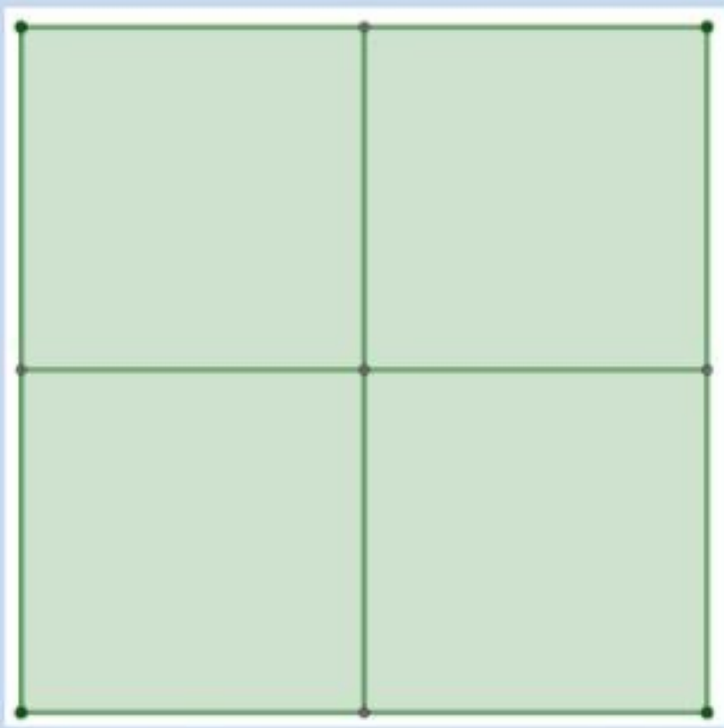
Figura 57.
Triángulo equilátero dividido en triángulos equiláteros.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Triángulo equilátero dividido en triángulos equiláteros.]

Un cuadrado (regular) se puede dividir en cuadrados (regulares) como se muestra en la Figura 58:

Figura 58.
Cuadrado dividido en cuadrados.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Cuadrado dividido en cuadrados.]

¿Es posible dividir un hexágono regular en hexágonos regulares?

Solución:

Aunque pareciera sencillo, este es un problema complejo de las matemáticas, aquí abordaremos una solución intuitiva y te invitamos a que analices otras formas de resolverlo.

Para iniciar, calculemos el valor de los ángulos internos de un triángulo:

$$A = \frac{(n-2) \times 180°}{n}$$

$$A = \frac{(3-2) \times 180°}{3}$$

$$A = 60°$$

Después calculamos la medida de un ángulo interno de un hexágono:

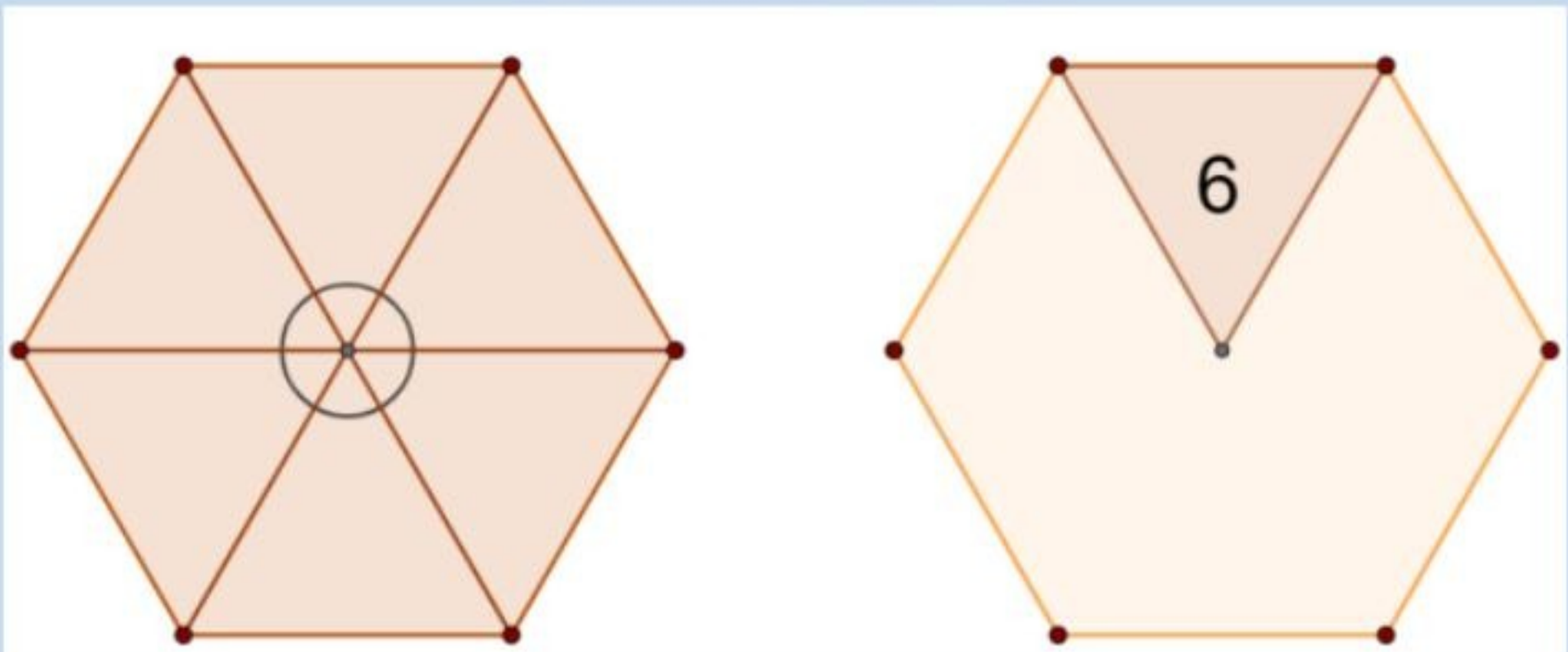
$$A = \frac{(n-2) \times 180°}{n}$$

$$A = \frac{(6-2) \times 180°}{6}$$

$$A = 120°$$

Puedes observar que 60° es la mitad de 120°, por lo que, si se parte un ángulo interno de un hexágono, se pueden obtener ángulos internos de triángulos equiláteros. Además, si consideramos el ángulo que se forma en el centro al trazar las diagonales del hexágono, que es una vuelta completa de 360° y lo dividimos en 6, entonces tenemos ángulos de 60°. En conclusión: en un hexágono podemos trazar 6 triángulos equiláteros, como se muestra en la Figura 59:

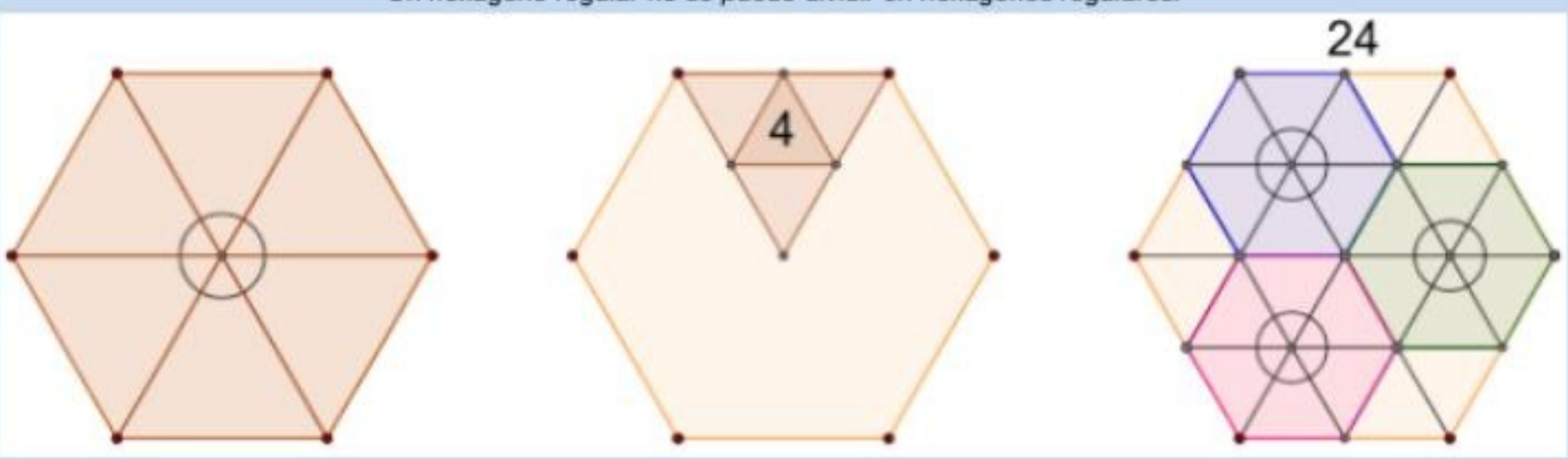
Figura 59.
Hexágono dividido en 6 triángulos equiláteros.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Hexágono dividido en 6 triángulos equiláteros.]

Pero ya sabemos que un triángulo equilátero se puede dividir en 4 triángulos equiláteros, así que, ahora el hexágono mostrado en la Figura 60 está conformado por 24 triángulos equiláteros, con los cuales trataremos de formar hexágonos, recordando que deben ser adyacentes y, en su centro, formar un ángulo de 60°:

Figura 60.
Un hexágono regular no se puede dividir en hexágonos regulares.



Nota. Fuente: Evangelista E., M. A. (2025). Creación propia. [Un hexágono regular no se puede dividir en hexágonos regulares.]

Observa que, si bien es cierto que sobran 6 triángulos equiláteros, **NO SON ADYACENTES** y, por lo tanto, **NO FORMAN UN HEXÁGONO REGULAR**, debido a la simetría del hexágono, aunque eligiésemos otro orden de los hexágonos internos, llegaríamos a la misma conclusión. Existen otras configuraciones, como elegir a los 6 triángulos centrales, analiza esta y otras opciones con tus compañeros y docente ¡Determinen si esta afirmación es correcta o no!

En general, dividir a una figura en otras que sean semejantes se conoce como **teselado**, lo cual es extensamente empleado en el arte, diseño y arquitectura, para decoración y fabricación de mosaicos y celosías; en ingeniería para la optimización de corte de materiales; en matemáticas y ciencias para el modelado de estructuras atómicas, como el estudio del estado sólido; y en diseño de redes, por ejemplo, para las redes celulares.



Actividad 13.
Actividad autoevaluable

Instrucciones: Para reforzar los contenidos revisados en el Módulo I, realiza el siguiente ejercicio autoevaluable.

Ingresa a la plataforma SEDUCA, accede a la sección Actividades (Estudiante) y responde la actividad titulada MI Ejercicio Autoevaluable.

Resumen

Hasta este momento has aprendido herramientas y conceptos básicos que te serán útiles para el resto de los módulos. Distingues características y propiedades de los polígonos y triángulos, en otras palabras, ahora dominas el lenguaje propio de la trigonometría, de las formas y las figuras, así como su clasificación. De ahora en adelante, palabras como vértice, ángulo, diagonal o apotema te serán familiares y podrás reconocerlas con facilidad en dibujos técnicos, construcciones o incluso en objetos de uso cotidiano.

Has descubierto en parte que la geometría no sólo vive en los libros, sino también en las estructuras que te rodean: en los techos inclinados de casas, en los mosaicos de los pisos, en la simetría de algunos objetos o en trayectoria circular de las llantas de una bicicleta. A través del estudio de los ángulos aprendiste a observar cada vez más las relaciones que existen entre ellos y con los polígonos, comprendiste cómo se construyen a partir de líneas y vértices.

También aplicaste las reglas y el compás para trazar figuras precisas, identificaste que detrás de cada dibujo hay un razonamiento matemático. Cada ejercicio te acercó un poco más a comprender que la Trigonometría y la Geometría son lenguajes universales que describen no sólo el espacio, sino hasta el movimiento y la proporción con mucha exactitud.

Recuerda que procesos como medir, dividir o construir no solo son operaciones mecánicas: son formas de pensar y razonar con lógica. Las matemáticas te enseñan a mirar con atención, a cuestionar y a comprobar con tus propios cálculos lo que percibes a simple vista.

Pon en práctica ese espíritu ávido de nuevos conocimientos que has forjado a lo largo de los pasados tres semestres de tu bachillerato, observa a tu alrededor y descubre cómo lo aprendido en este módulo puede ser aplicado en situaciones de la vida diaria; apóyate con tu docente y compañeros, así como de toda la información de los diversos recursos físicos y digitales que estén a tu disposición.



Glosario

- **Altura:** segmento de recta que pasa por un vértice de un triángulo y es perpendicular al lado opuesto o a su prolongación.
- **Ángulo:** abertura formada por dos segementos de recta con un punto común llamado vértice.
- **Ángulo agudo:** menor de 90°.
- **Ángulo completo:** igual a 360°.
- **Ángulo cóncavo o reflejo:** mayor de 180° y menor de 360°.
- **Ángulo llano:** igual a 180°.
- **Ángulo obtuso:** mayor de 90° y menor de 180°.
- **Ángulo recto:** igual a 90°.
- **Ángulos adyacentes:** ángulos que comparten el mismo vértice y un lado común, pero no se superponen.
- **Ángulos complementarios:** dos o más ángulos cuya suma es de 90°.
- **Ángulos opuestos por el vértice:** ángulos formados al cruzarse dos rectas; que miden lo mismo.
- **Ángulos suplementarios:** dos o más ángulos cuya suma es de 180°.
- **Apotema:** segmento perpendicular trazado desde el centro del polígono hasta el punto medio de cualquiera de sus lados.
- **Baricentro:** punto donde se intersecan las 3 medianas de un triángulo.
- **Bisectriz:** recta que divide exactamente por la mitad a un ángulo de un triángulo.
- **Circuncentro:** punto donde se intersecan las 3 mediatrices de un triángulo.
- **Cisterna:** depósito empleado para almacenar agua.
- **Compás:** instrumento que sirve para trazar circunferencias, arcos de circunferencia o distancias a partir de un patrón.
- **Diagonal:** segmento que une vértices no consecutivos del polígono.
- **Geometría:** rama de las matemáticas que estudia las propiedades y medidas de las figuras y cuerpos en el espacio.
- **Goniómetro:** instrumento empleado para medición de ángulos.
- **Grado (°):** unidad básica del sistema sexagesimal; una circunferencia es igual a 360°.
- **Incentro:** punto donde se intersecan las 3 bisectrices de un triángulo.
- **Lado (de un ángulo):** cada uno de los segmentos de recta que forman un ángulo.
- **Matemáticas:** ciencia que estudia las relaciones entre números, formas, magnitudes y estructuras lógicas.
- **Mediana:** recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto.
- **Mediatriz:** recta que pasa por el punto medio de un lado de un triángulo y es perpendicular a este.
- **Medida de un ángulo:** cantidad de rotación que existe entre los lados de un ángulo.
- **Minuto (^'):** sexagésima parte de un grado.
- **n-gonal:** término general que se usa para nombrar un polígono con n lados.
- **Ortocentro:** punto donde se intersecan las 3 alturas de un triángulo.
- **Perímetro:** suma de las longitudes de todos los lados de una figura geométrica.
- **Polígono:** figura geométrica plana, cerrada y formada por un número infinito de segmentos de recta que se unen consecutivamente sin cruzarse entre sí.

- **Polígono cóncavo:** polígono que posee, al menos, un ángulo interior mayor a 180°.
- **Polígono convexo:** polígono en el cual todos sus ángulos interiores miden menos de 180°.
- **Polígono irregular:** polígono que no tiene todos sus lados ni ángulos iguales.
- **Polígono regular:** polígono geométrica cuyos lados y ángulos son todos iguales.
- **Punto:** indica una posición en el espacio, no tiene unidades.
- **Recta:** sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección.
- **Rectas paralelas:** rectas que, al prolongarse indefinidamente, nunca se intersecan.
- **Recta secante:** línea que cortan a otra o a otras rectas (paralelas o no) en un punto.
- **Segundo (''): sexagésima parte de un minuto.**
- **Semirrecta:** parte de una recta que tiene un punto de origen y se extiende indefinidamente en una sola dirección.
- **Segmento (de una recta):** parte de una recta comprendida entre dos puntos.
- **Sistema sexagesimal:** escala de medición de ángulos basada en grados (°), minutos (') y segundos ('').
- **Sistema cíclico o circular:** escala que usa el radián ("rad") como unidad de medida de los ángulos.
- **Transportador:** instrumento que permite medir los ángulos en grados.
- **Terna:** conjunto de tres elementos.
- **Trigonometría:** rama de la geometría que analiza las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos.
- **Vértice:** intersecciones o uniones que se generan al unir dos lados o líneas del polígono.

Referencias

- Clemens, S., O'daffer, P, Cooney, T. (1998). Geometría con aplicaciones y solución de problemas. Editorial Addison Wesley Longman. ISBN 968 444 3064.
- Larson, R., & Boswell, L. (2018). Geometría. McGraw-Hill Education.
- Sullivan, M. (2017). Algebra y trigonometría (10ª ed.). Pearson Educación.

Módulo II

Triángulos

Propósito del Módulo

Aplica propiedades, teoremas y relaciones trigonométricas en triángulos, integrando la congruencia, semejanza, razones trigonométricas y leyes del seno y coseno, para resolver situaciones geométricas y problemas reales.

Presentación

¿Sabías que la primera persona en calcular el diámetro de la Tierra fue Eratóstenes? Aproximadamente en el siglo III a.C. este sabio griego aplicó conocimientos de Trigonometría para lograr semejante proeza, sin complicados mecanismos ni tecnologías de punta, simplemente usando la magia de los triángulos.

En este módulo aprenderás conceptos como semejanza y congruencia, que permiten calcular ángulos y medidas de triángulos a partir de otros; también recordaremos qué es un triángulo rectángulo y te explicaremos cómo aplicar en ellos a las denominadas razones trigonométricas, con la finalidad de calcular ángulos y medidas de triángulos rectángulos de los cuáles conocemos algunos datos. También se abarcarán conceptos relacionados con los triángulos oblicuángulos, en los que podemos aplicar las leyes del seno y del coseno.

Con base en todos estos conocimientos te acercaremos a situaciones contextuales en los que puedes aprovecharlos para dar respuestas de estos y, con ayuda de tu entusiasmo por seguir aprendiendo, encontrarás la forma de aplicarlos en nuevos problemas y retos que se te presenten en la vida cotidiana.

Este módulo está dedicado a los triángulos, a los teoremas y leyes que podemos aplicar en ellos, con su simplicidad de tres lados, nos permiten explicar el mundo que nos rodea, nos sirven de base para comprender figuras más complejas y, como Eratóstenes en su tiempo, ayudarnos a dar respuesta a las grandes interrogantes de la actualidad.



Actividad 1. Evaluación diagnóstica

Instrucciones: antes de iniciar con la revisión de los contenidos del módulo II, te invitamos a responder a la evaluación diagnóstica.

Esto te ayudará a descubrir los conocimientos previos que tienes sobre los temas a abordar y, al mismo tiempo, le permitirá a tu docente conocer tus fortalezas y debilidades.

Para comenzar con el ejercicio, revisa en la plataforma SEDUCA la sección de Actividades (Estudiante) y responde a la actividad denominada: MII Evaluación Diagnóstica.



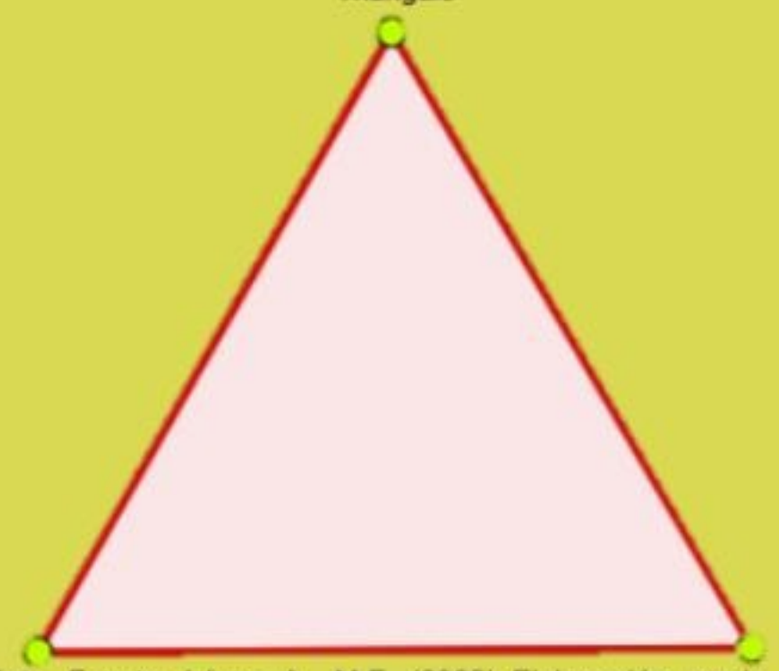
2.1 Triángulos y teoremas básicos sobre triángulos

La figura más simple es el triángulo su forma proporciona estabilidad y resistencia en el diseño en ingeniería y arquitectura. Comprender sus propiedades permite analizar y resolver problemas relacionados con longitudes, áreas y ángulos.

Triángulo

Un triángulo es una figura geométrica plana y cerrada formada por tres lados, tres vértices y tres ángulos.

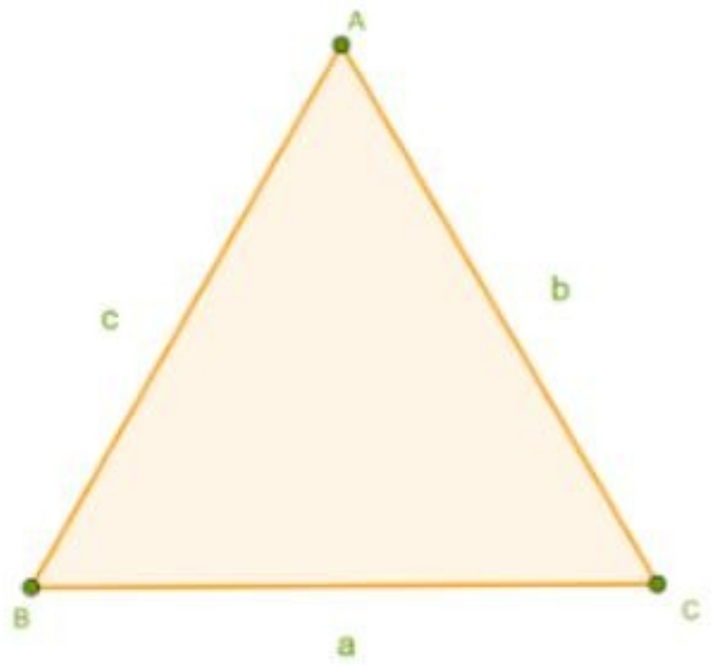
Figura 1.
Triángulo



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Triángulo]

Los triángulos se representan usualmente con letras mayúsculas para sus vértices y con letras minúsculas para los lados opuestos, observa la Figura 2.

Figura 2.
Notación de un triángulo



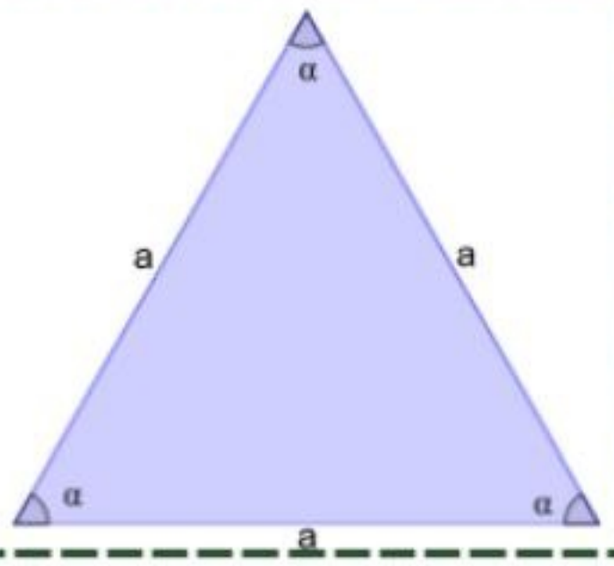
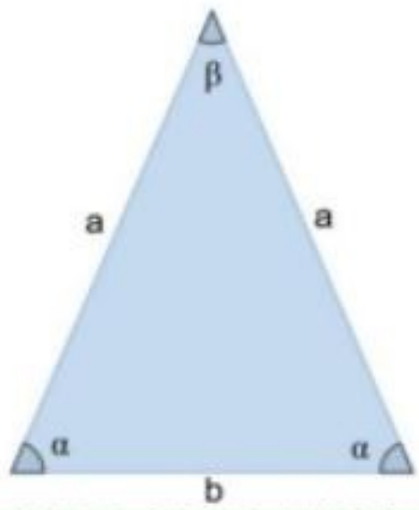
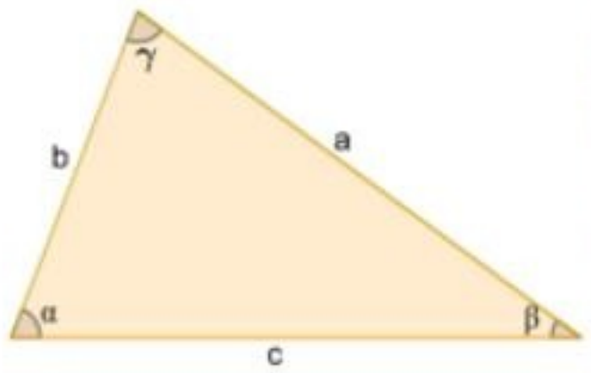
Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Notación de un triángulo]

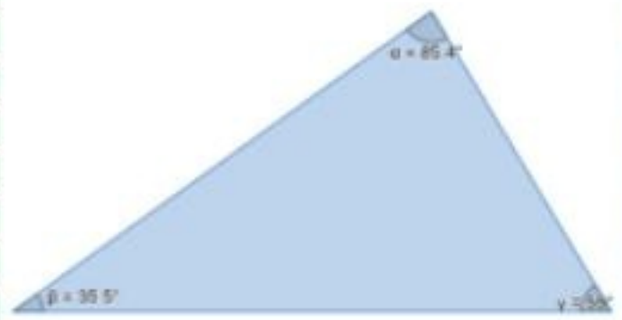
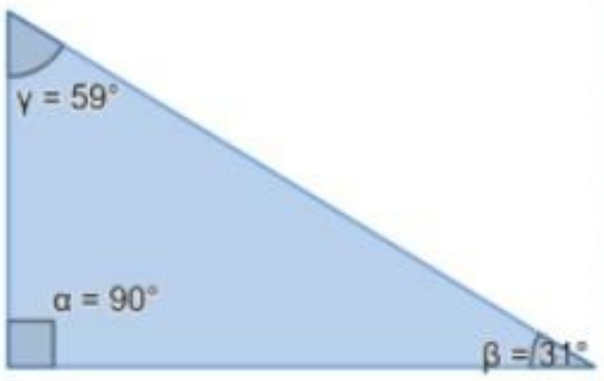
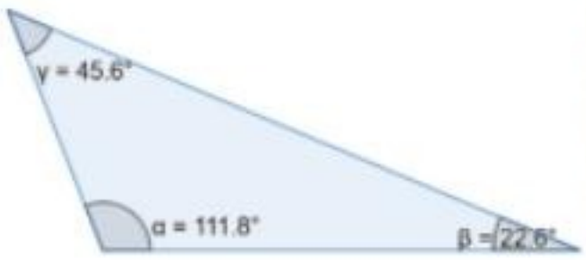
Cada triángulo posee partes esenciales que permiten entender su estructura y las relaciones que existen entre sus lados y ángulos.

Los elementos de un triángulo como se vio y definió en el Módulo I son: vértices, lados, ángulos internos, ángulos externos, altura, bisectriz, mediatriz y mediana. Cada uno de estos elementos permite establecer relaciones de longitud y simetría.

Los triángulos se pueden clasificar de acuerdo con la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos.

Tabla 1.
Clasificación de triángulos

Clasificación: según la medida de sus lados		
Tipo de triángulo	**Características**	**Representación geométrica**
Equilátero	Tiene tres lados de la misma magnitud y por consecuencia sus tres ángulos son iguales, cada uno de 60°.	
Isósceles	Tiene dos lados de la misma magnitud y uno diferente. Lo cual trae como consecuencia que sus ángulos opuestos a los lados sean iguales y tienen la misma magnitud.	
Escaleno	Tiene tres lados de distinta magnitud y por consecuencia sus tres ángulos son diferentes.	

Clasificación: según la medida de sus ángulos		
Acutángulo	Todos sus ángulos son menores de 90°.	
Rectángulo	Tiene un ángulo recto y dos ángulos agudos.	
Obtusángulo	Tiene un ángulo mayor de 90° y dos ángulos agudos.	

Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Clasificación de triángulos.]

Los teoremas relacionados con los triángulos permiten establecer relaciones entre los lados, los ángulos y otros elementos geométricos, lo cual facilita la resolución de problemas de medida, construcción y análisis.

Entre los teoremas más importantes que se verán en este módulo son:

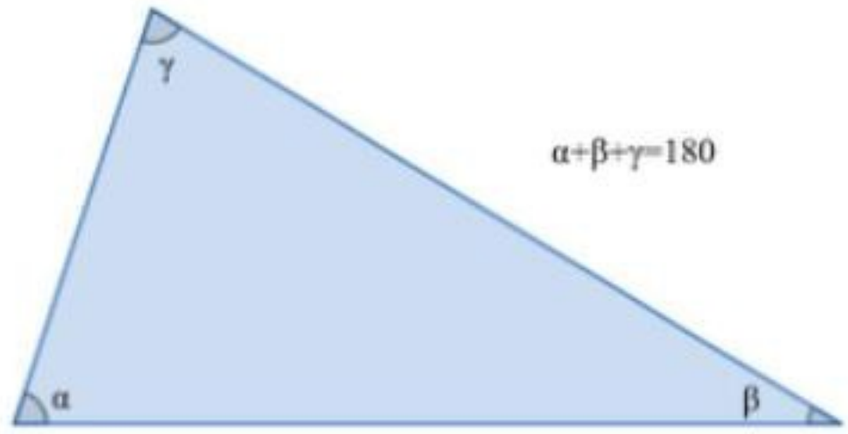
-Teorema de la suma de los ángulos interiores

-Teorema de Tales

2.1.1 Suma de los ángulos internos de un triángulo

Geométricamente, un triángulo está formado por tres lados y tres ángulos internos, que se pueden designar como ***A, B*** y ***C***.

Figura 3.
Suma de los ángulos internos



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Suma de los ángulos internos]

Suma de los ángulos internos de un triángulo

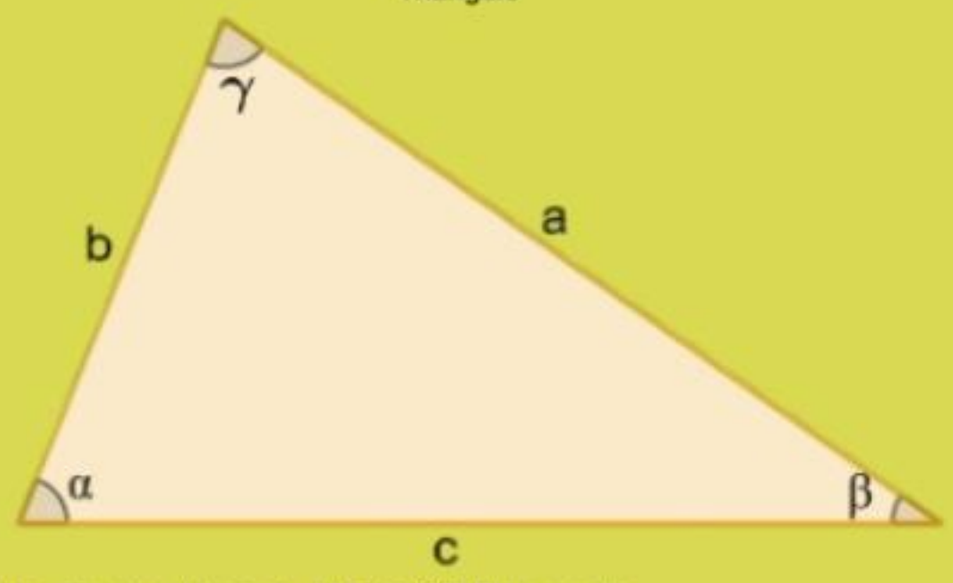
En cualquier triángulo la suma interna de los ángulos es una propiedad geométrica, que establece la relación de los tres ángulos interiores cuya suma siempre será 180°.

Esta relación establece que todo triangulo, sin importar su forma o tipo se deberá cumplir.

Su expresión matemática está dada de la siguiente manera.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Figura 4.
Triángulo



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Triángulo.]

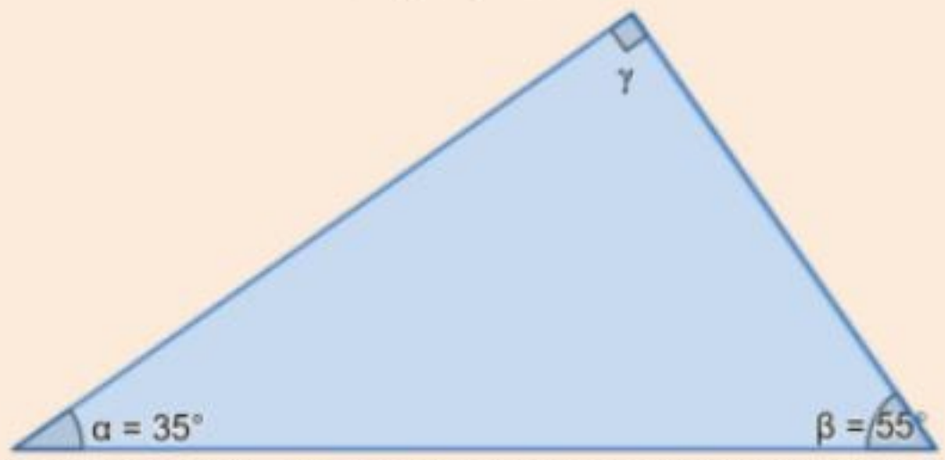
Esto quiere decir que no importa el tipo de triángulo, la suma de sus tres ángulos interiores será siempre la misma.

Conocer esta propiedad permite determinar la medida de un ángulo cuando se conocen los otros dos, es importante para la resolución de triángulos y el análisis de figuras geométricas más complejas.

Ejemplo 1.

En un triángulo, los ángulos interiores miden $\boldsymbol{\alpha = 35°}$ y $\boldsymbol{\beta = 55°}$. Calcula el valor del tercer ángulo γ.

Figura 5.
Triángulo Ejemplo 1



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Triángulo Ejemplo 1.]

Solución:

A partir de la ecuación $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

Sustituimos los valores conocidos:

$$\boldsymbol{\alpha = 35°}$$

$$\boldsymbol{\beta = 55°}$$

$$\boldsymbol{35° + 55° + \gamma = 180°}$$

$$\boldsymbol{90° + \gamma = 180°}$$

$$\boldsymbol{\gamma = 180° - 90°}$$

$$\boldsymbol{\gamma = 90°}$$

El tercer ángulo mide $\boldsymbol{90°}$

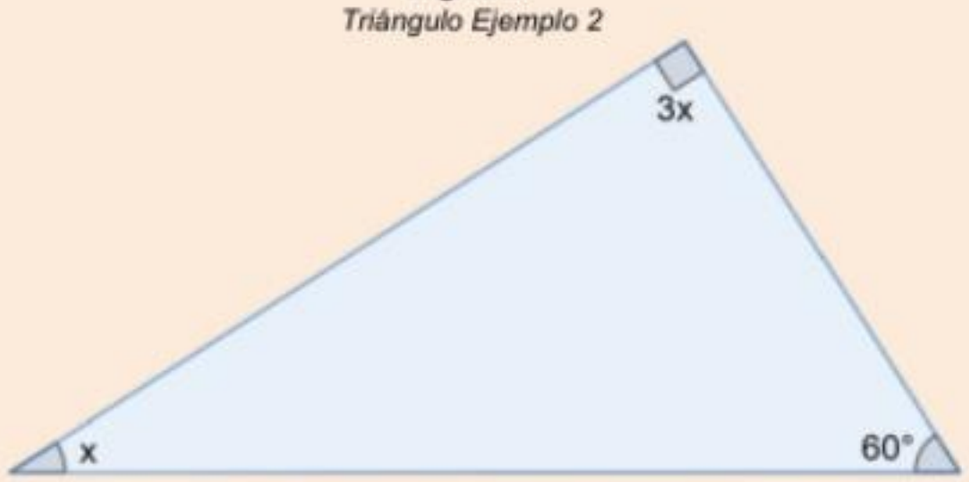
Ejemplo 2.

En un triángulo, un ángulo es el triple de otro, y el tercero mide $60°$. Determina los tres ángulos del triángulo.

Solución:

El ángulo más pequeño lo definimos como x, el segundo ángulo será $3x$ y el tercero mide $60°$.

Figura 6.
Triángulo Ejemplo 2



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Triángulo Ejemplo 2.]

Sustituimos los valores conocidos:

$$x + 3x + 60° = 180°$$

$$4x = 180° - 60°$$

$$4x = 120°$$

$$x = 30°$$

Los tres ángulos son:

$$\alpha = 30°$$

$$\beta = 90°$$

$$\gamma = 60°$$

Ejemplo 3.

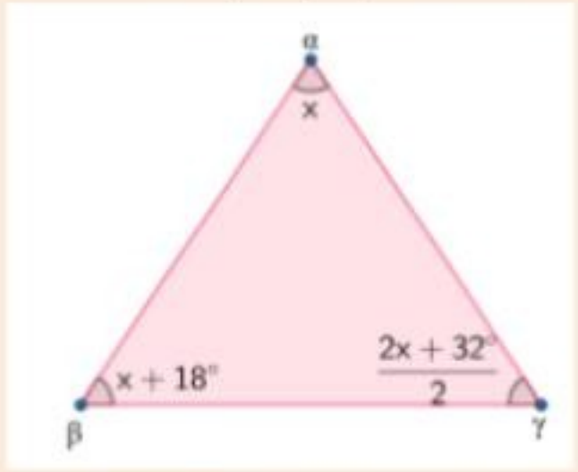
En un triángulo, un ángulo es la mitad de la suma del doble de un número aumentado en 32, el segundo ángulo es un número aumentado en 18, y finalmente el tercero es 54. Determina los tres ángulos del triángulo.

Solución:

El ángulo más pequeño lo definimos como $x = 54$, el segundo ángulo será $x + 18$ y el tercero mide $\frac{2x+32}{2}$.

Figura 7.

Triángulo Ejemplo 3



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Triángulo Ejemplo 3.]

Sustituimos los valores conocidos:

$$x + 18° + \frac{2x + 32°}{2} + 54° = 180°$$

$$x + 18° + x + 18° + 54 = 180°$$

$$2x + 90° = 180°$$

$$2x = 180° - 90°$$

$$2x = 90°$$

$$x = \frac{90°}{2}$$

$$x = 45°$$

Sustituyendo

$$\beta = (45) + 18 = 63$$

$$\gamma = (45) + 18 = 63$$

$$\alpha = 54°$$

Finalmente, los tres ángulos son:

$$\alpha = 54°$$

$$\beta = 63°$$

$$\gamma = 63°$$

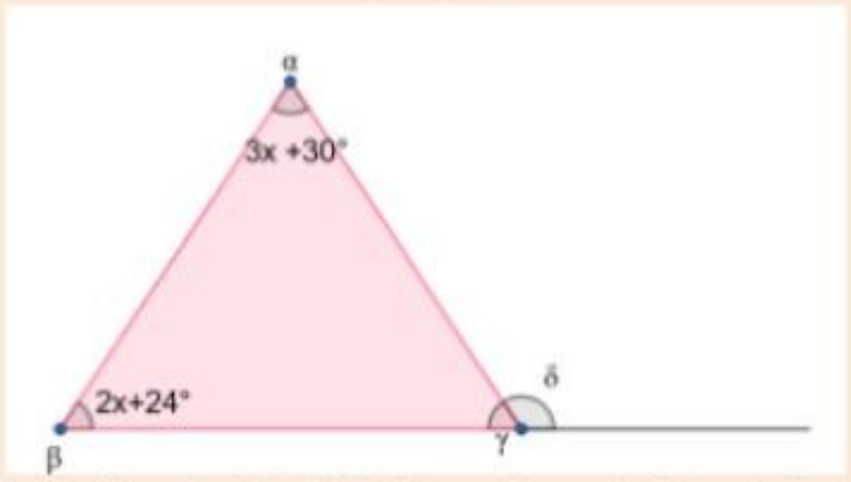
Ejemplo 4.

En un triángulo, el ángulo α es igual a $3x + 30°$, el ángulo β es igual a $2x + 24°$. Calcula la medida de los tres ángulos, clasifica el triángulo según sus ángulos y además obtén el ángulo externo δ.

Solución:

El ángulo α es igual a $3x + 30°$, el ángulo β es igual a $2x + 24°$, hay que determinar el tercer ángulo γ.

Figura 8.
Triángulo Ejemplo 4



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Triángulo Ejemplo 4.]

Sustituimos los valores conocidos:

$$3x + 30° + 2x + 24° + x = 180°$$

$$6x + 54° = 180°$$

$$6x = 180° - 54°$$

$$6x = 126°$$

$$x = \frac{126°}{6}$$

$$x = 21°$$

$$\gamma = 21°$$

Los tres ángulos interiores son:

$$\alpha = 3(21) + 30° = 93°$$

$$\beta = 2(21) + 24° = 66°$$

$$\gamma = 21°$$

Finalmente, el ángulo exterior δ y el ángulo γ llano podemos hacer la suma de $\delta + \gamma = 180°$.

Y por lo tanto el ángulo $\boldsymbol{\delta}$ seria:

$$\boldsymbol{\delta + \gamma = 180°}$$

$$\boldsymbol{\delta + 21 = 180°}$$

$$\boldsymbol{\delta = 180° - 21°}$$

$$\boldsymbol{\delta = 159°}$$

En conclusión: los ángulos del triángulo son $\boldsymbol{x = 21°}$, $\boldsymbol{3x + 30° = 93°}$ y $\boldsymbol{2x + 24° = 66°}$, como estos tres ángulos son diferentes, entonces, se trata de un triángulo escaleno.

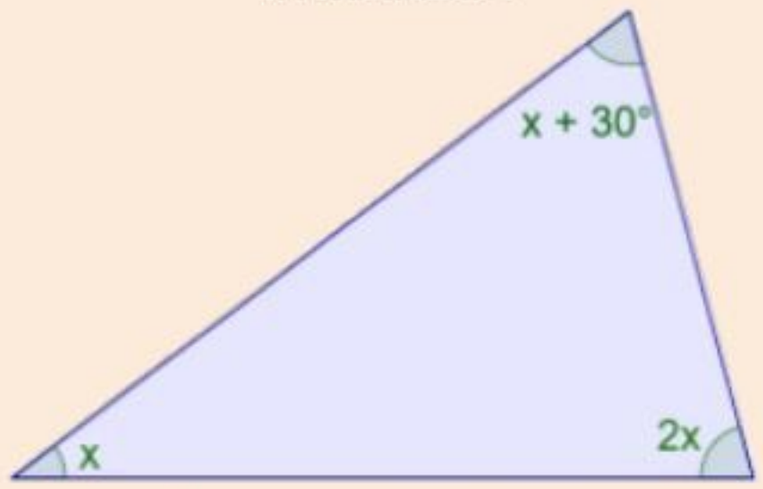
Ejemplo 5.

En un triángulo, el primer ángulo es el doble del segundo, y el tercer ángulo es $\boldsymbol{30°}$ mayor que el segundo. Calcula la medida de los tres ángulos y clasifica el triángulo según sus ángulos.

Solución:

El segundo ángulo lo definimos como $\boldsymbol{x}$, el primer ángulo será $\boldsymbol{2x}$ y el tercero será $\boldsymbol{x + 30°}$.

Figura 9.
Triángulo Ejemplo 5



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Triángulo Ejemplo 5.]

Sustituimos los valores conocidos:

$$\boldsymbol{2x + x + (x + 30°) = 180°}$$

$$\boldsymbol{4x + 30° = 180°}$$

$$\boldsymbol{4x = 180° - 30°}$$

$$\boldsymbol{4x = 150°}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{150°}{4}}$$

$$\boldsymbol{x = 37.5°}$$

Los tres ángulos son:

$$\boldsymbol{A = 2(37.5°) = 75°}$$

$$\boldsymbol{B = 37.5°}$$

$$\boldsymbol{C = 37.5° + 30° = 67.5°}$$

En conclusión: los ángulos del triángulo son $\boldsymbol{x = 37.5°}$, $\boldsymbol{2x = 75°}$ y $\boldsymbol{x + 30° = 67.5°}$, como estos tres ángulos son diferentes, entonces, se trata de un triángulo escaleno.

La suma de los ángulos internos de un triángulo siempre es igual a $\boldsymbol{180°}$, para reforzar lo visto en este tema realiza la siguiente actividad.



Actividad 2. Suma de los ángulos internos de un triángulo

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 2.
Suma de los ángulos internos de un triángulo

2.1.2 Teorema de Tales

El teorema de Tales establece las proporciones entre segmentos, donde varias rectas paralelas cortan otras rectas (secantes). Es útil para el cálculo de longitudes desconocidas sin que se hayan medido directamente. Además, es una herramienta que permite demostrar las semejanzas de los triángulos.

Dentro de disciplinas como: Geometría (Semejanza de triángulos y el cálculo de proporciones como longitudes), Arquitectura (Escalas en planos, cálculo de alturas o las distancias en fachadas), Ingeniería (Topografía para medir anchos de ríos, carreteras o terrenos que no se pueden acceder).

El teorema de Tales es considerado el teorema fundamental de la semejanza y establece que:

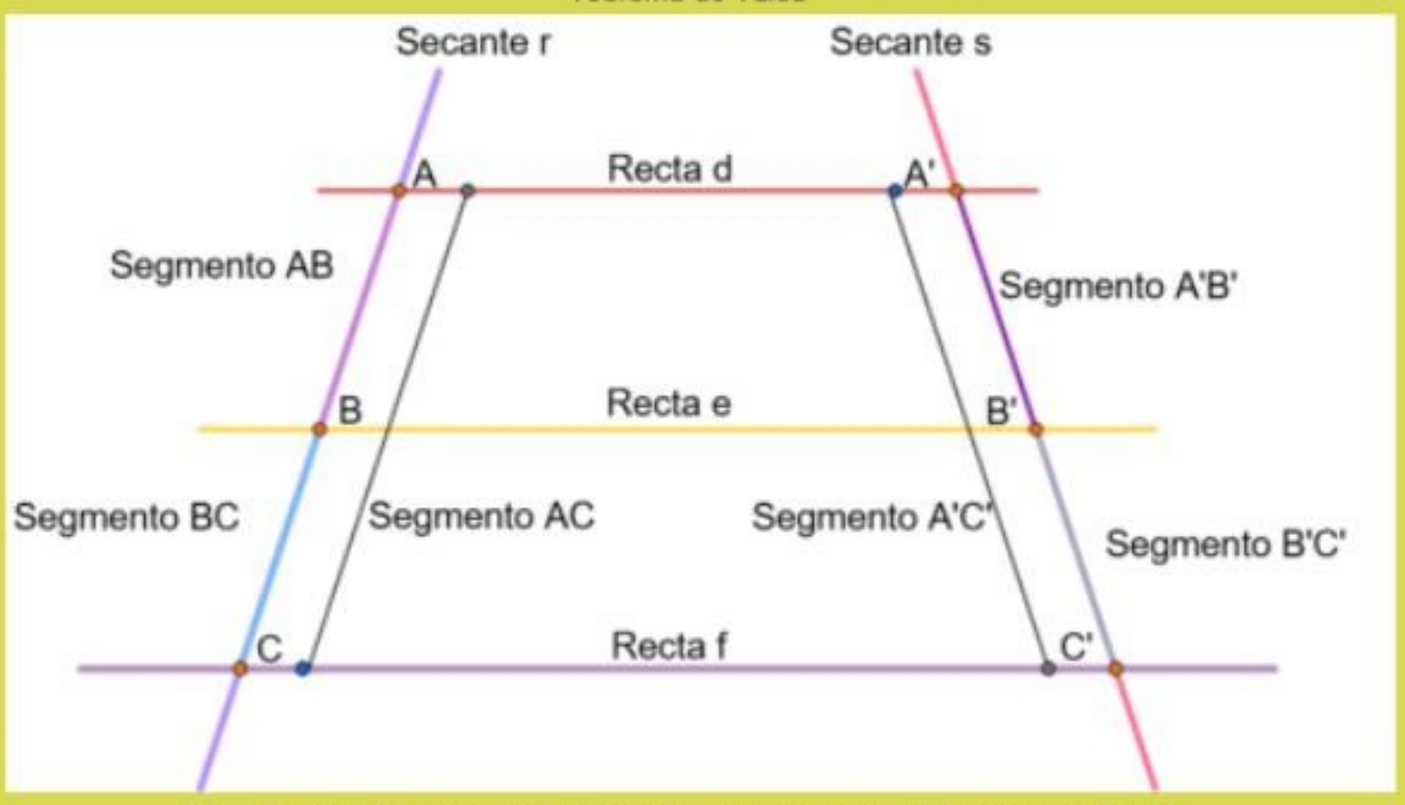
Teorema de Tales (rectas)

Cuando varias rectas paralelas corta a dos rectas que se cruzan (secantes), los segmentos que se forman guardan una relación proporcional, lo que permite comparar y calcular longitudes sin necesidad de medirlas directamente.

Esta relación la podemos expresar de la siguiente manera.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Figura 10.
Teorema de Tales



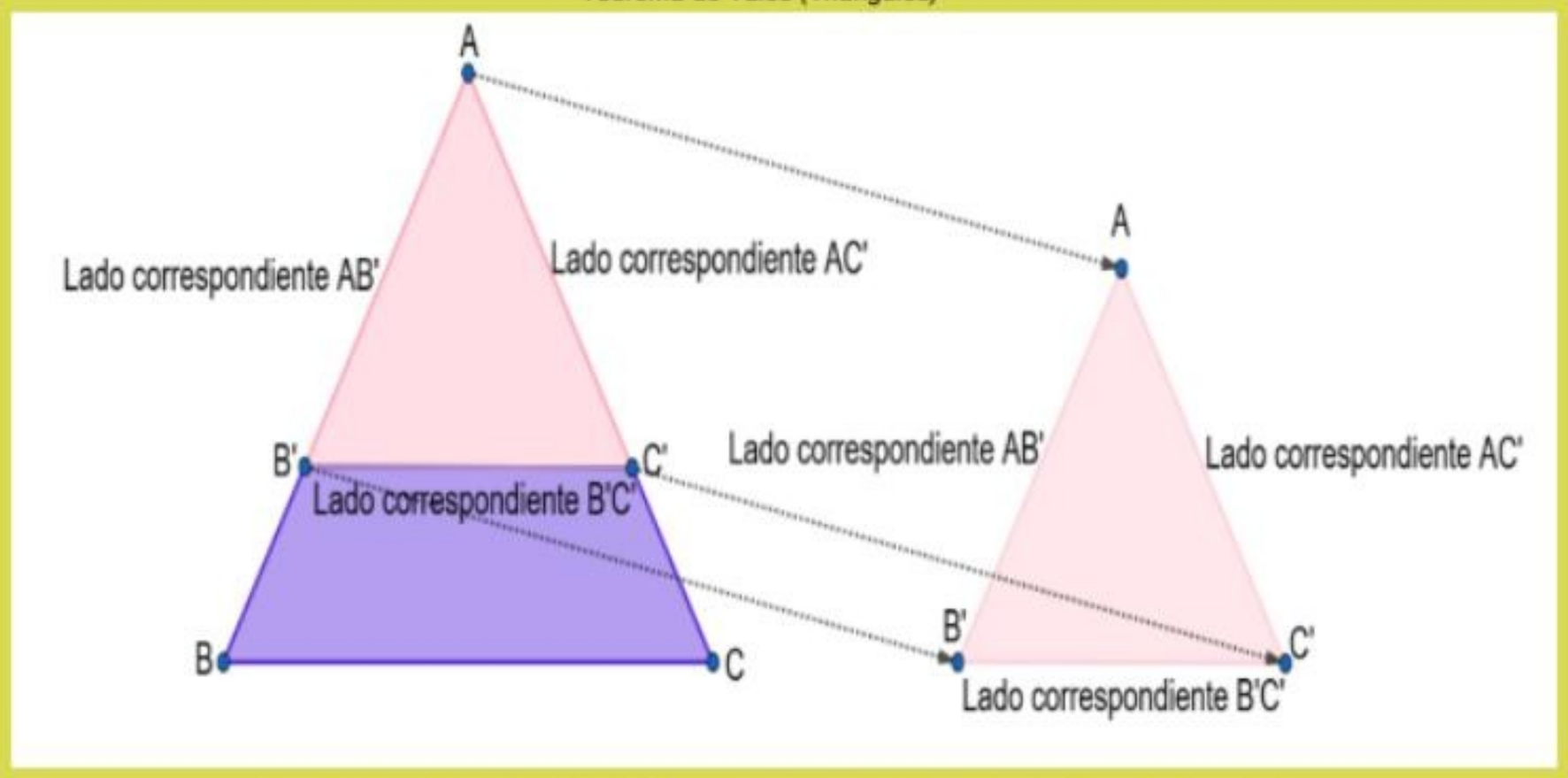
Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Teorema de Tales]

Teorema de Tales (Triángulos)

Cuando una recta paralela a uno de los lados de un triángulo con vértices A, B y C, si se traza un segmento paralelo $B'C'$ cortando a los otros dos lados, como se muestra en la Figura 5, se obtiene otro triángulo más pequeño semejante al original con vértices A, B' y C', y los lados correspondientes conservan la misma proporcionalidad a los del triangulo ABC.

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Figura 11.
Teorema de Tales (Triángulos)



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Teorema de Tales (Triángulos).]

Idea clave 1. Traslación de triángulos

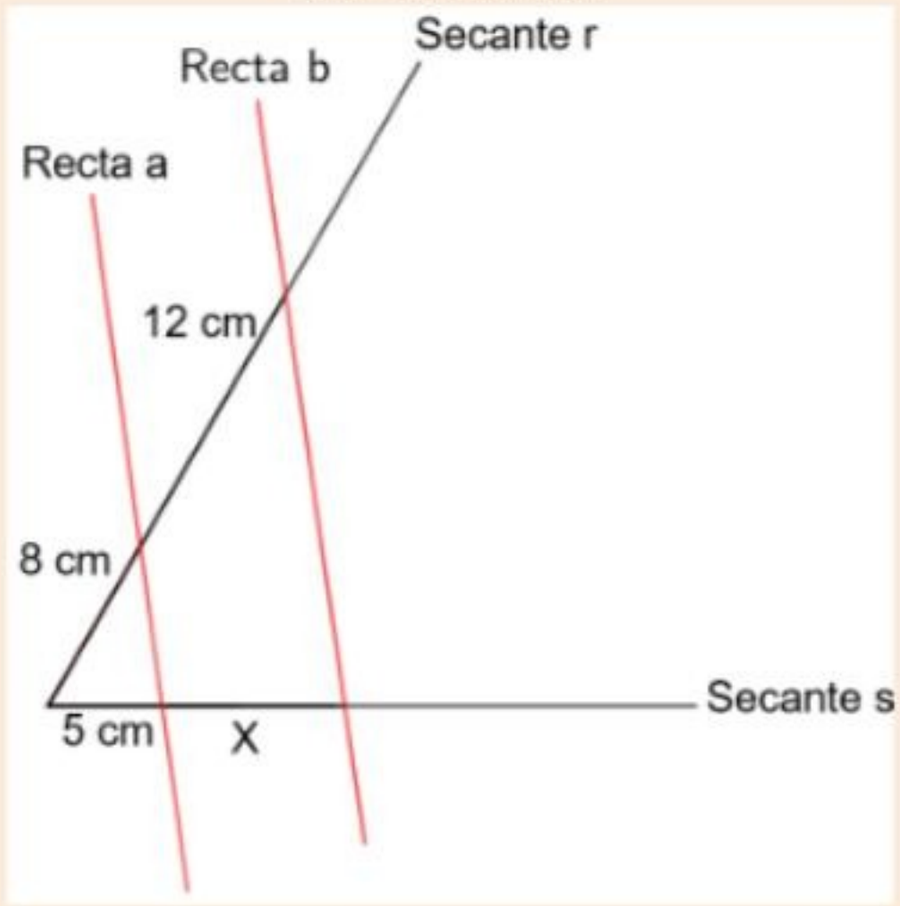
No importa que los triangulo estén separados: si sus lados correspondientes son paralelos, pueden superponerse mediante una traslación y por tal motivo el teorema de Tales sigue siendo válido.

Para tener un mejor entendimiento del teorema se realizarán algunos ejercicios, identificando rectas paralelas y segmentos correspondientes, con el propósito de establecer relaciones de proporcionalidad y calcular longitudes desconocidas de manera clara y sistemática.

Ejemplo 7.

Usa el teorema de Tales (triángulo) para calcular x.

Figura 13.
Figura para el Ejemplo 7



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Figura para el Ejemplo 7]

Solución:

Aplicando en teorema de Tales (rectas):

$$\frac{3}{x-2}=\frac{2}{4}$$

Obtenemos el valor de x:

$$\frac{3}{x-2}=\frac{2}{4}$$

$$\frac{3}{x-2}=\frac{1}{2}$$

$$3(2)=1(x-2)$$

$$6=x-2$$

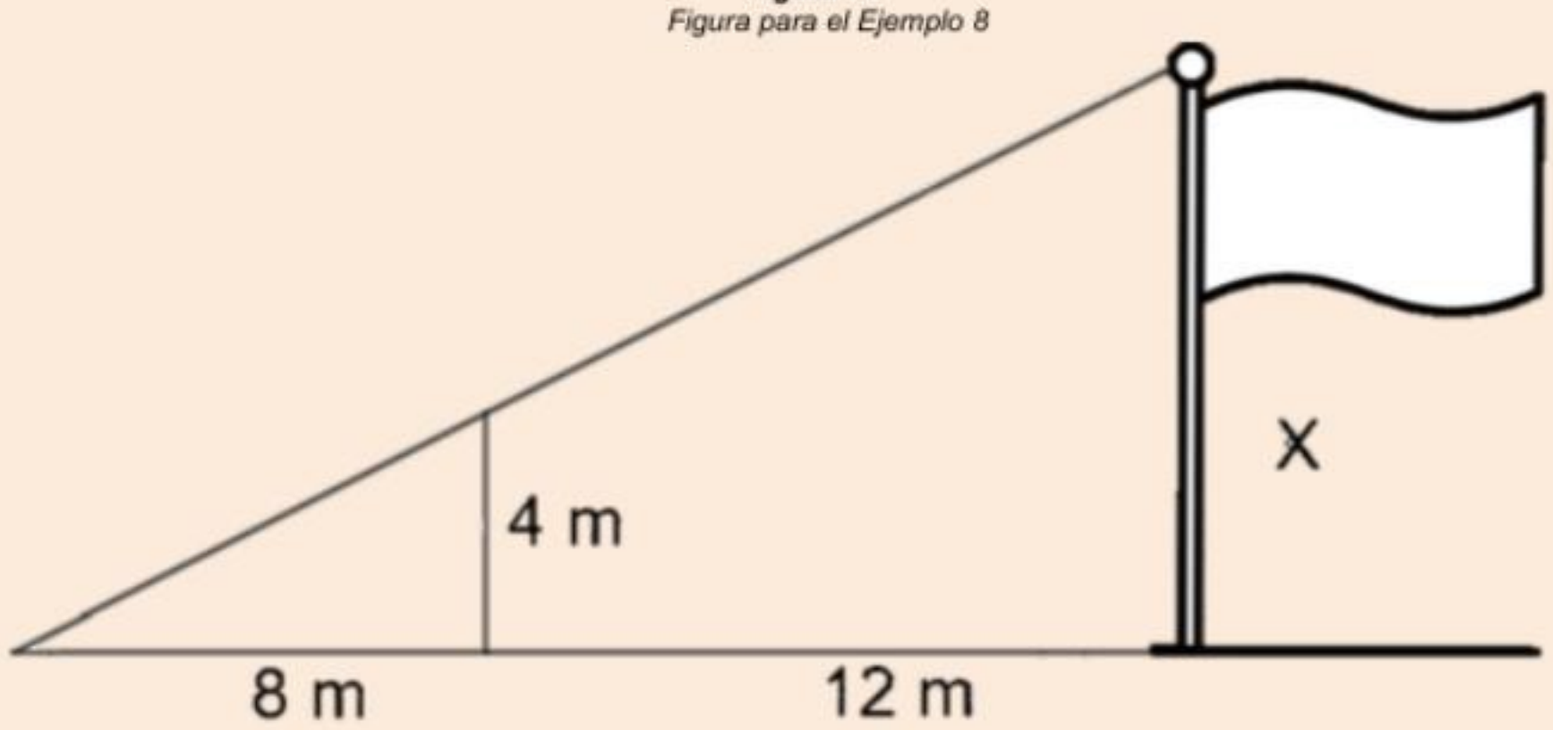
$$6+2=x$$

$$x=8$$

Ejemplo 8.

¿Qué altura tiene la asta de la bandera de acuerdo con la información dada en la figura?

Figura 14.
Figura para el Ejemplo 8



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Figura para el Ejemplo 8]

Solución:

En la figura usamos dos triángulos semejantes

Triángulo pequeño	Altura: 4 m	Base: 8 m
Triángulo grande	Altura: x	Base: 8m+12m = 20 m

Aplicando el teorema de Tales (triángulos).

Obtenemos el valor de x:

$$\frac{4}{8} = \frac{x}{20}$$

$$4(20) = 8x$$

$$80 = 8x$$

$$\frac{80}{8} = x$$

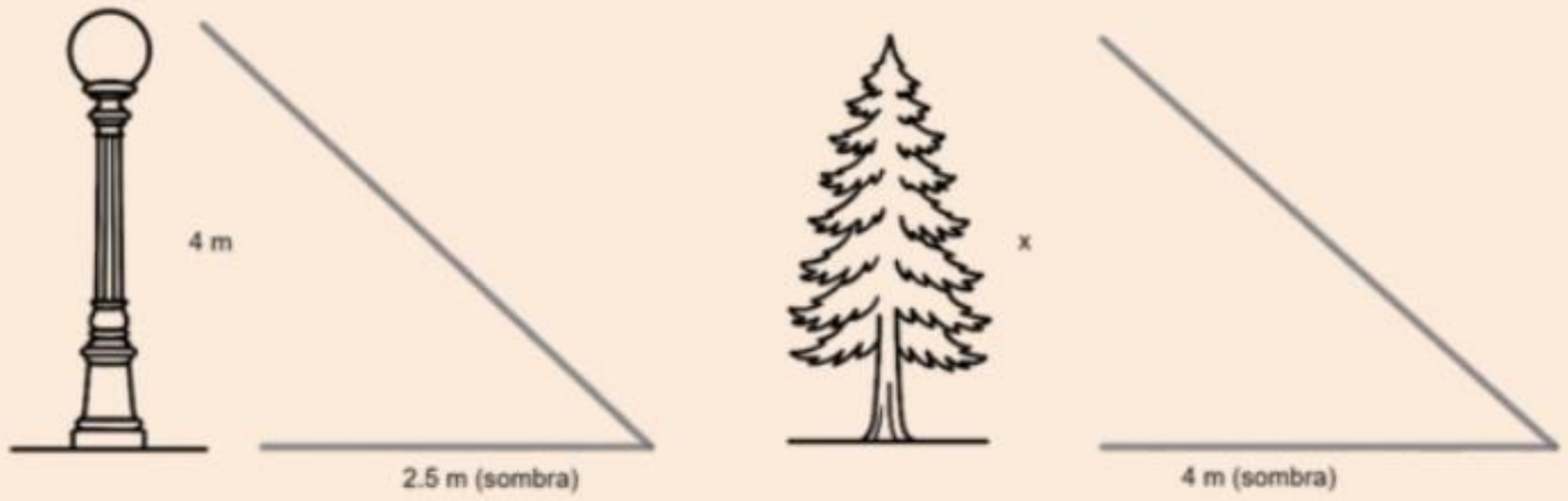
$$x = 10$$

Altura de la asta: 10 metros

Ejemplo 9.

Un poste vertical de 4 metros proyecta una sombra de 2.5 metros. ¿Qué altura tendrá un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 4 metros?

Figura 15.
Figura para el Ejemplo 9



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Figura para el Ejemplo 9]

Solución:

En la figura usamos dos triángulos semejantes

Triángulo poste	Altura: 4 m	Base: 2.5 m
Triángulo árbol	Altura: x	Base: 4m

Aplicando el teorema de Tales (triángulos).

Obtenemos el valor de x:

$$\frac{4}{2.5} = \frac{x}{4}$$

$$4(4) = 2.5x$$

$$16 = 2.5x$$

$$\frac{16}{2.5} = x$$

$$x = 6.4$$

Altura del árbol 6.4 metros



Actividad 3.
Teorema de Tales

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 3.
Teorema de Tales

2.1.2.1 Casos prácticos de congruencia y semejanza

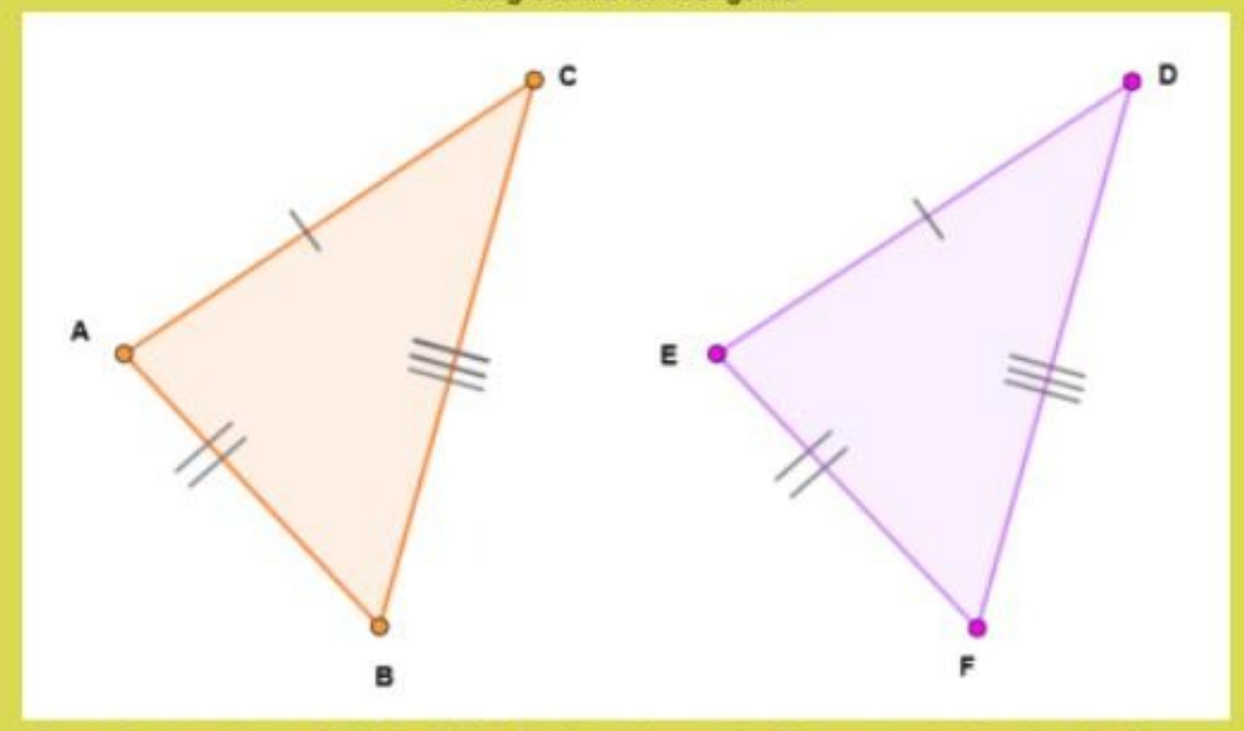
La congruencia y la semejanza son dos propiedades que nos permiten comparar y analizar figuras sin necesidad de medirlas completamente. Mediante estas relaciones es posible determinar si dos triángulos son idénticos en forma y tamaño, o si mantienen la misma forma, pero con diferente proporción.

Congruencia de triángulos

Dos triángulos (Δ) son congruentes (≅) cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño, aunque su posición u orientación sean distintas. Las partes coincidentes de las figuras congruentes se llaman homólogas o correspondientes.

Congruencia. - dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y tamaño, el símbolo para denotarla es ≅, es una combinación del signo = y ~ que denota semejanza en tamaño y la misma forma, por lo que congruencia es igual forma y medida.

Figura 16.
Congruencia de triángulos



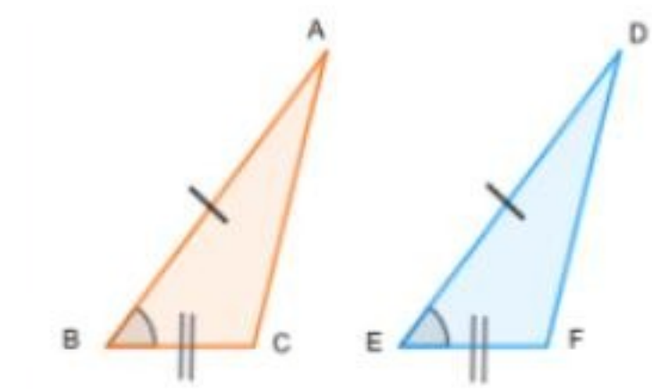
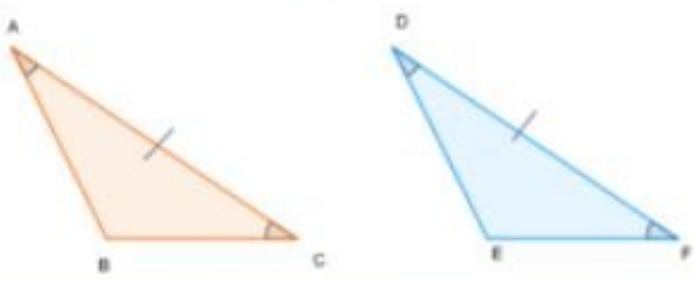
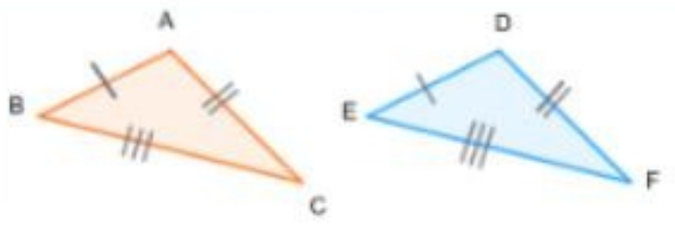
Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Congruencia de triángulos].

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Lo cual se puede leer como: el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF

Para comprobar que dos triángulos son congruentes, existen tres criterios fundamentales que garantizan la congruencia de triángulos:

Tabla 2.
Criterios de congruencia en triángulos

Caso	Criterio	
1. LAL (Lado, Ángulo, Lado)	Dos triángulos son congruentes si dos lados (-) de uno tienen la misma longitud que dos lados del otro triángulo y, los ángulos (∠) comprendidos entre esos lados tienen también la misma medida. $\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}$ y $\angle B = \angle C$	
2. ALA (Ángulo, Lado, Ángulo)	Dos triángulos son congruentes si dos ángulos (∠) y un lado (-) que es adyacente a ellos son respectivamente iguales. $\angle A = \angle D, \overline{AC} = \overline{DE}$ y $\angle C = \angle F$	
3. LLL (Lado, Lado, Lado)	Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados (-) respectivamente iguales. $\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}$ y $\overline{AC} = \overline{DF}$	

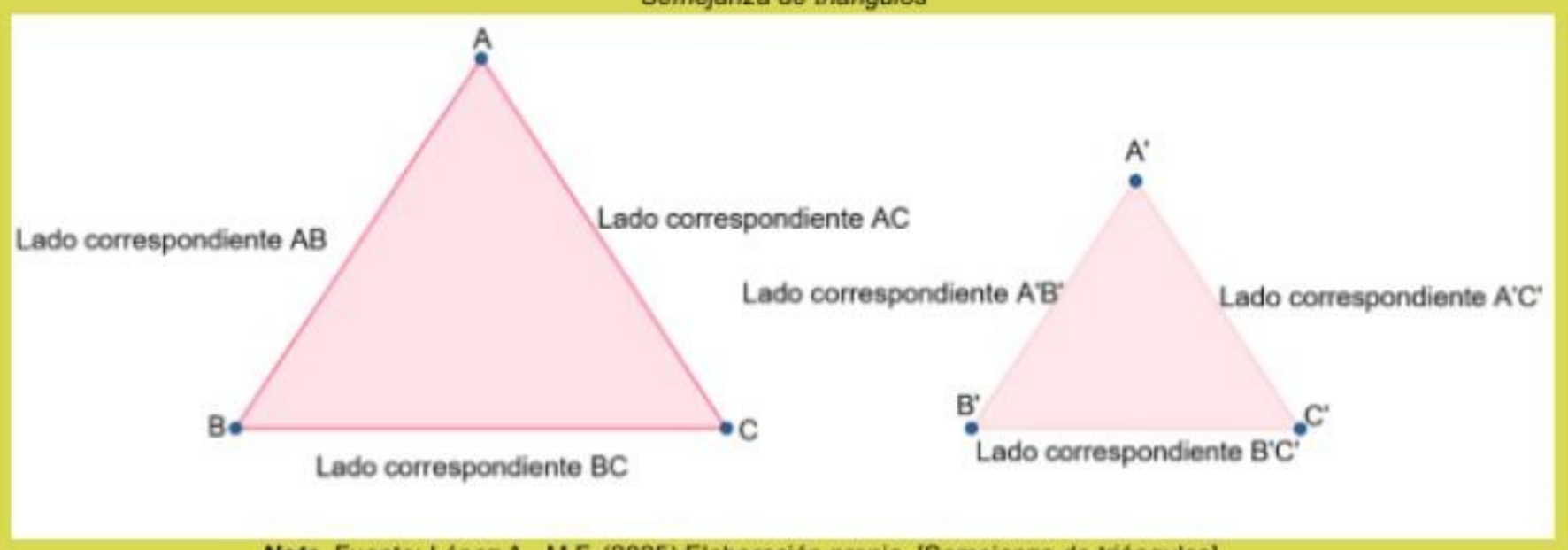
Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Criterios de congruencia en triángulos].

Congruencia de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando tienen la misma forma, pero diferente tamaño, es decir, sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes proporcionales.

Semejanza. - dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, pero el tamaño es diferente, el símbolo para denotarla es ~ por lo que semejanza es igual forma, sin tener la misma medida de sus lados.

Figura 17.
Semejanza de triángulos



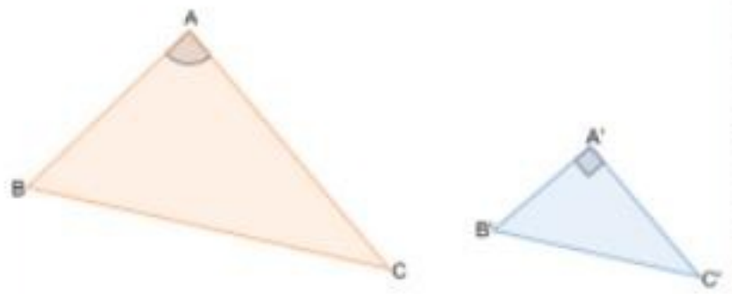
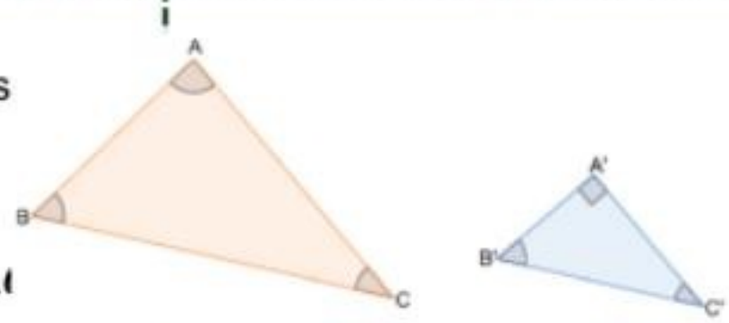
Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Semejanza de triángulos].

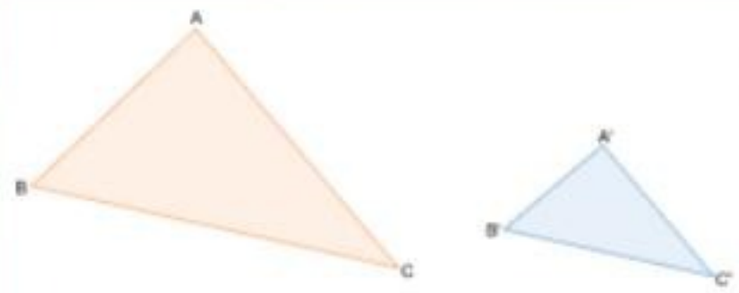
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Lo cual se puede leer como: el triángulo ABC es semejante con el triángulo DEF

Para comprobar que dos triángulos son semejantes, existen tres criterios fundamentales que garantizan la semejanza de triángulos:

Tabla 3.
Criterios de semejanza en triángulos

Caso	Criterio	
1. LAL (Lado, Ángulo, Lado)	Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo (∠) comprendido entre dichos lados de igual medida. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ y $\angle A = \angle A'$	
2. ALA (Ángulo, Lado, Ángulo)	Dos triángulos son semejantes ángulos correspondientes son o congruentes. $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle$	

3. LLL (Lado, Lado, Lado)	Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$	

Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Criterios de semejanza en triángulos].

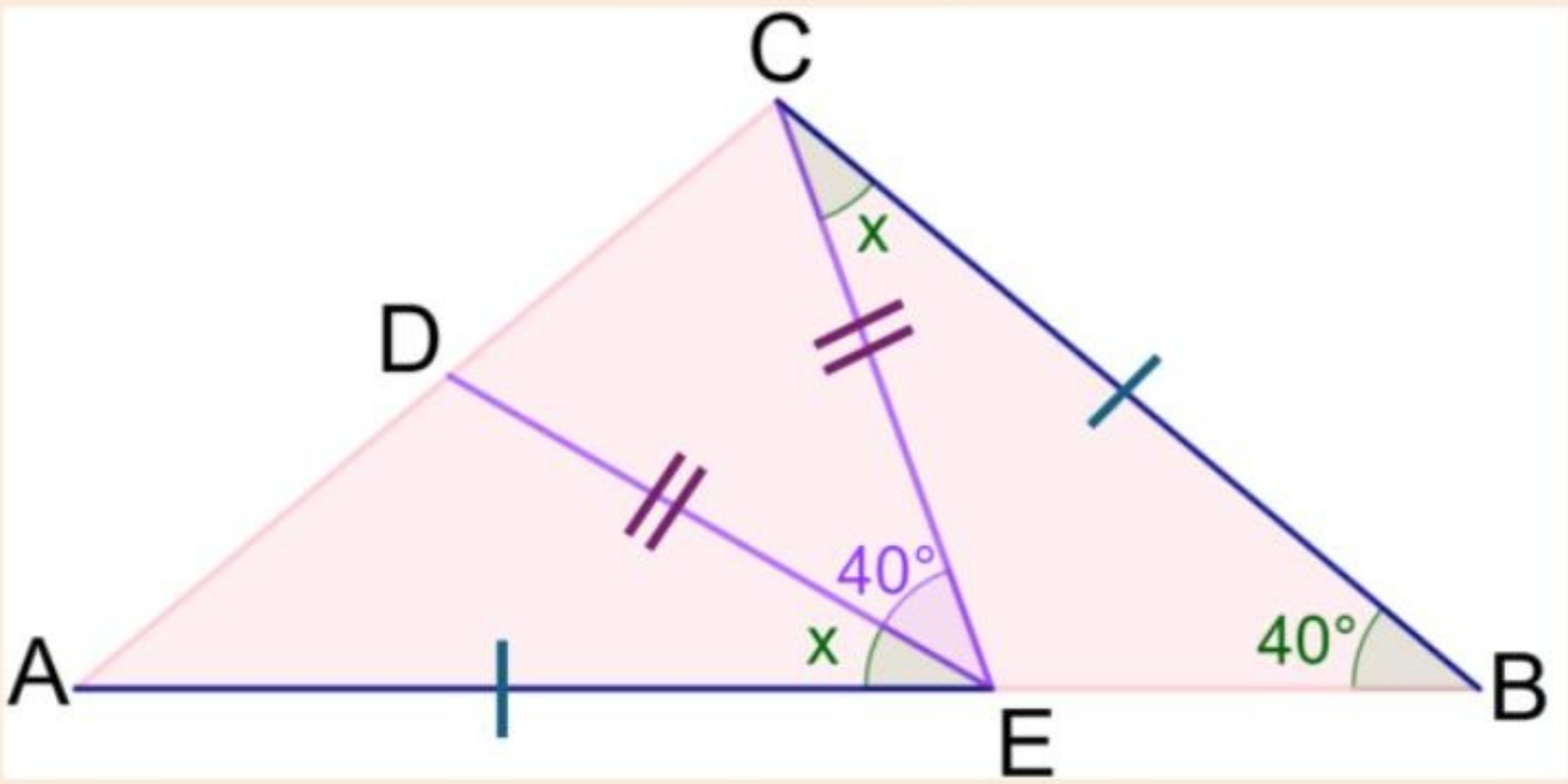
La semejanza nos permite establecer las relaciones de proporcionalidad para calcular las longitudes desconocidas y poder resolver problemas geométricos. Este concepto es fundamental en el Teorema de Tales, el uso de algunas escalas y diversas aplicaciones prácticas.

A continuación, para poder aplicar el concepto de semejanza de triángulos se realizarán algunos ejercicios, que permitan identificar triángulos semejantes, así como sus características más importantes.

Ejemplo 10.

En la siguiente figura se muestra el triángulo ABC, en su interior se tienen varios triángulos. Determina el valor del ángulo x utilizando propiedades de los triángulos y criterios de congruencia entre triángulos.

Figura 18.
Figura para el Ejemplo 10



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Figura para el Ejemplo 10].

Solución:

Las marcas en los lados indican igualdad de segmentos, es decir, $\overline{AE} = \overline{BC}$ y $\overline{CE} = \overline{DE}$. De esta última relación se deduce que el triángulo CDE es isósceles, por lo tanto, $\measuredangle DCE = \measuredangle CDE$, llamemos a estos ángulos y, entonces por la suma interna de ángulos de un triángulo se tiene:

$$40° + y + y = 180°$$

$$40° + 2y = 180°$$

$$2y = 180° - 40°$$

$$2y = 140°$$

$$y = \frac{140°}{2}$$

$$y = 70°$$

El ángulo adyacente a y es $\measuredangle ADE$ y deben sumar 180°, entonces:

$$\measuredangle ADE + y = 180°$$

$$\measuredangle ADE = 180° - y$$

$$\measuredangle ADE = 180° - 70°$$

$$\measuredangle ADE = 110°$$

Ahora, ADE y BEC tienen dos lados iguales y el ángulo entre ellos también igual, por lo tanto, por el criterio de congruencia LAL, son congruentes y el ángulo $\measuredangle DAE = 40°$.

Por último, aplicando nuevamente la suma de ángulos internos en el triángulo ADE, se tiene que:

$$\measuredangle DAE + \measuredangle ADE + x = 180°$$

$$40° + 110° + x = 180°$$

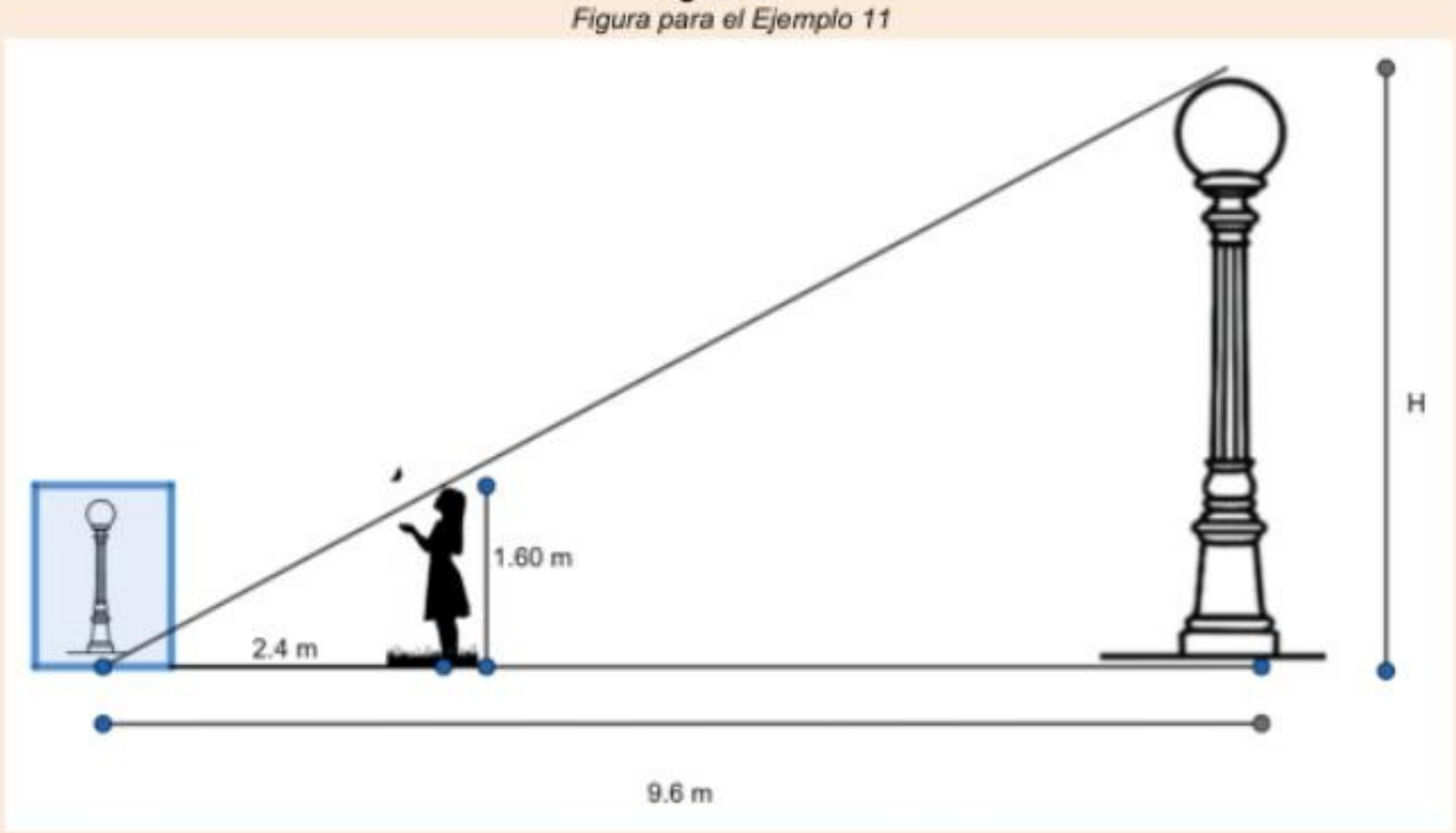
$$x = 180° - 40° - 110°$$

$$x = 30°$$

Ejemplo 11.

Adriana mide $1.60\ m$ y ve reflejada la altura de un poste en un vidrio. Ella está a 2.4 m del vidrio y el poste está a 9.6 m del vidrio. Calcula la altura del poste.

Figura 19.
Figura para el Ejemplo 11



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Figura para el Ejemplo 11].

Solución:

Por semejanza de triángulos (AA) porque ambos triángulos comparten el vértice donde está el vidrio y tienen cada uno un ángulo de 90°:

$$\frac{\boldsymbol{altura\ de\ Adriana}}{\boldsymbol{distancia\ al\ vidrio}} = \frac{\boldsymbol{altura\ del\ poste}}{\boldsymbol{distancia\ del\ poste\ al\ vidrio}}$$

Obtenemos el valor de $\boldsymbol{H}$:

$$\frac{\mathbf{1.60}}{\mathbf{2.4}} = \frac{\boldsymbol{H}}{\mathbf{9.6}}$$

$$\boldsymbol{H} = \mathbf{1.60}\left(\frac{\mathbf{9.6}}{\mathbf{2.4}}\right)$$

$$\boldsymbol{H} = \mathbf{1.60(4)}$$

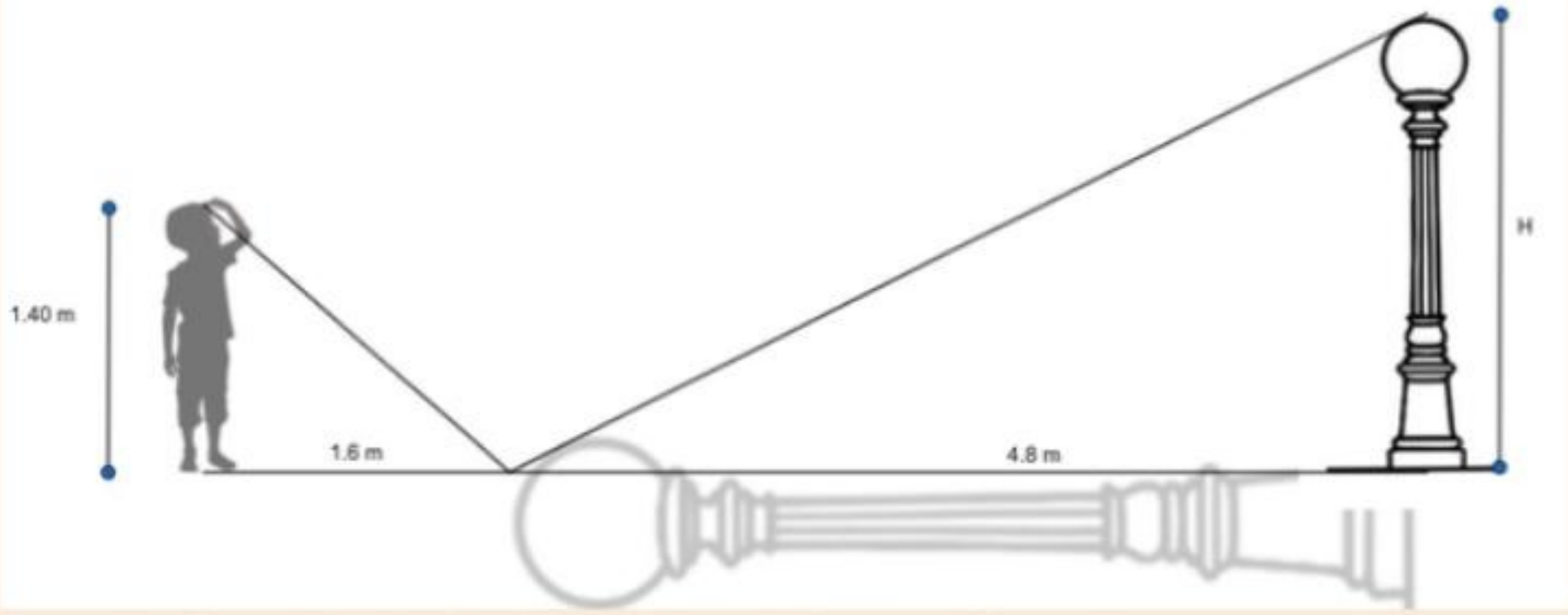
$$\boldsymbol{H} = \mathbf{6.4}$$

Altura del poste: $\mathbf{6.4}\ \boldsymbol{m}$

Ejemplo 12.

En un pasillo de escuela, una lámpara se refleja sobre el piso brillante. David mide 1.40 m y observa que su reflejo coincide con el de la lámpara cuando él se coloca a 1.6 m del punto de reflexión. La lámpara está a 4.8 m del mismo punto. Calcula la altura de la lámpara.

Figura 20.
Figura para el Ejemplo 12



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025) Elaboración propia. [Figura para el Ejemplo 12].

Solución:

Los triángulos son semejantes (AA), ya que ambos son triángulos rectángulos y además comparten un mismo ángulo debido a la ley de la reflexión con el piso.

$$\frac{\boldsymbol{altura\ de\ David}}{\boldsymbol{distancia\ David - reflejo}} = \frac{\boldsymbol{altura\ de\ la\ lámpara}}{\boldsymbol{distancia\ lámpara - reflejo}}$$

Obtenemos el valor de $\boldsymbol{H}$:

$$\frac{\mathbf{1.40}}{\mathbf{1.6}} = \frac{\boldsymbol{H}}{\mathbf{4.8}}$$

$$\boldsymbol{H} = \mathbf{1.40}\left(\frac{\mathbf{4.8}}{\mathbf{1.6}}\right)$$

$$\boldsymbol{H} = \mathbf{1.40(3)}$$

$$\boldsymbol{H} = \mathbf{4.2}$$

Altura de la lámpara: $\mathbf{4.2}\ \boldsymbol{m}$



Actividad 4.
Casos prácticos de congruencia y semejanza

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 4.
Casos prácticos de congruencia y semejanza

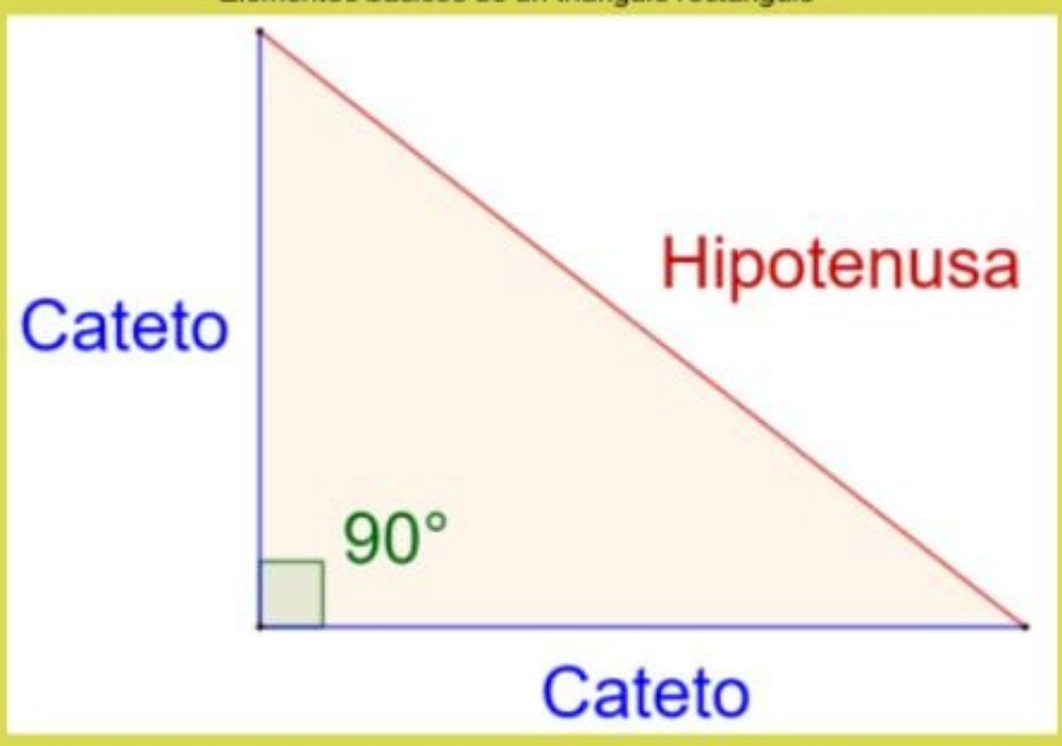
2.2 Triángulo rectángulo

Dentro de los diferentes tipos de triángulos existe uno que es muy especial y útil para muchos tipos de aplicaciones, se trata del **triángulo rectángulo:**

Congruencia de triángulos

Es un triángulo cuya característica distintiva es que tiene un ángulo de 90°. A los lados que forman al ángulo de 90° se les denomina catetos, mientras que el lado opuesto se denomina hipotenusa. La Figura 21 muestra al ángulo de 90° en verde, los catetos en azul y la hipotenusa en rojo.

Figura 21.
Elementos básicos de un triángulo rectángulo



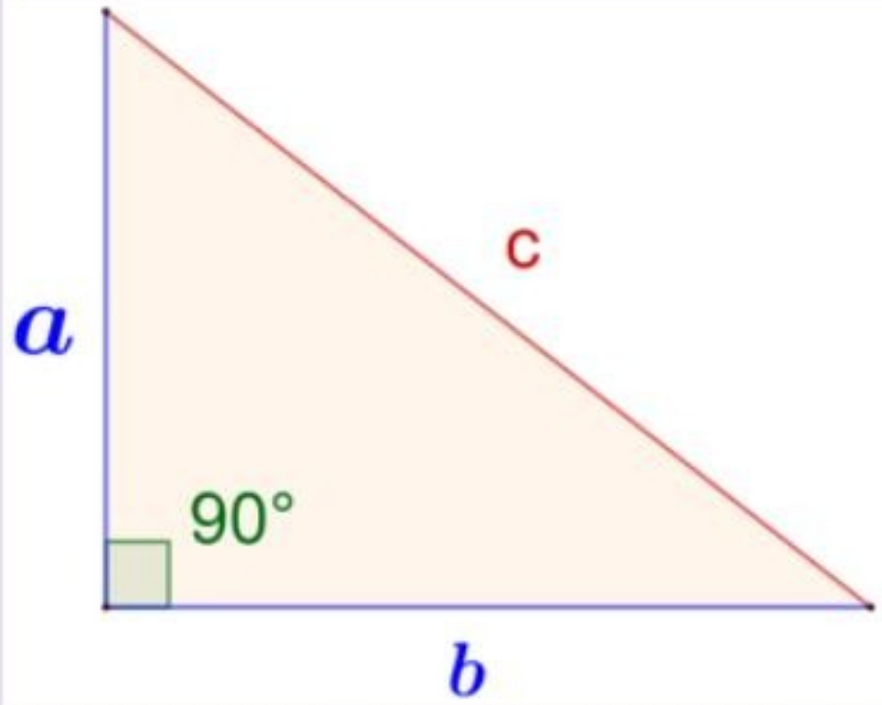
Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Elementos básicos de un triángulo rectángulo.]

En un triángulo se cumplen muchas propiedades, por ejemplo, en el módulo III de Pensamiento Matemático II aprendiste el **Teorema de Pitágoras**, el cual es una relación entre las tres medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Idea clave 2. Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa equivale a la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo. Observemos esta relación mediante la Figura 22:

Figura 22.
Teorema de Pitágoras



$$c^2 = a^2 + b^2$$

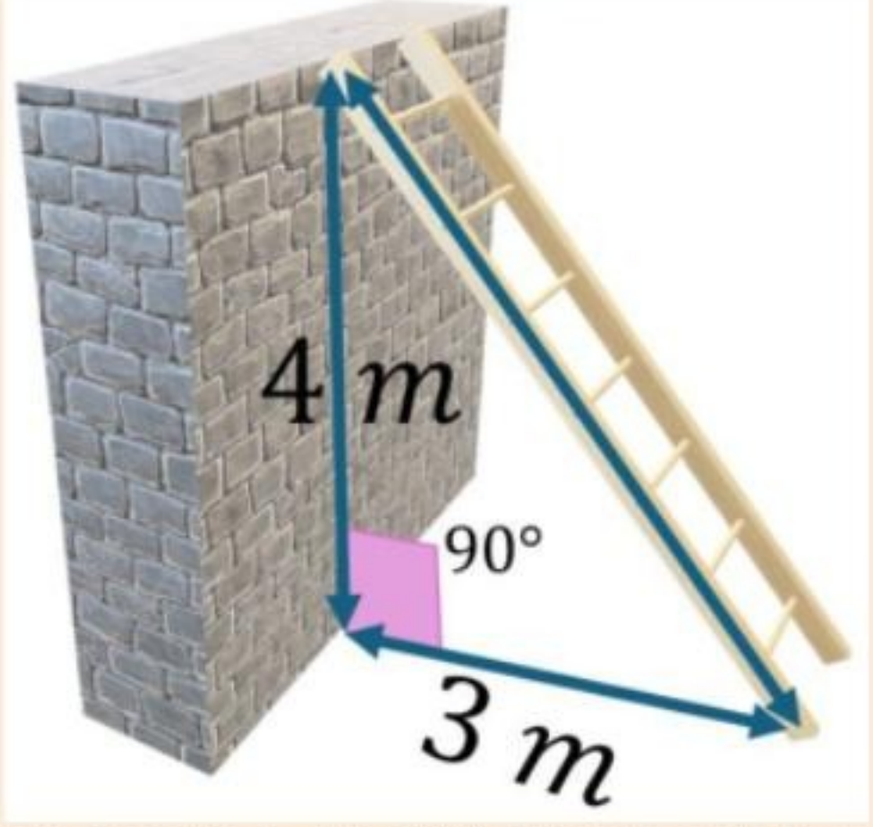
Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Teorema de Pitágoras.]

Recordemos también cómo aplicar este Teorema en algunos ejemplos:

Ejemplo 13.

Una escalera reposa a 4 metros de altura sobre un muro cuando su base está a 3 metros de este ¿Cuál es la longitud de la escalera?

Figura 23.
Figura para el Ejemplo 13



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura para el Ejemplo 13].

Solución:

Asignemos a los catetos las medidas de $\boldsymbol{a = 4\,\mathrm{m}}$ y $\boldsymbol{b = 3\,\mathrm{m}}$ respectivamente, por lo tanto, nuestra incógnita es la hipotenusa $\boldsymbol{c}$, aplicando esta información en el Teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

$$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\boldsymbol{c = \sqrt{(4\,\mathrm{m})^2 + (3\,\mathrm{m})^2}}$$

$$\boldsymbol{c = \sqrt{16\,\mathrm{m}^2 + 9\,\mathrm{m}^2}}$$

$$\boldsymbol{c = \sqrt{25\,\mathrm{m}^2}}$$

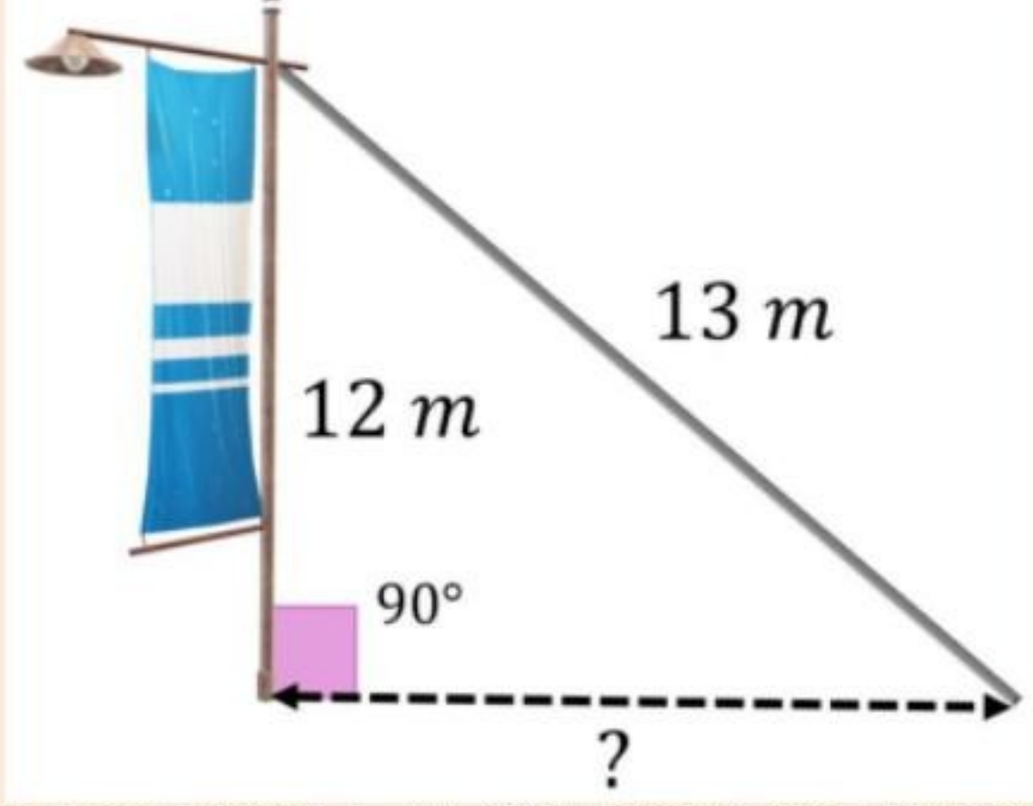
$$\boldsymbol{c = 5\,\mathrm{m}}$$

En conclusión: la escalera tiene 5 metros de longitud.

Ejemplo 14.

Se necesita sujetar un poste de 12 metros de altura con un cable de acero de 13 metros ¿A qué distancia de la base del poste se debe colocar el soporte de sujeción del cable de acero?

Figura 24.
Figura para el Ejemplo 14



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura para el Ejemplo 14].

Solución:

En esta situación la altura del poste es uno de los catetos, asignemos $\boldsymbol{a = 12\,m}$, por otro lado, la longitud del cable es la hipotenusa por lo que $\boldsymbol{c = 13\,m}$, por lo tanto, nuestra incógnita es el otro cateto, el cateto $\boldsymbol{b}$, aplicando esta información en el Teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

$$\boldsymbol{c^2 - a^2 = b^2}$$

$$\boldsymbol{b^2 = c^2 - a^2}$$

$$\boldsymbol{b = \sqrt{c^2 - a^2}}$$

$$\boldsymbol{b = \sqrt{(13\ \mathrm{m})^2 - (12\ \mathrm{m})^2}}$$

$$\boldsymbol{b = \sqrt{169\ \mathrm{m}^2 - 144\ \mathrm{m}^2}}$$

$$\boldsymbol{b = \sqrt{25\ \mathrm{m}^2}}$$

$$\boldsymbol{b = 5\ \mathrm{m}}$$

En conclusión: el soporte de sujeción del cable debe estar a 5 metros de la base del poste.

Ejemplo 15.

Demuestra que un triángulo cuyos lados miden 24 cm, 32 cm y 40 cm es un triángulo rectángulo.

Solución:

Un método sencillo para demostrar esta solicitud es aplicar el Teorema de Pitágoras, recuerda que el lado más largo es la hipotenusa, mientras que los catetos se pueden elegir en cualquier orden, entonces se tiene que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Donde:

$$c = 40 \text{ cm} \qquad a = 24 \text{ cm} \qquad b = 32 \text{ cm}$$

Sustituyendo:

$$(40 \text{ cm})^2 \text{ por separado } (24 \text{ cm})^2 + (32 \text{ cm})^2$$

$$1600 \text{ cm}^2 \quad \textit{por separado} \quad 576 \text{ cm}^2 + 1024 \text{ cm}^2$$

$$1600 \text{ cm}^2 \quad \textit{por separado} \quad 1600 \text{ cm}^2$$

$$1600 \text{ cm}^2 = 1600 \text{ cm}^2$$

En conclusión: un triángulo cuyos lados miden **24 cm**, **32 cm** y **40 cm** es un triángulo rectángulo.

Un triángulo rectángulo debe tener un ángulo de 90°, por lo tanto, los dos restantes deben sumar también 90° para cumplir que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Nombremos a esos ángulos restantes con las letras griegas α y β, entonces se cumple que:

$$\alpha + \beta = 90°$$

Recuerda que dos ángulos que suman 90° se llaman complementarios, por lo tanto, **α y β son ángulos complementarios.**

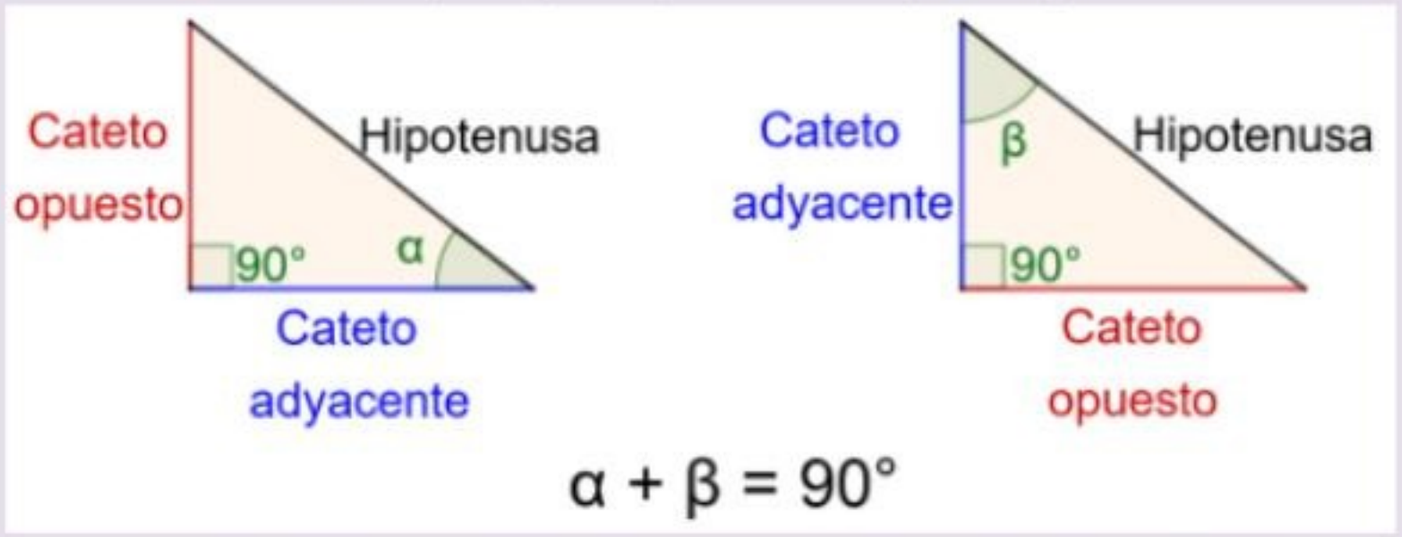
Además, en Pensamiento Matemático III aprendiste que al elegir a uno de estos ángulos $\boldsymbol{\alpha}$ o $\boldsymbol{\beta}$, automáticamente se definen a los denominados catetos adyacente y opuesto.

Estos conceptos los resumimos en la **Figura 25:**

Idea clave 3. Cateto adyacente y cateto opuesto

En la Figura 25 se muestran dos triángulos rectángulos en los cuales, al elegir al ángulo α o β como referencia, automáticamente se definen los llamados cateto adyacente y cateto opuesto de forma respectiva:

Figura 25.
Cateto adyacente y cateto opuesto en un triángulo rectángulo



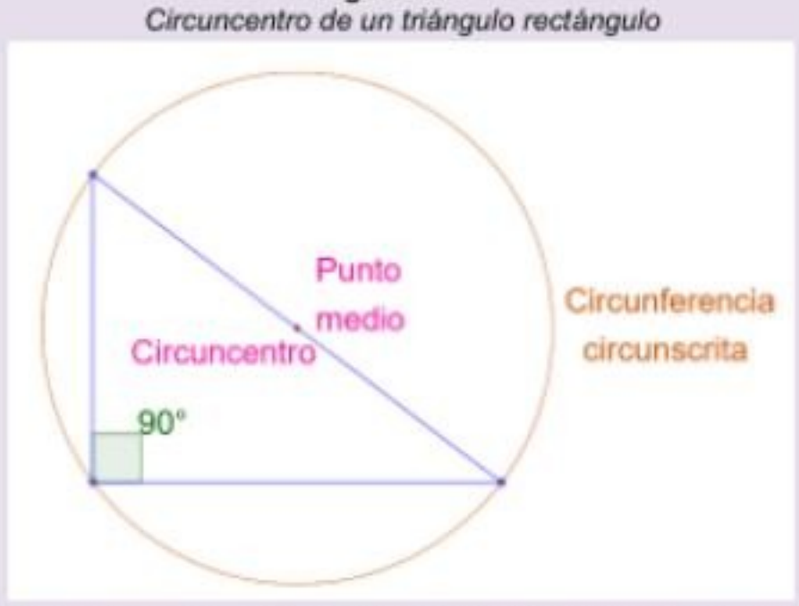
Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Cateto adyacente y cateto opuesto en un triángulo rectángulo.]

Los elementos descritos hasta ahora serán fundamentales para definir más elementos importantes que se pueden estudiar con la ayuda de los triángulos rectángulos, a continuación, mencionaremos algunos de ellos: las razones trigonométricas, los ángulos en posición normal y los ángulos reducidos.

Idea clave 4. Circuncentro de un triángulo rectángulo

El circuncentro de un triángulo rectángulo coincide con el punto medio de la hipotenusa.

Figura 26.
Circuncentro de un triángulo rectángulo



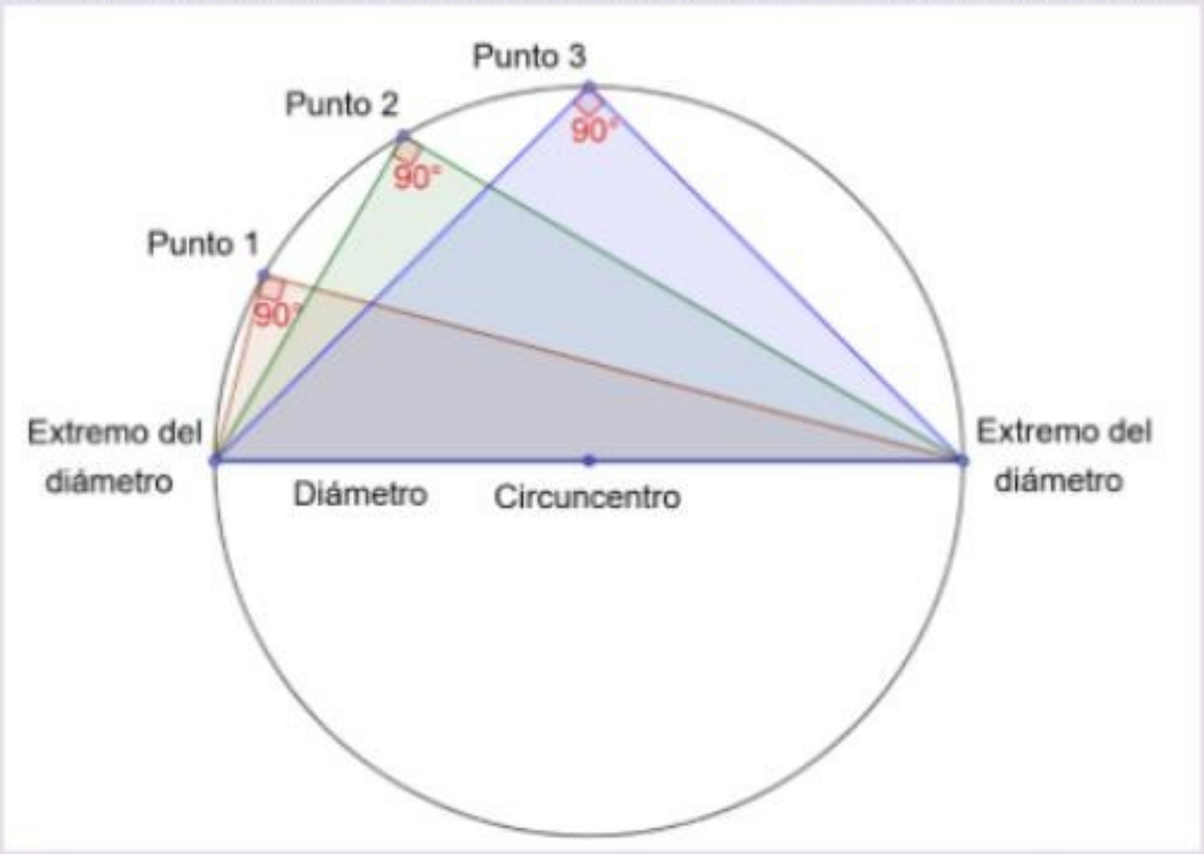
Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Circuncentro de un triángulo rectángulo.]

Esta afirmación la puedes demostrar con conceptos de semejanza vistos en el tema anterior. ¡Inténtalo! apóyate con tus compañeros y docente.

Por ahora, analicemos su importancia, puesto que, como el circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa, entonces, la hipotenusa es un diámetro de la circunferencia circunscrita, en otras palabras, cuando tengas un diámetro en una circunferencia cualquiera y eliges un punto cualquiera en ella, al unir los extremos del diámetro y ese punto con líneas, siempre obtendrás un triángulo rectángulo.

Figura 27.

Triángulos rectángulos formados por extremos del diámetro y puntos cualesquiera de una circunferencia



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Triángulos rectángulos formados por extremos del diámetro y puntos cualesquiera de una circunferencia.]



Actividad 5.
Triángulo rectángulo

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

2.2.1 Razones trigonométricas

Así como el Teorema de Pitágoras relaciona las tres medidas de los lados de un triángulo rectángulo, existen razones que relacionan los lados y los ángulos de los triángulos rectángulos.

Razón trigonométrica

Una razón trigonométrica es la relación que existe entre dos lados y un ángulo de un triángulo rectángulo. Existen 3 razones trigonométricas directas que son: seno (sen o sin), coseno (cos) y tangente (tan o tg); así como sus respectivas 3 razones trigonométricas recíprocas que son: cosecante (csc), secante (sec) y cotangente (cot o ctg).

En la tabla se muestran estas relaciones para un ángulo fijo θ:

NOTA: para la razón trigonométrica seno, en este texto se emplearán de forma equivalente los símbolos sin y sen.

Tabla 4.
Razones trigonométricas

Razón	Abreviatura	Lados relacionados	Expresión algebraica
Seno	Sin	Cateto opuesto (co) Hipotenusa (h)	$\sin\theta = \frac{co}{h}$
Coseno	Cos	Cateto adyacente (ca) Hipotenusa (h)	$\cos\theta = \frac{ca}{h}$
Tangente	Tan	Cateto opuesto (co) Cateto adyacente (ca)	$\tan\theta = \frac{co}{ca}$
Cotangente	Cot	Cateto adyacente (ca) Cateto opuesto (co)	$\cot\theta = \frac{ca}{co}$
Secante	Sec	Hipotenusa (h) Cateto adyacente (ca)	$\sec\theta = \frac{h}{ca}$
Cosecante	Csc	Hipotenusa (h) Cateto opuesto (co)	$\csc\theta = \frac{h}{co}$

Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Razones trigonométricas.]

Idea clave 5. Formato de ángulos en la calculadora

Comprueba el formato de ángulos con el que está configurada tu calculadora, para ello, observa tu pantalla e identifica una de las siguientes letras:

D: del inglés "*degree*", tu calculadora está configurada para trabajar con ángulos medidos en el sistema sexagesimal. Se suele emplear este formato cuando un ejercicio tenga ángulos que muestren el símbolo °. De forma coloquial decimos que la calculadora está en grados.

R: del inglés "*radian*", tu calculadora está configurada para trabajar con ángulos medidos en el sistema cíclico. Se suele emplear este formato cuando el ángulo incluye al símbolo π o la terminación rad. De forma coloquial decimos que la calculadora está en radianes.

Figura 28.
Formato sexagesimal "degree" y cíclico "radian" en la calculadora



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Formato sexagesimal "degree" y cíclico "radian" en la calculadora.]

Solicita a tu profesor que te muestre cómo cambiar entre estos formatos en tu calculadora.

La mayoría de las calculadoras científicas cuentan con botones con las siglas sin, cos y tan, ubícalos en tu calculadora y practica su uso. A continuación, te mostramos algunos ejemplos para que identifiques que estás utilizando el formato correcto.

Ejemplo 16.

Calcular el seno de $\mathbf{40°}$ en la calculadora.

Solución:

Asegúrate que la calculadora se encuentra en grados ($\boldsymbol{D}$), después ubica el símbolo sin y presiónalo, puede ser que en algunas calculadoras lo encuentres como sen, recuerda que son sinónimos. Después coloca el valor del ángulo 40, no es necesario que agregues el símbolo °, porque la calculadora lo interpreta puesto que ya habías seleccionado el formato sexagesimal, pero si gustas, puedes agregarlo. Algunos modelos de calculadora activan de forma predeterminada un paréntesis, es una buena costumbre que cierres el paréntesis, por último, presiona la tecla = o EXE.

Para que tengas una mejor idea de lo que se debe observar en la calculadora analiza la **Figura 29**:

Figura 29.
Cálculo del seno de 40° empleando la calculadora en formato sexagesimal



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Cálculo del seno de 40° empleando la calculadora en formato sexagesimal.]

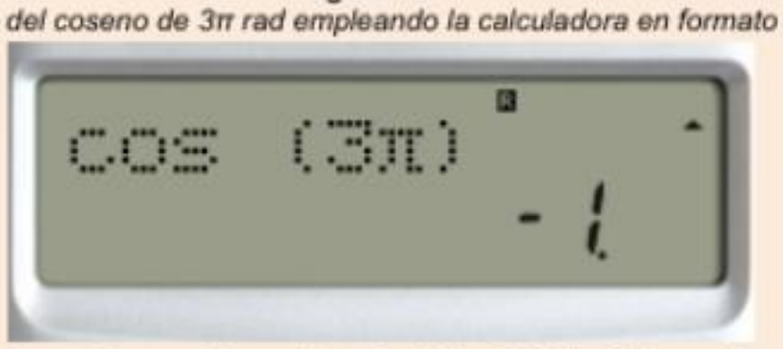
Ejemplo 17.

Calcular el coseno de $3\pi\ rad$ en la calculadora.

Solución:

Asegúrate que la calculadora se encuentra en radianes (R), después ubica el símbolo cos y presiónalo, enseguida coloca el valor del ángulo 3π, no es necesario que agregues el rad, porque la calculadora lo interpreta puesto que ya habías seleccionado el formato cíclico. Algunos modelos de calculadora activan de forma predeterminada un paréntesis, es una buena costumbre que cierres el paréntesis, por último, presiona la tecla = o EXE. Para que tengas una mejor idea de lo que se debe observar en la calculadora analiza la **Figura 30**:

Figura 30.
Cálculo del coseno de 3π rad empleando la calculadora en formato cíclico



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Cálculo del coseno de 3π rad empleando la calculadora en formato cíclico.]

También es posible calcular el valor de un ángulo a partir de un valor dado de una razón trigonométrica, para las razones trigonométricas directas tenemos: arco seno, arco coseno y arco tangente, algunas veces se nombran ángulo seno, ángulo coseno y ángulo tangente, aunque en las calculadoras se suelen escribir como $\mathbf{sin^{-1}}, \mathbf{cos^{-1}}$ y $\mathbf{tan^{-1}}$.

Analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 18.

Calcular el valor de un ángulo en grados cuyo seno es $\boldsymbol{\sin\theta = 0.5}$.

Solución:

Asegúrate que la calculadora se encuentra en grados ($\boldsymbol{D}$), después ubica el símbolo shift (en algunas calculadoras lo encuentras como 2nd) y presiónalo, después presiona la tecla sin, enseguida coloca el valor indicado en el problema $\mathbf{0.5}$, en caso de que tu calculadora haya colocado de forma automática un paréntesis recuerda cerrarlo, por último, presiona la tecla = o EXE. Para que tengas una mejor idea de lo que se debe observar en la calculadora analiza la **Figura 31**:

Figura 31.
Valor de un ángulo en grados cuyo seno es sin⁻¹θ=0.5



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Valor de un ángulo en grados cuyo seno es sin⁻¹θ=0.5.]

En conclusión: el valor del ángulo cuyo seno es $\boldsymbol{\sin\theta = 0.5}$ es 30°.

Ejemplo 19.

Calcular el valor de un ángulo en radianes cuya tangente es $\boldsymbol{\tan\alpha = 1}$.

Solución:

Asegúrate que la calculadora se encuentra en radianes ($\boldsymbol{R}$), después ubica el símbolo shift (en algunas calculadoras lo encuentras como 2nd) y presiónalo, después presiona la tecla tan, enseguida coloca el valor indicado en el problema $\mathbf{1}$, en caso de que tu calculadora haya colocado de forma automática un paréntesis recuerda cerrarlo, por último, presiona la tecla = o EXE.

Para que tengas una mejor idea de lo que se debe observar en la calculadora analiza la **Figura 32**:

Figura 32.
Valor de un ángulo en grados cuya tangente es tanθ=1



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Valor de un ángulo en grados cuya tangente es tanθ=1.]

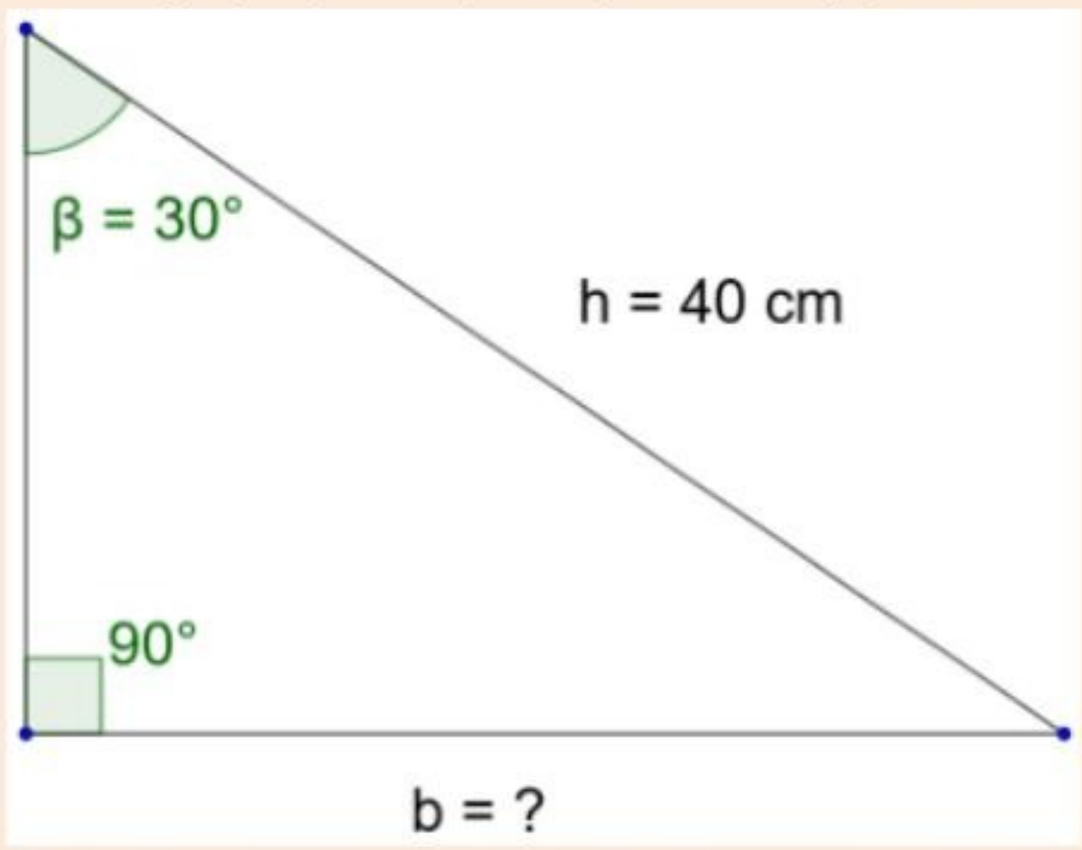
En conclusión: el valor del ángulo cuya tangente es $\tan\alpha = 1$ es 0.785398... lo cual equivale a $\frac{\pi}{4}$. ¡Divide en tu calculadora el valor de pi entre 4 y compruébalo!

Las razones trigonométricas nos permiten averiguar la medida de un ángulo o la medida de un lado a partir de dos datos más, veamos los siguientes ejemplos para aprender más sobre ellas:

Ejemplo 20.

Calcula el valor del cateto b del siguiente triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa $h = 40\ cm$ y que el valor del ángulo $\beta = 30°$:

Figura 33.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 20



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 20.]

Solución:

Nota: Verifica que para este ejercicio tu calculadora esté en grados (sistema sexagesimal). Debido a la posición del ángulo dado, la incógnita del problema es el cateto opuesto indicado con la letra $\boldsymbol{b}$. La razón trigonométrica que relaciona los datos ángulo dado, cateto opuesto e hipotenusa es el seno, de donde:

$$\sin \beta = \frac{co}{h}$$

$$\sin 30° = \frac{b}{40 \text{ cm}}$$

$$(40 \text{ cm})(\sin 30°) = b$$

$$b = (40 \text{ cm})(\sin 30°)$$

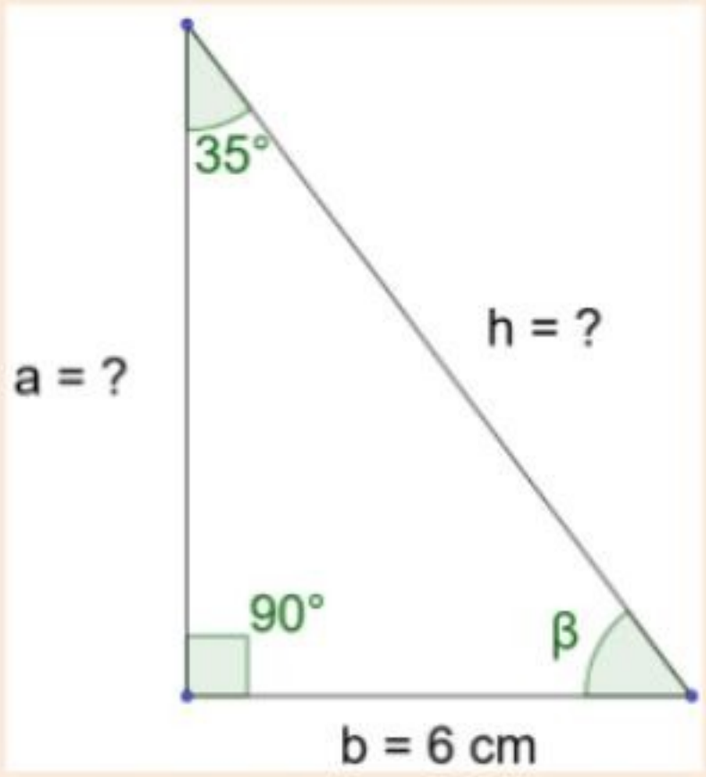
$$b = 20 \text{ cm}$$

En conclusión: la medida del cateto $\boldsymbol{b}$ es de $\mathbf{20\ cm}$.

Ejemplo 21.

Con los datos proporcionados en el siguiente triángulo rectángulo, calcula el valor del cateto $\boldsymbol{a}$, el valor de la hipotenusa $\boldsymbol{h}$ y el valor del ángulo $\boldsymbol{\beta}$:

Figura 34.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 21



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 21.]

Solución:

Nota: Verifica que para este ejercicio tu calculadora esté en grados (sistema sexagesimal).

El ejercicio se puede resolver de diversas formas, aquí te mostraremos un camino, más te invitamos a que platiques con tus compañeros y docente cuáles podrían ser otras alternativas.

Por ejemplo, es útil recordar que, en todo triángulo la suma de sus ángulos internos debe ser 180°, como la redacción del problema indica que es triángulo rectángulo, entonces uno de sus ángulos tiene un valor de 90° y el otro que nos muestra la Figura 24 es de 35°, por lo tanto, el ángulo $\boldsymbol{\beta}$ faltante se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$\mathbf{90° + 35° + \beta = 180°}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{180° - 90° - 35°}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{55°}$$

Ahora, con este ángulo podemos calcular la hipotenusa h y su cateto opuesto que es el cateto $\boldsymbol{a}$.

Para el caso de la hipotenusa emplearemos la razón trigonométrica coseno puesto que tenemos el valor del cateto adyacente del ángulo $\boldsymbol{\beta}$, que es $\boldsymbol{ca = b = 6\ cm}$:

$$\cos\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{ca}}{\boldsymbol{h}}$$

$$\cos 55° = \frac{6\ \text{cm}}{\boldsymbol{h}}$$

$$\boldsymbol{h}\,(\cos 55°) = 6\ \text{cm}$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{6\ \text{cm}}{\cos 55°}$$

$$\boldsymbol{h \approx 10.46\ cm}$$

Para el caso del cateto $\boldsymbol{a}$ (cateto opuesto a $\boldsymbol{\beta}$) emplearemos la razón trigonométrica tangente:

$$\tan\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{co}}{\boldsymbol{ca}}$$

$$\tan 55° = \frac{\boldsymbol{a}}{6\ \text{cm}}$$

$$(6\ \text{cm})\,(\tan 55°) = \boldsymbol{a}$$

$$a = (6\ \text{cm})\,(\tan 55°)$$

$$a \approx 8.57\ \text{cm}$$

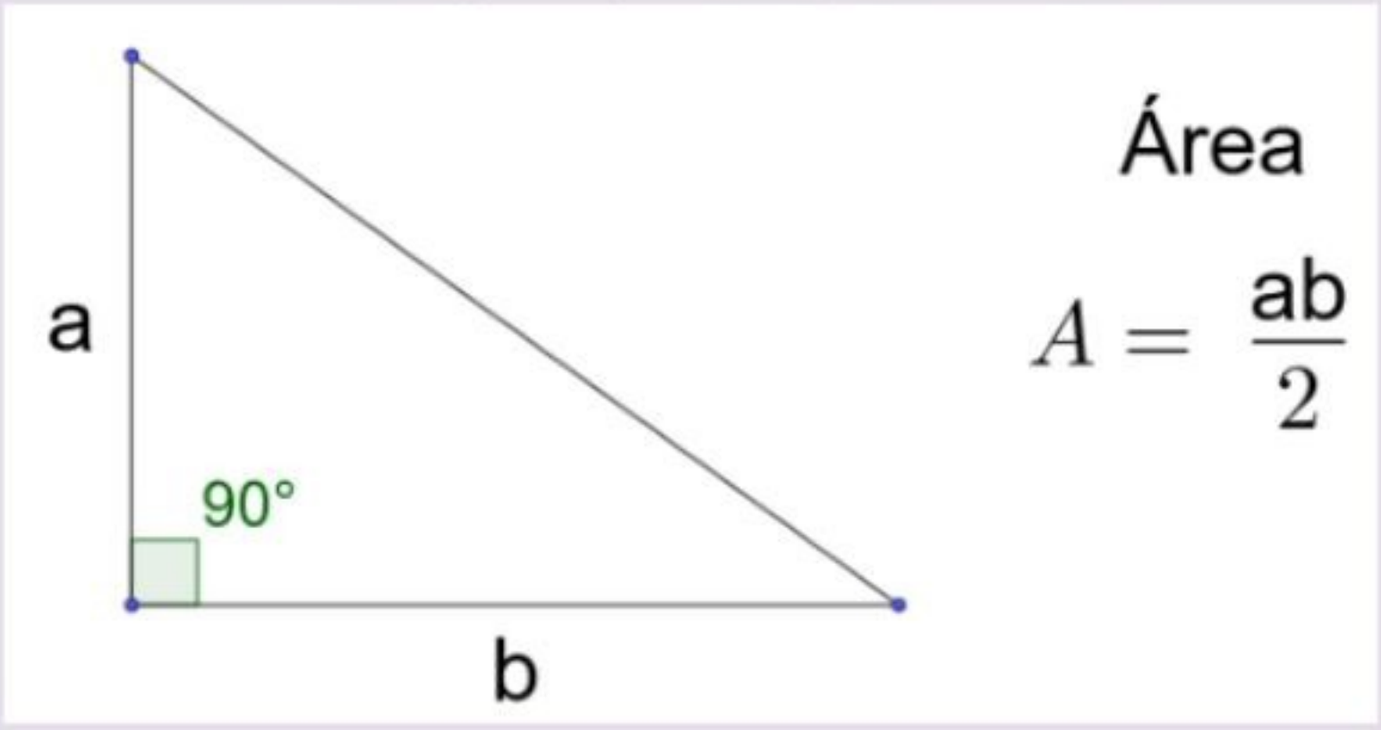
En conclusión: el ángulo tiene un valor $\beta = 55°$, la hipotenusa mide $h \approx 10.46\ \text{cm}$ y el cateto a mide $a \approx 8.57\ \text{cm}$.

Idea clave 6. Área de un triángulo rectángulo

Como se explicó en el Módulo I, una altura es perpendicular a su base, es decir, la altura y la base forman ángulos de 90° y, como un triángulo rectángulo tiene la característica de que sus catetos son perpendiculares, entonces, se puede considerar que un cateto es una base y el otro cateto es una altura.

Por lo tanto, una opción para calcular el área de un triángulo rectángulo es la mostrada en la **Figura 35**:

Figura 35.
Área de un triángulo rectángulo como semiproducto de sus catetos



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Área de un triángulo rectángulo como semiproducto de sus catetos.]

Ejemplo 22.

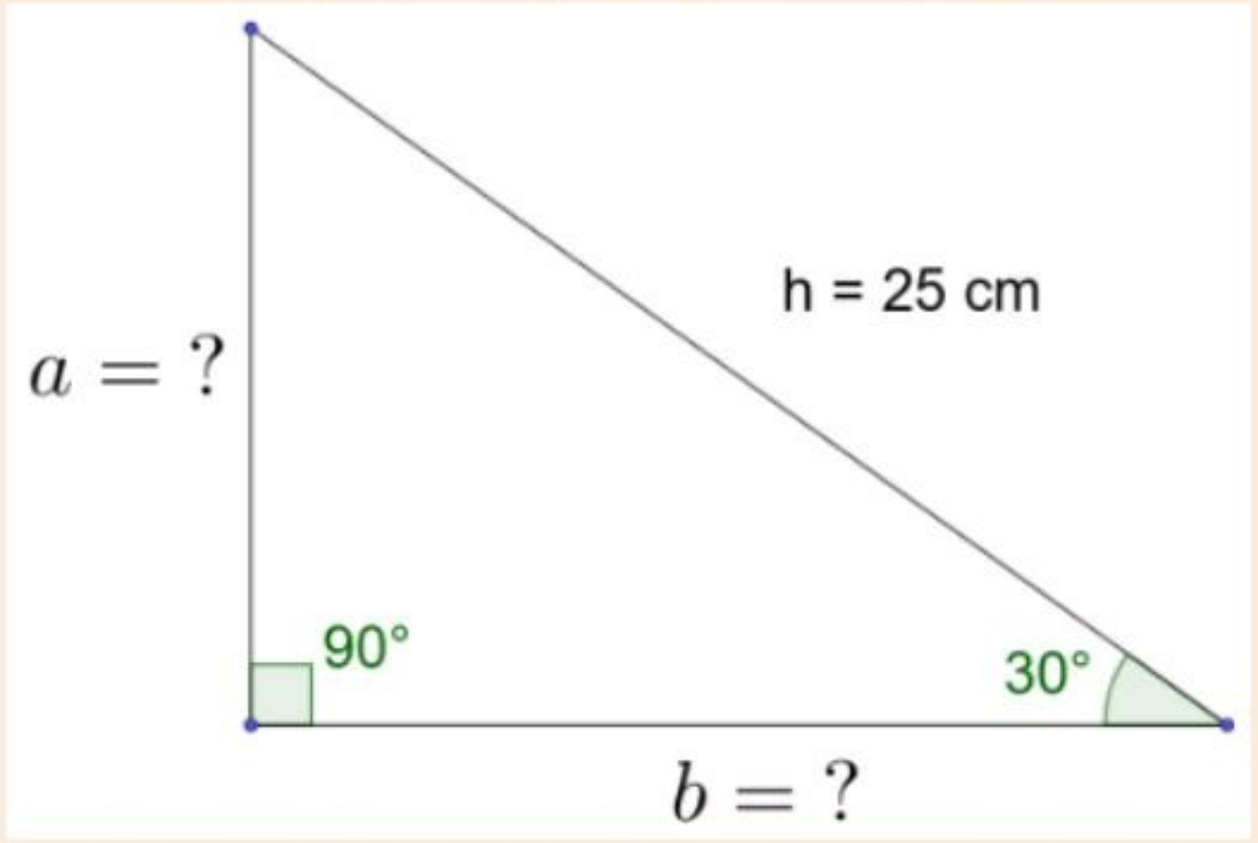
Calcular el área y el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que su hipotenusa mide 25 cm y uno de sus ángulos mide 30°.

Solución:

Nota: Verifica que para este ejercicio tu calculadora esté en grados (sistema sexagesimal).

Sin pérdida de generalidad, en la **Figura 36** se representa la situación planteada en el problema:

Figura 36.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 22



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 22.]

Calcularemos las medidas de los catetos a y b, para el cateto a se tiene:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{a}{25\ \text{cm}}$$

$$(25\ \text{cm})(\operatorname{sen} 30°) = a$$

$$a = (25\ \text{cm})(\operatorname{sen} 30°)$$

$$a = 12.5\ \text{cm}$$

Mientras que para el cateto b tenemos:

$$\cos 30° = \frac{b}{25\text{ cm}}$$

$$(25\text{ cm})(\cos 30°) = b$$

$$b = (25\text{ cm})(\cos 30°)$$

$$b \approx 21.65\text{ cm}$$

Ahora calculamos el perímetro que es la suma de todos los lados:

$$P = 25\text{ cm} + 12.5\text{ cm} + 21.65\text{ cm}$$

$$P = 59.15\text{ cm}$$

Por último, calculamos el área:

$$A = \frac{ab}{2}$$

$$A = \frac{(12.5\text{ cm})(21.65\text{ cm})}{2}$$

$$A \approx 135.31\text{ cm}^2$$

En conclusión: el perímetro del triángulo planteado en el problema es de 59.15 cm mientras que su área es de 135.31 cm^2.

Ejemplo 23.

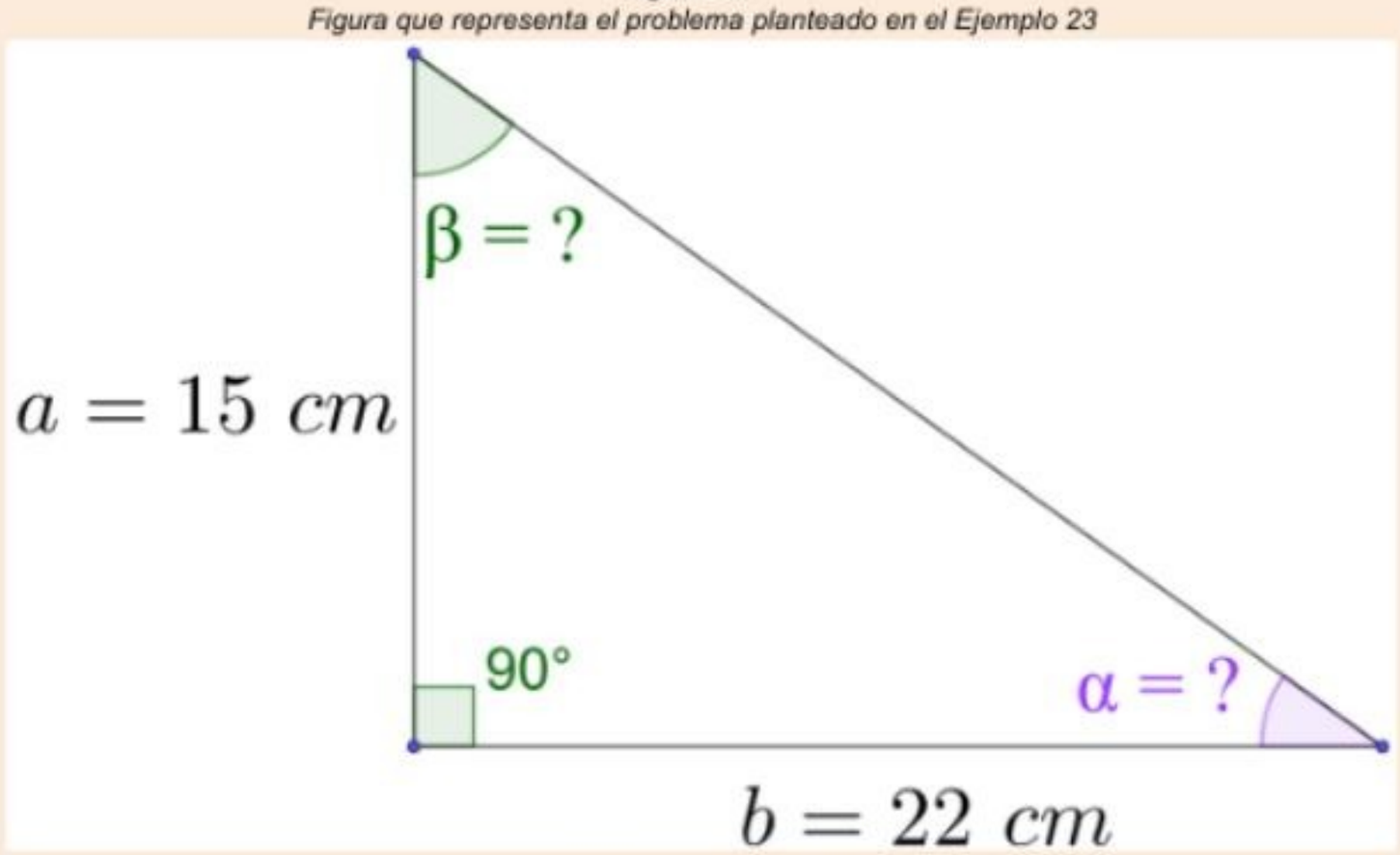
Calcular los valores de los ángulos internos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 15 cm y 22 cm respectivamente.

Solución:

Nota: Verifica que para este ejercicio tu calculadora esté en grados (sistema sexagesimal).

Sin pérdida de generalidad, en la **Figura 37** se representa la situación planteada en el problema:

Figura 37.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 23



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 23.]

Recuerda que tú puedes elegir con cual incógnita deseas iniciar a resolver el problema, en este caso, lo haremos en orden del alfabeto, es decir, calcularemos primero el valor del ángulo alfa mediante la razón trigonométrica tangente:

$$\tan \alpha = \frac{15 \text{ cm}}{22 \text{ cm}}$$

$$\tan \alpha = \frac{15}{22}$$

Recuerda que para obtener el valor de un ángulo debemos aplicar la operación inversa de la razón trigonométrica que se está empleando, en este caso es el arco tangente, que se suele expresar de la siguiente forma:

$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{15}{22}\right)$$

$$\alpha \approx 34.29°$$

$$\alpha \approx 34°17'12.76''$$

Para calcular el ángulo faltante podemos aprovechar el hecho de que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°, de donde:

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$

$$34.29° + \beta + 90° = 180°$$

$$\beta = 180° - 34.29° - 90°$$

$$\beta = 55.71°$$

$$\beta \approx 55°42'47.24''$$

En conclusión: los ángulos internos del triángulo planteado en el problema son $90°$, $34°17'12.76''$ y $55°42'47.24''$.

Como has analizado en los ejemplos mostrados hasta este momento, los lados de un triángulo rectángulo están estrechamente relacionados con las medidas de sus ángulos de una forma muy precisa por lo que, antes del uso común de las calculadoras, existían librillos con tablas que expresaban los valores de las razones trigonométricas para los ángulos entre 0° y 360°, algunas incluso, agregaban las partes proporcionales correspondientes a los minutos y segundos de grado.

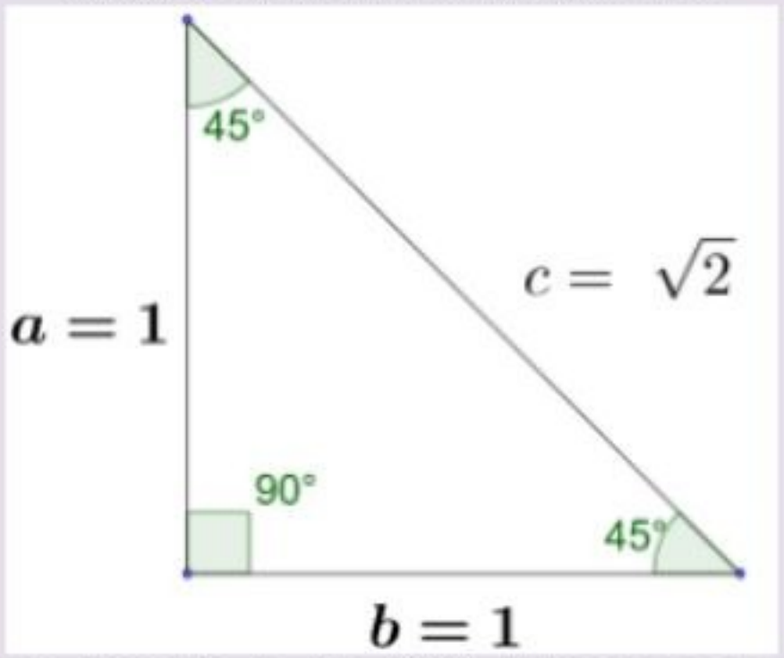
Hoy día, las diferentes tecnologías han generado que estas tablas queden en desuso, no obstante, como aportación didáctica, te mostraremos cómo obtener los valores de exactos de algunos ángulos cotidianos en la enseñanza de las razones trigonométricas.

Idea clave 7. Valores exactos del ángulo 45°

Iniciemos construyendo un triángulo rectángulo isósceles, es decir, aquel cuyos catetos tienen la misma longitud y, sea entonces la medida de sus catetos igual a 1 unidad.

Cuando decimos 1 unidad nos referimos a 1 metro, 1 centímetro o 1 kilómetro, por ejemplo; por lo que, por comodidad, eliminaremos a las unidades, considerando únicamente el valor de 1, en el entendido de que puede estar en una unidad cualquiera.

Figura 38.
Triángulo rectángulo isósceles con ángulos de 45°



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Triángulo rectángulo isósceles con ángulos de 45°.]

Con el triángulo mostrado en la **Figura 38** podemos escribir las razones trigonométricas de 45° como sigue:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} \qquad \cot 45° = \frac{1}{1}$$

NOTA: Suele ocurrir que, al realizar estos procedimientos con calculadora, los resultados se observan diferentes, pero con las raíces siempre en los numeradores, este procedimiento se conoce como racionalización, no es tema de este texto este procedimiento, pero se muestran los resultados racionalizados (y simplificados) para que los puedas comparar en caso de ser necesario:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \csc 45° = \sqrt{2}$$

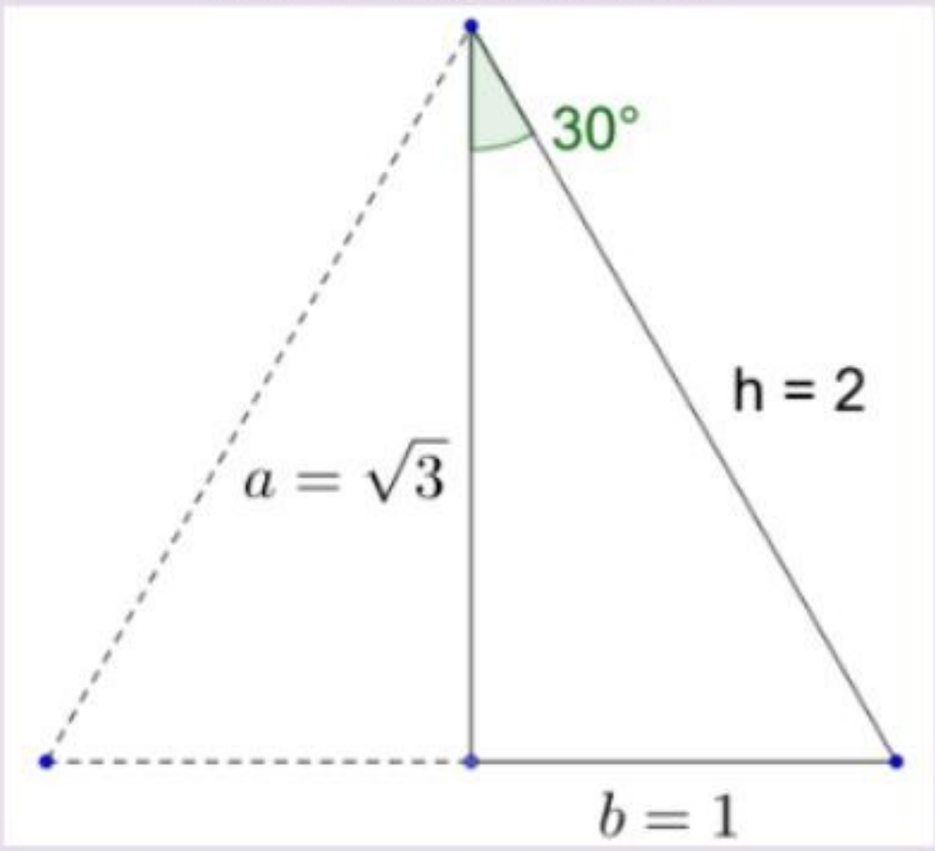
$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 45° = \sqrt{2}$$

$$\tan 45° = 1 \qquad \cot 45° = 1$$

Idea clave 8. Valores exactos del ángulo 30°

Para este caso empezaremos considerando un triángulo equilátero y lo partimos por una mitad, de igual forma un ángulo de $60°$ se divide en dos de $30°$, obteniendo así dos triángulos rectángulos escalenos y emplearemos uno de ellos.

Figura 39.
Triángulo rectángulo con un ángulo de 30°



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Triángulo rectángulo con un ángulo de 30°.]

Con el triángulo mostrado en la **Figura 39** podemos escribir las razones trigonométricas de 30° como sigue:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \csc 30° = \frac{2}{1}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

NOTA: Suele ocurrir que, al realizar estos procedimientos con calculadora, los resultados se observan diferentes, pero con las raíces siempre en los numeradores, este procedimiento se conoce como racionalización, no es tema de este texto este procedimiento, pero se muestran los resultados racionalizados (y simplificados) para que los puedas comparar en caso de ser necesario:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \csc 30° = 2$$

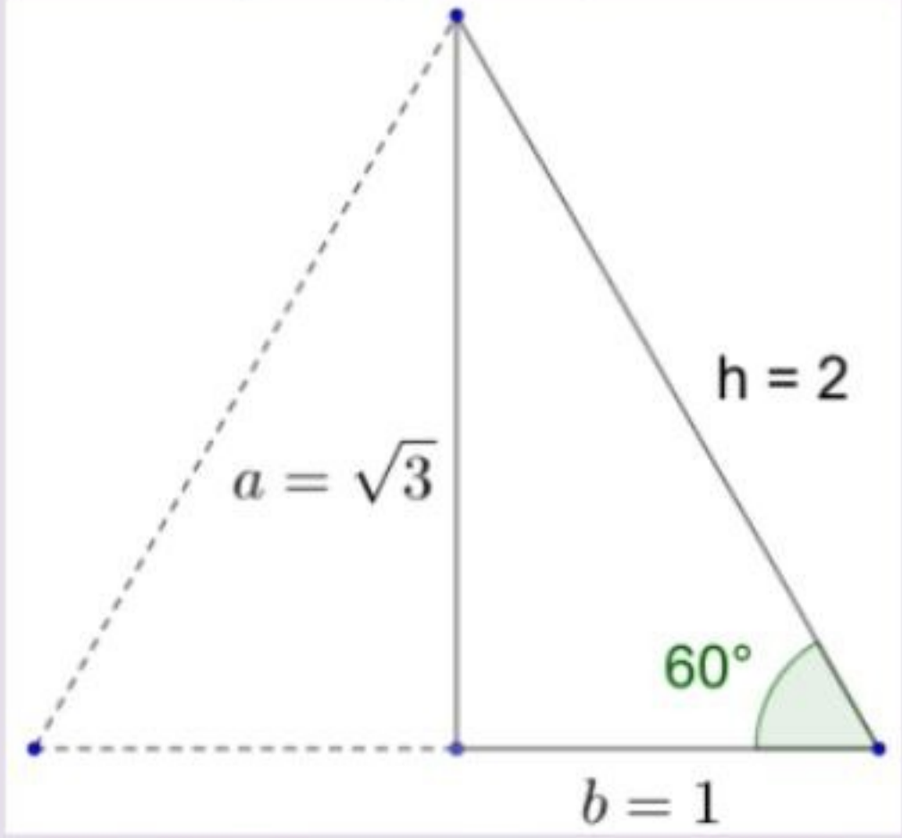
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \sqrt{3}$$

Idea clave 9. Valores exactos del ángulo 60°

Para este caso emplearemos un triángulo rectángulo similar al anterior, pero en esta ocasión, usaremos el ángulo complementario de 60°.

Figura 40.
Triángulo rectángulo con un ángulo de 60°



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Triángulo rectángulo con un ángulo de 60°.]

Con el triángulo mostrado en la **Figura 40** podemos escribir las razones trigonométricas de 60° como sigue:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sec 60° = \frac{2}{1}$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} \qquad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

NOTA: Suele ocurrir que, al realizar estos procedimientos con calculadora, los resultados se observan diferentes, pero con las raíces siempre en los numeradores, este procedimiento se conoce como racionalización, no es tema de este texto este procedimiento, pero se muestran los resultados racionalizados (y simplificados) para que los puedas comparar en caso de ser necesario:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sec 60° = 2$$

$$\tan 60° = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Es usual encontrar tablas que simplifican todos estos cálculos, en la **Tabla 5** mostramos un resumen de los valores exactos, recuerda que en algunos textos y referencias podría parecer que son distintos, mediante un procedimiento matemático llamado racionalización se puede convertir de unos a otros, tú puedes comprobar que es el mismo valor empleando tu calculadora. Además, se agregan los valores exactos de los ángulos 0°, 90°, 180° y 270°, analiza con tus compañeros y docente cómo podrían establecer las demostraciones de los valores exactos de estos últimos ángulos mencionados.

Tabla 5.
Valores exactos de las razones trigonométricas para los ángulos 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180° y 270°

	Sen	cos	tan	cot	sec	csc
0° /360°	0	1	0	∞	1	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	∞	0	∞	1
180°	0	-1	0	∞	-1	∞
270°	-1	0	∞	0	∞	-1

Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia. [Valores exactos de las razones trigonométricas para los ángulos 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180° y 270°.]

Ejemplo 24.

Calcular $\mathbf{sen^2(45°)}$ empleando valores exactos.

Solución:
Primero es importante saber que:

$$\mathbf{sen^2(45°) = (sen(45°))^2}$$

Sustituyendo el valor correspondiente del $\mathbf{sen(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$:

$$\mathbf{sen^2(45°) = (sen(45°))^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2}}$$

En conclusión: $\mathbf{sen^2(45°) = \frac{1}{2}}$.

¡Compruébalo con tu calculadora!

Ejemplo 25.

Calcular $\mathbf{(\cos 30°)(\tan 60°)}$ empleando valores exactos.

Solución:

$$\mathbf{(\cos 30°)(\tan 60°) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2} = \frac{3}{2}}$$

En conclusión: $\mathbf{(\cos 30°)(\tan 60°) = \frac{3}{2}}$

¡Compruébalo con tu calculadora!

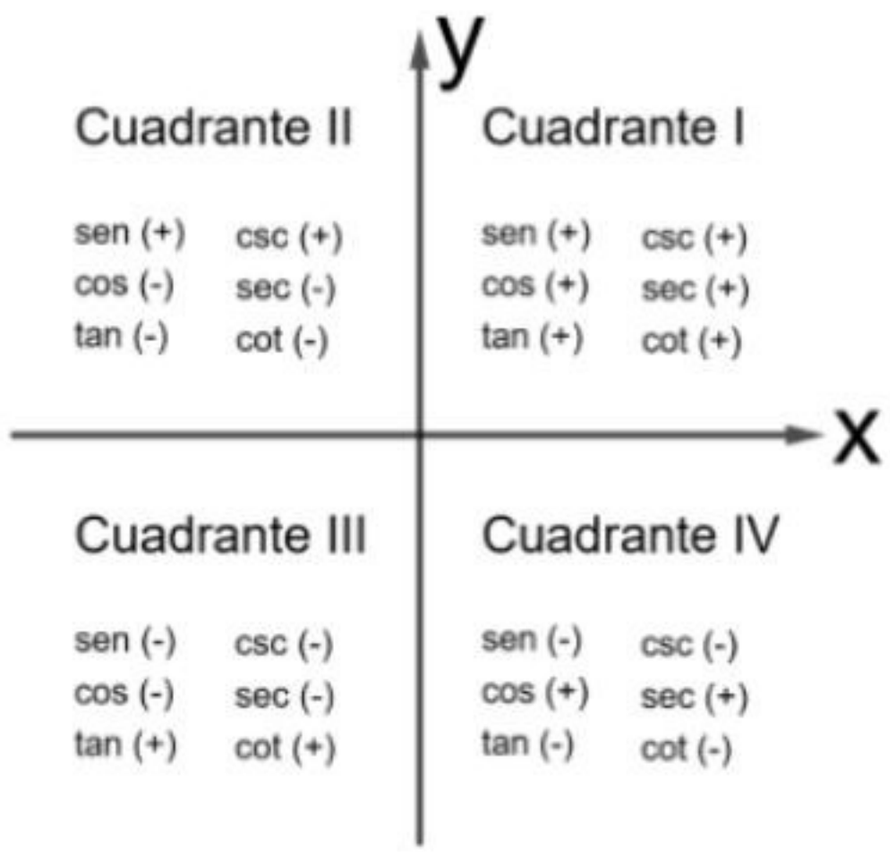
En los ejemplos anteriores se han empleado triángulos rectángulos de forma general para el cálculo de las razones trigonométricas, los cuales, poseen ángulos menores o iguales a 90°, con esto, surge una pregunta un tanto obvia ¿qué ocurre con ángulos mayores a 90°?, más aún, en el Módulo I aprendiste que un triángulo es una figura convexa, esto porque no es posible que alguno de sus ángulos mida más de 180°, entonces, ¿qué ocurre con ángulos mayores a 180°?

Estas preguntas serán respondidas en nuestro siguiente apartado.

2.2.2 Ángulo en posición normal y reducido

Con la finalidad de solventar el inconveniente de calcular las razones trigonométricas para ángulos mayores de 90° o incluso mayores de 180°, solemos representar a los ángulos en un plano cartesiano, el cual se divide en 4 cuadrantes, numerando al superior derecho como Cuadrante I y los demás de forma consecutiva en sentido contrario a las manecillas del reloj (sentido antihorario), como se muestra en la Figura 41. De forma común, el eje horizontal es el ***eje x***, siendo hacia la derecha el semieje positivo y a la izquierda el semieje negativo; el eje vertical es el ***eje y***, siendo hacia arriba el semieje positivo y hacia abajo el semieje negativo, lo cual permite, inclusive, asignar signos a los valores de las razones trigonométricas:

Figura 41.
Cuadrantes y signos de las razones trigonométricas en el plano cartesiano



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia. [Cuadrantes y signos de las razones trigonométricas en el plano cartesiano.]

Idea clave 9. Ángulo en posición normal

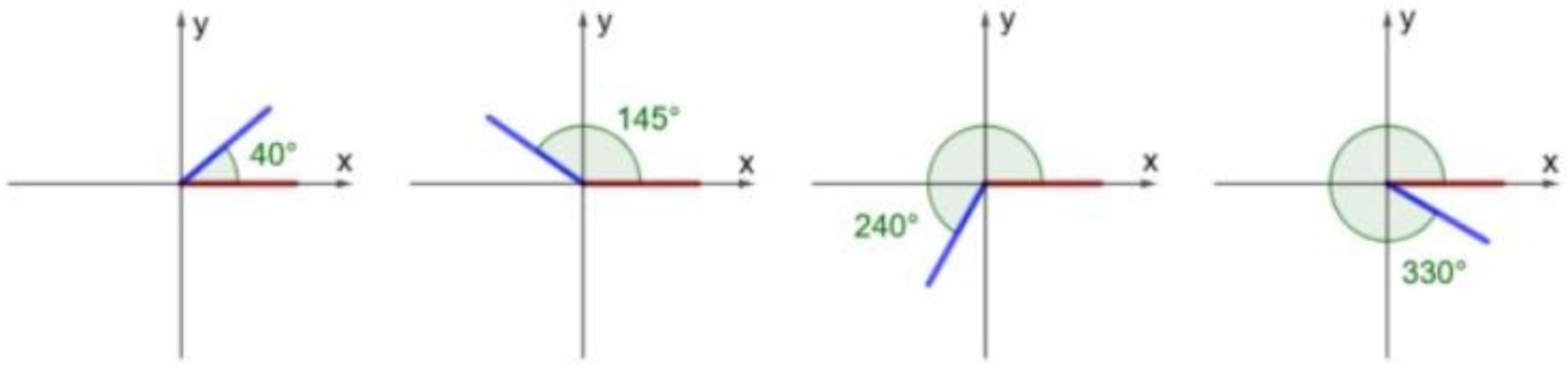
Un **ángulo en posición normal** es aquel cuyo vértice se ubica en el origen de un plano cartesiano (punto donde se intersecan el $eje\ x$ y el $eje\ y$) y su lado inicial está sobre el semieje positivo del $eje\ x$ (Chavaría-Molina, 2023).

Un ángulo en posición normal será negativo cuando su lado final gire a favor de las manecillas del reloj (sentido horario) y será positivo cuando gire en contra de las manecillas del reloj (sentido antihorario).

En la **Figura 42** se muestran 4 casos de ángulos en posición normal para cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano. En rojo se representa al lado inicial y en azul al lado final. Los valores de los ángulos en cada cuadrante de forma correspondientes son:

Cuadrante I: Los ángulos son mayores de 0° y menores de 90°.
Cuadrante II: Los ángulos son mayores de 90° y menores de 180°.
Cuadrante III: Los ángulos son mayores de 180° y menores de 270°.
Cuadrante IV: Los ángulos son mayores de 270° y menores de 360°.

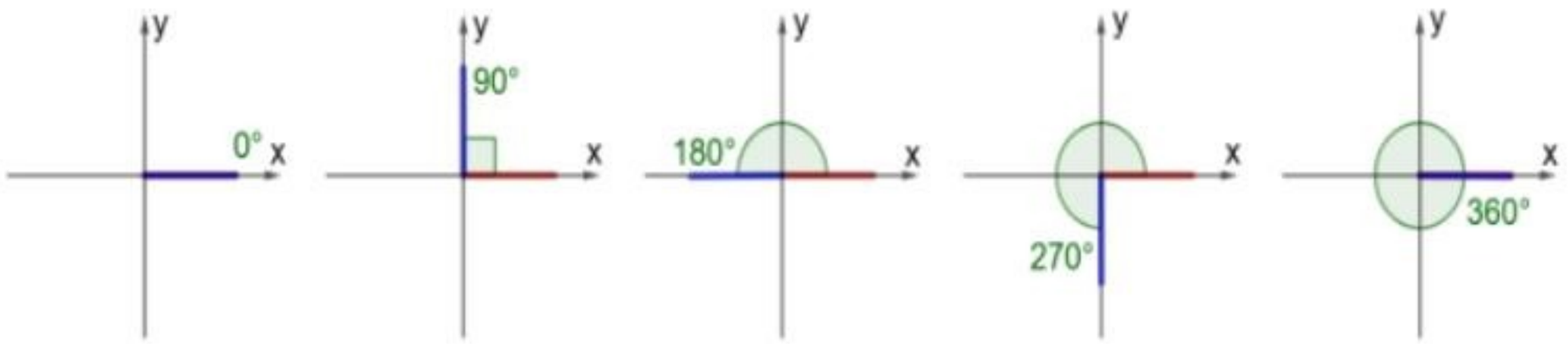
Figura 42.
Ejemplos de ángulos en posición normal para cada cuadrante del plano cartesiano



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Ejemplos de ángulos en posición normal para cada cuadrante del plano cartesiano.]

Observa que, en los casos anteriores NO se consideran ángulos cuyo lado final coincida con los ejes, estos son casos especiales que ya se habían mencionado en el Módulo I y que volvemos a mostrar en la **Figura 43**:

Figura 43.
Ángulos en posición normal para los ejes del plano cartesiano



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Ángulos en posición normal para los ejes del plano cartesiano.]

Ángulo reducido

Para todo ángulo en posición normal, el **ángulo reducido** es aquel no negativo más pequeño formado por el semieje positivo del $eje\ x$ y el lado final del ángulo dado (Silva, 2003).

Analicemos el comportamiento de los ángulos reducidos para cada cuadrante del plano cartesiano:

Tabla 6.
Comportamiento de los ángulos reducidos según el cuadrante

Cuadrante	Rango del valor del ángulo en posición normal θ	Forma de obtener el ángulo reducido α	Ejemplo	
			Ángulo en posición normal	Ángulo reducido
I	$0° < \theta < 90°$	$\alpha = \theta$	$\theta = 40°$	$\alpha = 40°$
II	$90° < \theta < 180°$	$\alpha = 180° - \theta$	$\theta = 145°$	$\alpha = 180° - 145°$ $\alpha = 35°$
III	$180° < \theta < 270°$	$\alpha = \theta - 180°$	$\theta = 240°$	$\alpha = 240° - 180°$ $\alpha = 60°$
IV	$270° < \theta < 360°$	$\alpha = 360° - \theta$	$\theta = 330°$	$\alpha = 360° - 330°$ $\alpha = 30°$

Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025) Elaboración propia. [Comportamiento de los ángulos reducidos según el cuadrante.]

Analiza cómo aplicar los conceptos de ángulo en posición normal y ángulo reducido en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 26.

Un ángulo en posición normal tiene una magnitud de 318° ¿Cuál es su ángulo reducido?

Solución:

Por la magnitud del ángulo $\boldsymbol{\theta = 318°}$ sabemos que se encuentra en el Cuadrante IV, por lo tanto, su correspondiente ángulo reducido $\boldsymbol{\alpha}$ se calcula como:

$$\boldsymbol{\alpha = 360° - \theta}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 360° - 318°}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 42°}$$

En conclusión: el ángulo reducido de $\boldsymbol{318°}$ es $\boldsymbol{42°}$.

Ejemplo 27.

Un ángulo en posición normal tiene una magnitud de 135° 28' 45'' ¿Cuál es su ángulo reducido?

Solución:

Por la magnitud del ángulo $\boldsymbol{\theta = 135° 28' 45''}$ sabemos que se encuentra en el Cuadrante II, por lo tanto, su correspondiente ángulo reducido $\boldsymbol{\alpha}$ se calcula como:

$$\boldsymbol{\alpha = 180° - \theta}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 180° - 135° 28' 45''}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 44°31'15''}$$

En conclusión: el ángulo reducido de $\boldsymbol{135° 28' 45''}$ es $\boldsymbol{44°31'15''}$.

Ejemplo 28.

El ángulo reducido de un ángulo en el Cuadrante IV es $\boldsymbol{51°13'}$ ¿Cuál es el valor del correspondiente ángulo en posición normal?

Solución:

Observa que la redacción especifica que el ángulo en posición normal se ubica en el Cuadrante IV, por lo tanto, se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\alpha = 360° - \theta}$$

$$\boldsymbol{\alpha + \theta = 360°}$$

$$\boldsymbol{\theta = 360° - \alpha}$$

$$\boldsymbol{\theta = 360° - 51°13'}$$

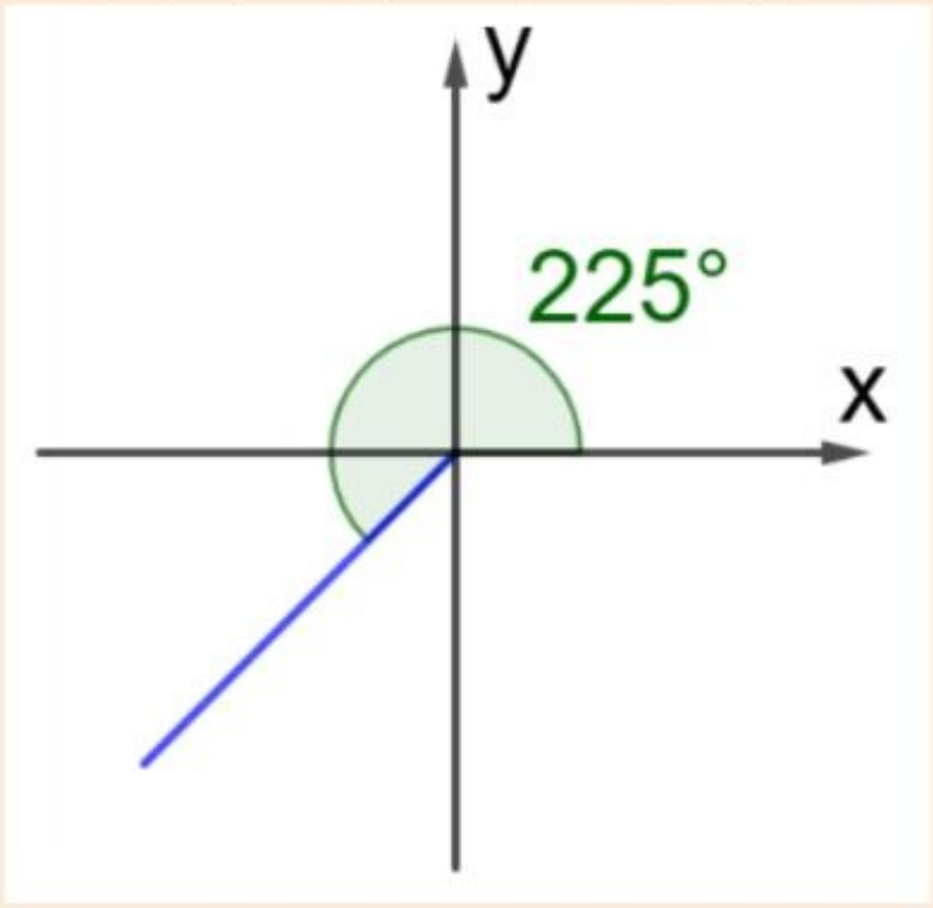
$$\boldsymbol{\theta = 308°47'}$$

En conclusión: $\boldsymbol{51°13'}$ es el ángulo reducido de $\boldsymbol{308°47'}$.

Ejemplo 29.

Calcular el ángulo reducido del ángulo mostrado en la Figura 44:

Figura 44.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 29



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 29.]

Solución:

En la imagen observamos que el ángulo pertenece al Cuadrante III, por lo que su ángulo reducido se puede calcular con la expresión:

$$\alpha = \theta - 180°$$

$$\alpha = 225° - 180°$$

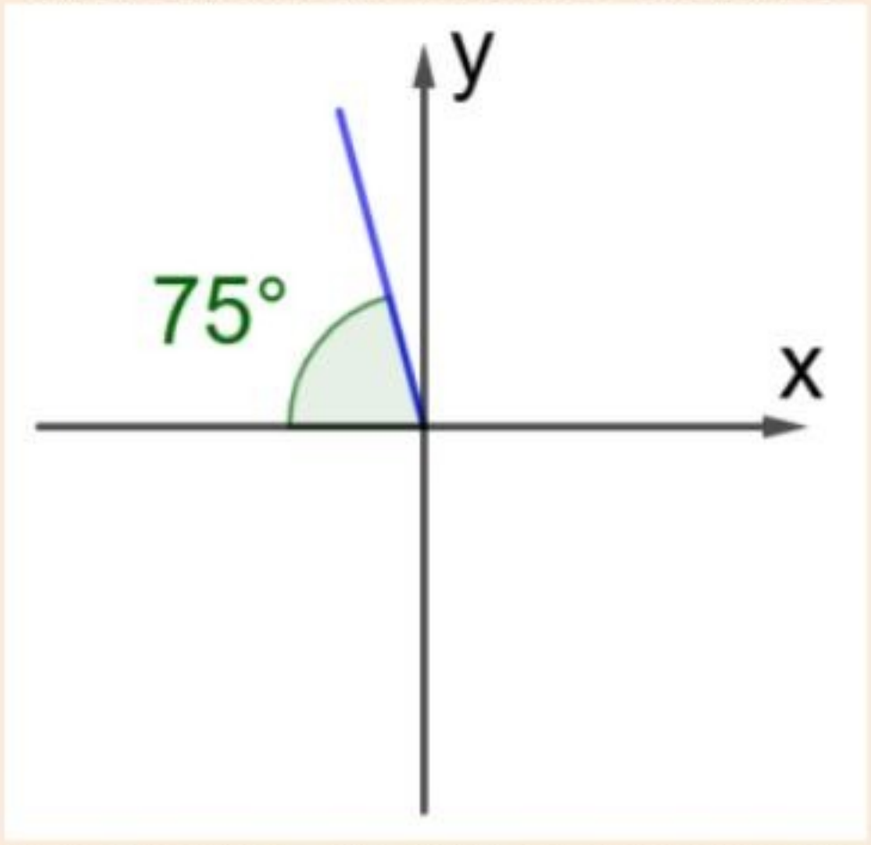
$$\alpha = 45°$$

En conclusión: el ángulo reducido de $225°$ es $45°$.

Ejemplo 30.

Calcular el ángulo en posición normal del ángulo reducido mostrado en la **Figura 45**:

Figura 45.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 30



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 30.]

Solución:

En la imagen observamos que el ángulo reducido se ubica en el Cuadrante II, por lo que su ángulo en posición normal se puede calcular con la expresión:

$$\boldsymbol{\alpha = 180° - \theta}$$

$$\boldsymbol{\alpha + \theta = 180°}$$

$$\boldsymbol{\theta = 180° - \alpha}$$

$$\boldsymbol{\theta = 180° - 75°}$$

$$\boldsymbol{\theta = 105°}$$

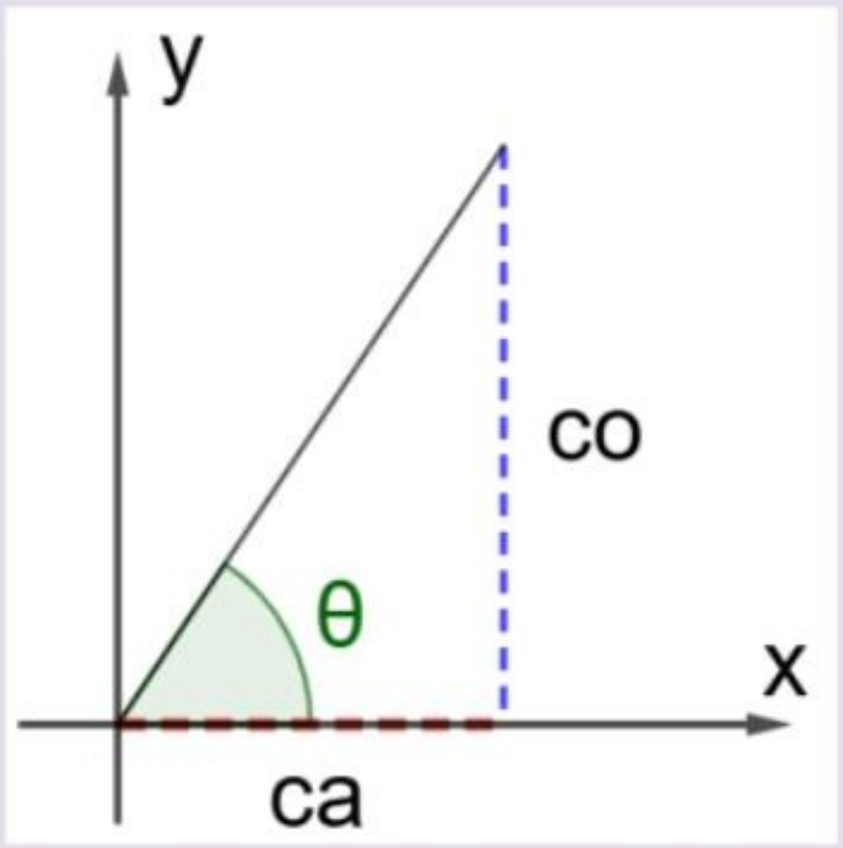
En conclusión: $\mathbf{75°}$ es el ángulo reducido de $\mathbf{105°}$.

Hasta el momento se han realizados cálculos para obtener el valor del ángulo reducido en función del ángulo en posición normal y viceversa, no obstante, estos conceptos también son útiles para determinar las razones trigonométricas de un ángulo desconocido tomando como base una razón trigonométrica dada, analiza los siguientes ejemplos para clarificar esta idea:

Idea clave 10. Relación entre catetos y ejes del plano cartesiano

Por la forma en que se han descrito las razones trigonométricas en este texto, el cateto adyacente es correspondiente al $eje\ x$ y el cateto opuesto es correspondiente al $eje\ y$.

Figura 46.
Relación entre catetos y ejes del plano cartesiano



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Relación entre catetos y ejes del plano cartesiano.]

Esto permite que, para ciertos casos, por ejemplo, en el plano cartesiano, las razones trigonométricas se describan en términos de x y y en lugar de cateto adyacente y cateto opuesto, respectivamente, lo cual es cómodo y práctico porque asociamos los valores e incógnitas en términos de los ejes a los que pertenecen, así, las razones trigonométricas se pueden escribir como:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{h} \qquad \csc\theta = \frac{h}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{h} \qquad \sec\theta = \frac{h}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Así mismo, el Teorema de Pitágoras se puede expresar como:

$$h^2 = x^2 + y^2$$

Bajo estas condiciones, los valores de x y y pueden ser positivos y negativos, pues representan coordenadas del plano cartesiano, mientras que la hipotenusa siempre será positiva.

Ejemplo 31.

Se sabe que un ángulo pertenece al Cuadrante IV y que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$ ¿Cuáles son los valores de las 6 razones trigonométricas del ángulo reducido θ? ¿Cuál es el valor del ángulo reducido θ? ¿Cuál es el valor del ángulo en posición normal α?

Solución:

Primero comparemos el valor de la razón trigonométrica brindada en la redacción del problema y su respectiva expresión algebraica, es decir:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{h} \quad y \quad \operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$$

De donde concluimos que:

$$y = -3 \qquad h = 5$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$h^2 = x^2 + y^2$$

$$h^2 - y^2 = x^2$$

$$x^2 = h^2 - y^2$$

$$x = \pm\sqrt{h^2 - y^2}$$

$$x = \pm\sqrt{(5)^2 - (-3)^2}$$

$$x = \pm\sqrt{25 - 9}$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

De esta ecuación surgen dos posibilidades para el valor de x, sin embargo, la redacción del problema indica que el ángulo debe estar en el Cuadrante IV, por lo que, en ese cuadrante, la variable x es positiva, pues ese semieje apunta a la derecha, entonces:

$$x = 4 \qquad y = -3 \qquad h = 5$$

Con estos datos ya se pueden plantear las seis razones trigonométricas del ángulo reducido θ:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-3}{5} \qquad \csc\theta = \frac{5}{-3}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5} \qquad \sec\theta = \frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{-3}{4} \qquad \cot\theta = \frac{4}{-3}$$

Para obtener el valor del ángulo reducido podemos elegir cualquiera de estas 6 razones, en nuestro caso emplearemos la misma que se dio en el texto del ejercicio $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$ y despejamos el ángulo con la función inversa:

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$\theta \approx -36.87°$$

Recordemos que el valor que se obtiene es negativo porque se trata de un ángulo reducido dextrógiro (a favor de las manecillas del reloj) que se encuentra en el Cuadrante IV y la razón seno es negativa en ese cuadrante, por lo que el ángulo en posición normal es:

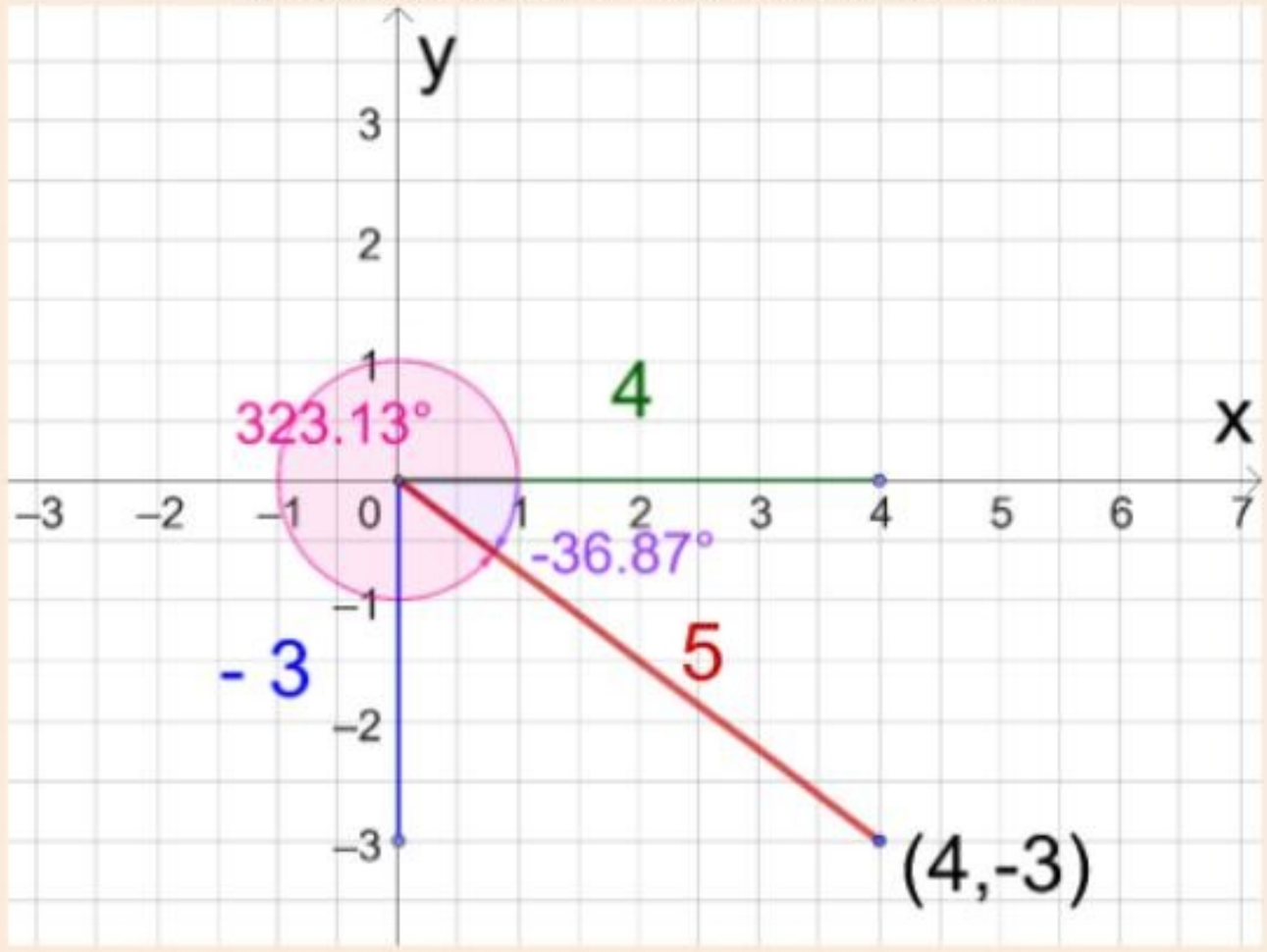
$$\alpha = 360° - 38.87°$$

$$\alpha = 323.13°$$

Los valores de θ y α se pueden obtener con cualquiera de las 6 razones trigonométricas, no obstante, es importante tener precaución en el signo de la razón empleada, también es recomendable verificar cuáles razones trigonométricas están incluidas en las opciones de la calculadora empleada, con la finalidad de facilitar nuestros cálculos.

Para comprender de mejor forma el ejercicio planteado, observa la siguiente imagen:

Figura 47.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 31



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 31].

Ejemplo 32.

Se sabe que un ángulo pertenece al Cuadrante III y que $\cot\theta = \frac{8}{15}$ ¿Cuáles son los valores de las 6 razones trigonométricas del ángulo reducido θ? ¿Cuál es el valor del ángulo reducido θ? ¿Cuál es el valor del ángulo en posición normal α?

Solución:

Primero comparemos el valor de la razón trigonométrica brindada en la redacción del problema y su respectiva expresión algebraica, es decir:

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \quad y \quad \cot\theta = \frac{8}{15}$$

De donde concluimos que:

$$x = 8 \qquad y = 15$$

Pero debemos tener precaución porque ¡esto es un error! ¿por qué?

Porque en la redacción del problema nos indican que el ángulo pertenece al Cuadrante III y en ese cuadrante, tanto las x como las y ¡son negativas! Porque sus semiejes apuntan a la izquierda y abajo respectivamente, de tal suerte que debemos hacer la corrección de las variables, quedando de la siguiente forma:

$$x = -8 \qquad y = -15$$

Después de esta aclaración, aplicamos el Teorema de Pitágoras para obtener el valor de la hipotenusa:

$$h^2 = x^2 + y^2$$

$$h = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$h = \pm\sqrt{(-8)^2 + (-15)^2}$$

$$h = \pm\sqrt{64 + 225}$$

$$h = \pm\sqrt{289}$$

$$h = \pm 17$$

De esta ecuación surgen dos posibilidades para el valor de h, sin embargo, hemos establecido que la hipotenusa siempre es positiva, entonces:

$$x = -8 \qquad y = -15 \qquad h = 17$$

Con estos datos ya se pueden plantear las seis razones trigonométricas del ángulo θ:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-15}{17} \qquad \csc\theta = \frac{17}{-15}$$

$$\cos\theta = \frac{-8}{17} \qquad \sec\theta = \frac{17}{-8}$$

$$\tan\theta = \frac{-15}{-8} \qquad \cot\theta = \frac{-8}{-15}$$

Para obtener el valor del ángulo reducido podemos elegir cualquiera de estas 6 razones, esta ocasión NO emplearemos la misma que se dio en el texto del ejercicio porque generalmente las calculadoras NO incluyen a las razones trigonométricas inversas. Lo que sí podemos hacer, es elegir la razón recíproca de la que se nos dio y que ya obtuvimos en el paso anterior, es decir, $\tan\theta = \frac{-15}{-8}$ y despejamos el ángulo con la función inversa:

$$\tan\theta = \frac{-15}{-8}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-15}{-8}\right)$$

$$\theta \approx 61.93°$$

Recordemos que el valor que se obtiene se trata de un ángulo reducido levógiro (en contra de las manecillas del reloj) positivo, que se encuentra en el Cuadrante III, por lo que el ángulo en posición normal es:

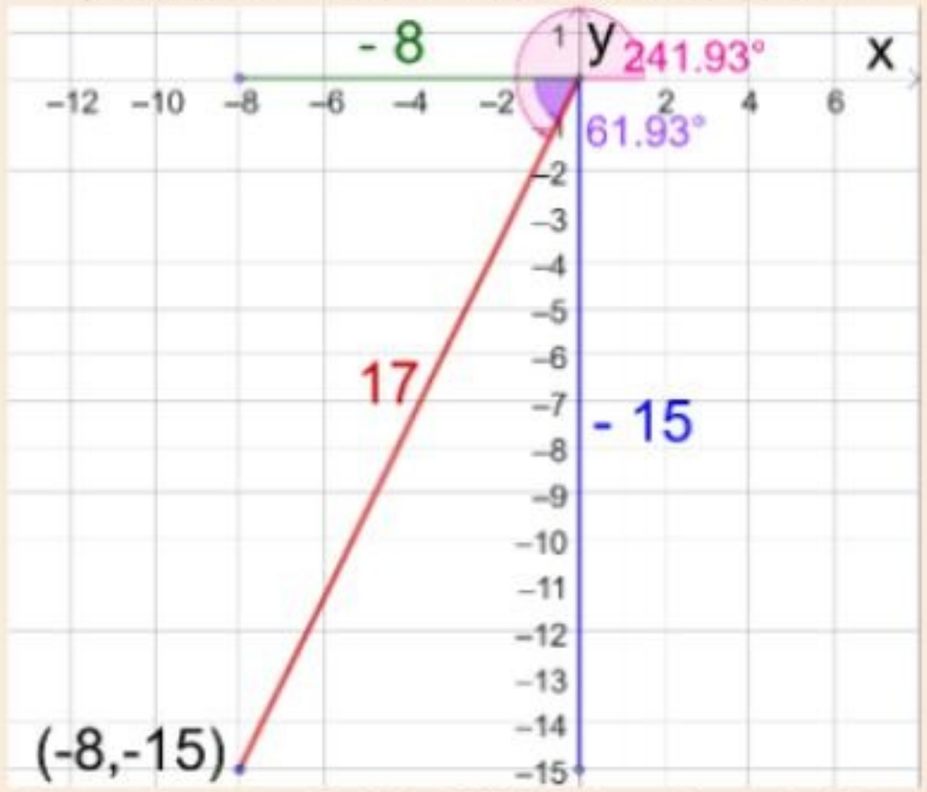
$$\alpha = 180° + 61.93°$$

$$\alpha = 241.93°$$

Los valores de θ y α se pueden obtener con cualquiera de las 6 razones trigonométricas, no obstante, es importante tener precaución en el signo de la razón empleada, también es recomendable verificar cuáles razones trigonométricas están incluidas en las opciones de la calculadora empleada, con la finalidad de facilitar nuestros cálculos. Para comprender de mejor forma el ejercicio planteado, observa la siguiente imagen:

Figura 48.

Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 32



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 32.]

Los ángulos en posición normal y los ángulos reducidos son útiles según el contexto en el que se empleen, por ejemplo, en estática, rama de la Física, los ángulos reducidos son ampliamente empleados para representar diagramas de fuerzas.



Actividad 6.
Ángulo en posición normal y reducido

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 6.
Ángulo en posición normal y reducido

2.3 Triángulos oblicuángulos

A lo largo de la historia, para el ser humano los triángulos han representado una excelente herramienta que ha permitido hacer estimaciones sobre lo que es aparentemente inalcanzable; los egipcios por ejemplo usaban cuerdas con nudos equidistantes para trazar triángulos y de esta forma orientar la construcción de sus pirámides. En altamar, los navegantes confiaban su trayectoria a sus conocimientos de trigonometría sin la necesidad de ver tierra firme. Pero no todos los triángulos son rectángulos, la mayoría de los problemas reales implican triángulos oblicuángulos.

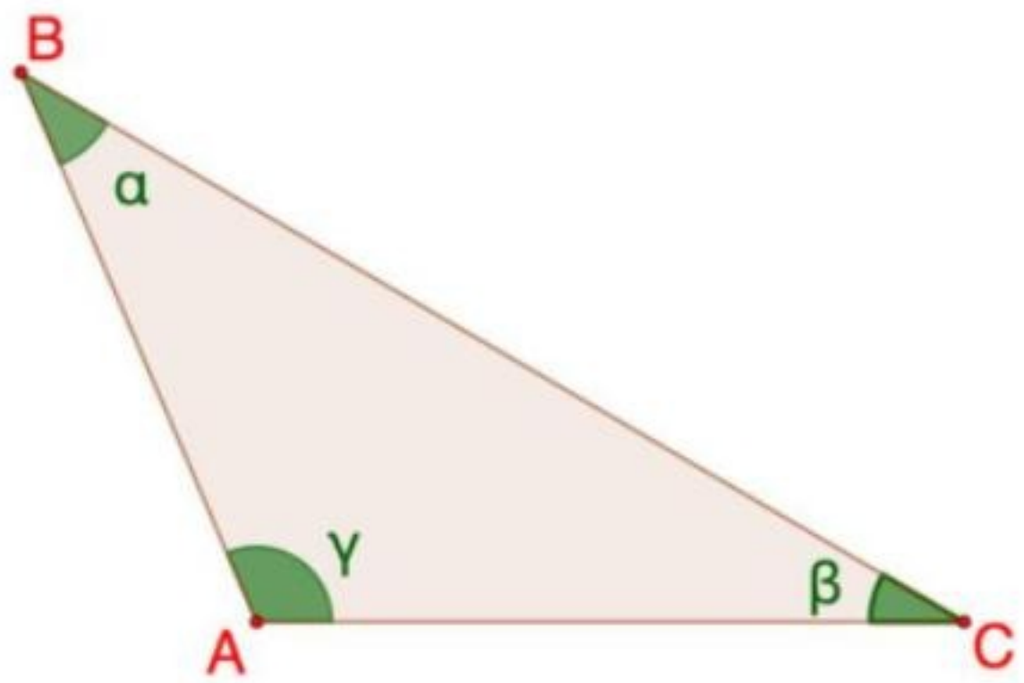
Triángulo oblicuángulo

Un **triángulo oblicuángulo** es aquel que no contiene un ángulo recto, pudiendo estar formado por tres ángulos agudos o por un ángulo obtuso y dos agudos. En este tipo de triángulos, las relaciones trigonométricas propias de los **triángulos rectángulos** dejan de ser suficientes, por lo que su resolución requiere de las formas generalizadas de la trigonometría, conocidas como la **ley de los Senos y ley de los Cosenos.**

Como se ha mencionado en la definición, podemos tener dos tipos de triángulos oblicuángulos:

b) Aquellos que contienen **un ángulo obtuso** y **dos ángulos agudos**, es decir, necesariamente uno de los ángulos internos del triángulo debe poseer un valor mayor a $\mathbf{90°}$, en tanto que los dos restantes entre ellos deben sumar la cantidad suficiente para que la suma de los tres ángulos sea $\mathbf{180°}$. Este triángulo descrito es un triángulo **obtusángulo.** En la Figura 49 se representa este tipo de triángulo y cumple con la característica de ser obtusángulo debido a que a simple vista el ángulo $\boldsymbol{\gamma > 90°}$. Por ejemplo, si en esta figura el ángulo $\boldsymbol{\gamma = 113°}$, los ángulos $\boldsymbol{\alpha + \beta = 67°}$. El lado opuesto al ángulo obtuso es siempre el más largo del triángulo, lo que tiene influencia en las relaciones que estudiaremos más adelante.

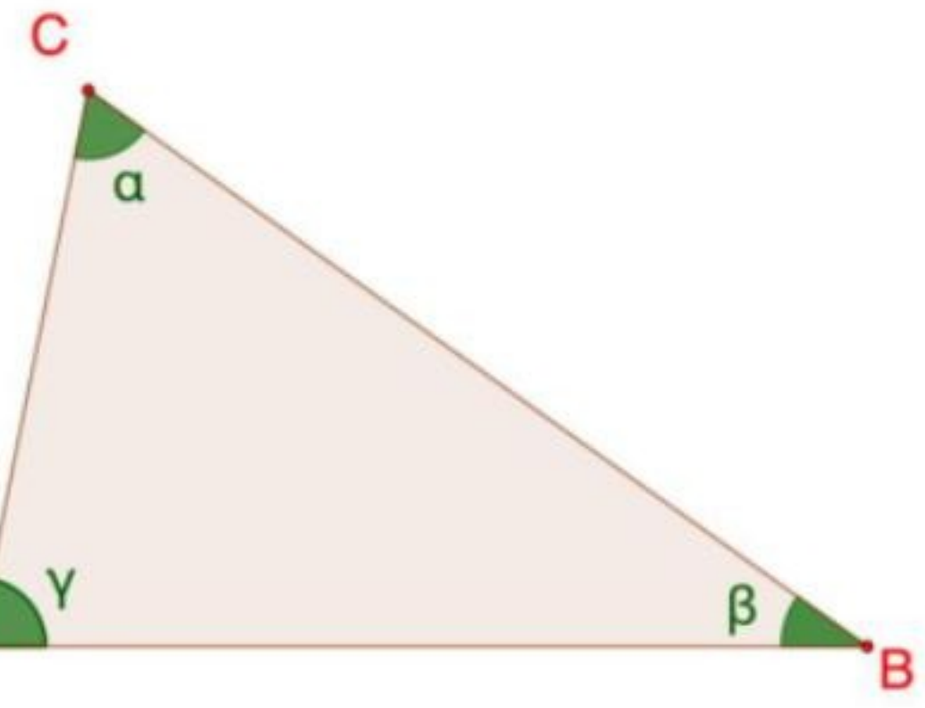
Figura 49.
Triángulo obtusángulo como ejemplo de un triángulo oblicuángulo



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con Geogebra. [Triángulo obtusángulo como ejemplo de un triángulo oblicuángulo.]

a) Aquellos triángulos cuyos ángulos internos son menores a $\mathbf{90°}$ se denominan **acutángulos**, y en estos, todos los lados se encuentran en relación directa con sus ángulos opuestos, de modo que cualquiera que sea el lado mayor se opone al ángulo de mayor medida, aunque como es de esperarse, ninguno supera los $\mathbf{90°}$. En la **Figura 50** se observa un ejemplo de triángulo acutángulo, se puede apreciar que todos sus ángulos son agudos, y por lo tanto, cada uno contribuye a que su suma sea de $\mathbf{180°}$. Por ejemplo, si los ángulos del triángulo poseen los siguientes valores, $\boldsymbol{\alpha = 72°}$, $\boldsymbol{\beta = 58°}$ y $\boldsymbol{\gamma = 50°}$, la suma de sus medidas cumple con esta propiedad fundamental de todo triángulo.

Figura 50.
Triángulo acutángulo como ejemplo de un triángulo oblicuángulo



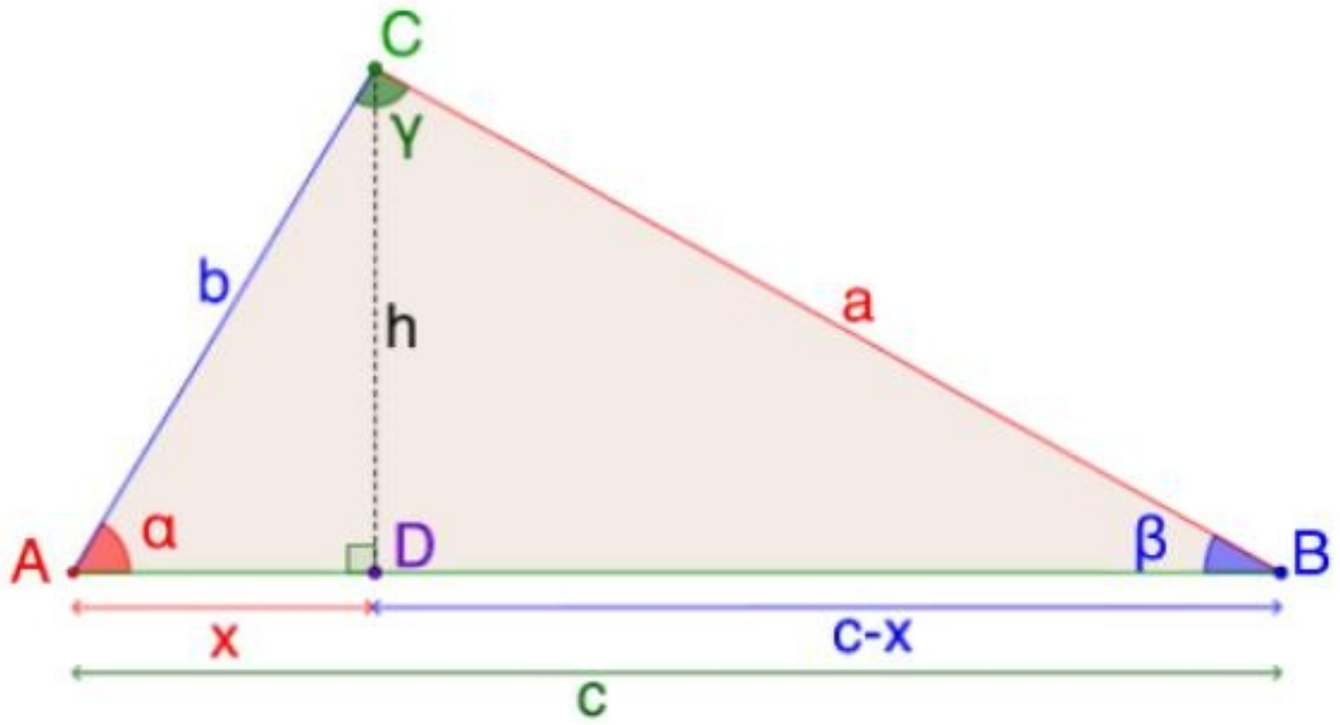
Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con Geogebra. [Triángulo acutángulo como ejemplo de un triángulo oblicuángulo.]

2.3.1 Ley de senos

Cuando se trabajó con triángulos rectángulos fue muy sencillo relacionar lados y ángulos: bastó con un usar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Sin embargo, en los triángulos oblicuángulos, estas razones no son convenientes para encontrar la información que se necesita muchas de las ocasiones, pues no existe una "hipotenusa" clara, ni catetos definidos, así que las herramientas que usamos antes dejan de funcionar de manera directa. Por esta razón aparece la que denominaremos como "**Ley de Senos**", que es una regla que permite conectar cada lado de un triángulo con el ángulo que tiene enfrente, y debemos mencionar que esta ley funciona para cualquier triángulo sin importar si es acutángulo u obtusángulo, y se vuelve muy útil para cuando conocemos un ángulo y el lado opuesto, o cuando necesitamos determinar distancias y medidas que no podrían obtener sólo con trigonometría básica.

Para la deducción de la **Ley de Senos** consideremos el triángulo acutángulo ABC de la **Figura 51** en la que se observa que el ángulo α tiene a su lado opuesto etiquetado como a y el lado b por su parte se encuentra frente al ángulo β. En este triángulo se traza la altura partiendo desde el vértice C hacia el lado AB, a la que llamaremos h y que forma un ángulo recto con este segmento.

Figura 51.
Triángulo acutángulo para la deducción de la Ley de Senos



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con Geogebra. [Triángulo acutángulo para la deducción de la Ley de Senos.]

El triángulo original ahora queda dividido en dos triángulos rectángulos, el triángulo DCB y el triángulo DCA, esta división resulta útil porque, aunque el triángulo original es oblicuángulo, dentro de él ahora aparecen dos triángulos rectángulos, en los cuales sí podemos usar las razones trigonométricas básicas.

Si observamos bien el triángulo del lado izquierdo, es decir, el DCA encontramos que el ángulo α tiene como cateto opuesto a la altura h, mientras que el lado b funciona como hipotenusa, para este ángulo α podemos escribir que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b} \tag{1}$$

Lo que equivale a expresar que:

$$h = b \operatorname{sen}\alpha \tag{2}$$

En el triángulo del lado derecho, ocurre algo parecido, pero ahora el ángulo que nos interesa es β, para que nuevamente h representa el cateto opuesto, mientras que ahora la hipotenusa es el lado a; esto nos permite ahora expresar que:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a} \tag{3}$$

De esta relación también podemos escribir la igualdad:

$$h = a \operatorname{sen}\beta \tag{4}$$

Como ambas ecuaciones, (**2**) y (**4**) representan el mismo valor de la altura, h, podemos igualarlas:

$$\mathbf{a}\ \mathbf{sen}\ \beta = \mathbf{b}\ \mathbf{sen}\ \alpha \qquad (\mathbf{5})$$

Al acomodar esta igualdad, dividimos cada lado entre los productos correspondiente, de tal forma que llegamos a la expresión:

$$\frac{\mathbf{sen}\ \alpha}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{sen}\ \beta}{\mathbf{b}} \qquad (\mathbf{6})$$

Si ahora en el vértice C se tuviera el ángulo γ y si se repite el mismo procedimiento, trazando una altura desde otro vértice, aparecería la tercera razón correspondiente al ángulo γ y a su lado opuesto c, así se completa la relación que caracteriza a la ley de los senos:

$$\frac{\mathbf{sen}\ \alpha}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{sen}\ \beta}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{sen}\ \gamma}{\mathbf{c}} \qquad (\mathbf{7})$$

De la relación expresada en (**7**), se pueden obtener dos igualdades más que complementan a la ecuación (**6**):

$$\frac{\mathbf{sen}\ \alpha}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{sen}\ \gamma}{\mathbf{c}} \qquad (\mathbf{8})$$

y,

$$\frac{\mathbf{sen}\ \beta}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{sen}\ \gamma}{\mathbf{c}} \qquad (\mathbf{9})$$

Para usar de forma adecuada estas expresiones es importante recordar que todas ellas representan las mismas relaciones (divisiones) entre lados y ángulos, la diferencia se encuentra únicamente en la forma en que están acomodados los términos. En algunos ejercicios conviene más trabajar con las expresiones tal y como aparecen en (**6**), (**8**) y (**9**), pero en otros resulta más útil y práctico intercambiar los cocientes, es decir, pasar todos los numeradores a los denominadores, para que en el momento de despejar cualquiera de los lados (a, b, c) se realice de forma más sencilla y se realicen de forma adecuada los cálculos correspondientes. Conocer estas formas equivalentes ayuda a evitar errores comunes y permite resolver triángulos con mayor claridad. Estas formas equivalentes se expresan de la siguiente manera:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen}\ \alpha} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen}\ \beta} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen}\ \gamma} \qquad (\mathbf{10})$$

Entonces de forma general podemos enunciar:

Ley de senos

Para todo triángulo dado, la relación entre el seno de un ángulo considerado y la magnitud del lado opuesto es igual a la relación de otro ángulo y el lado opuesto a éste.

Idea clave 11. Datos necesarios para resolver un triángulo oblicuángulo

En suma, la ley de senos nos permite resolver un triángulo oblicuángulo siempre que dispongamos de algunas de las siguientes combinaciones de datos:

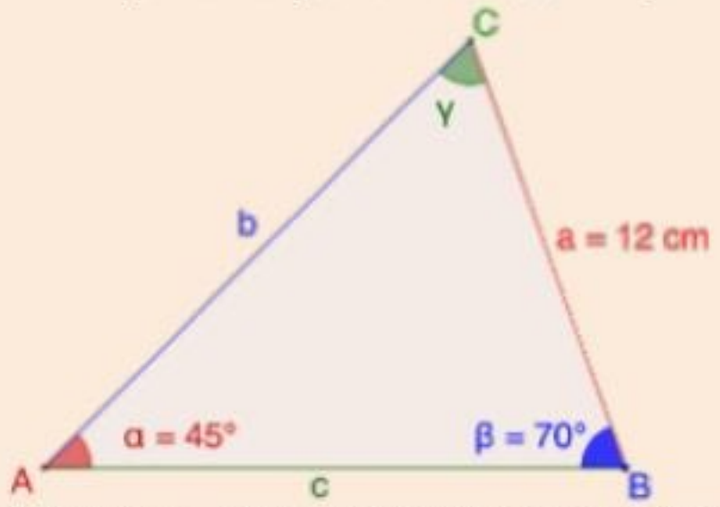
- Dos ángulos y un lado (AAL): conociendo dos ángulos, el tercero se obtiene de inmediato pues la suma de los ángulos internos es $\mathbf{180°}$, y el lado dado nos sirve para calcular los demás lados.
- Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (LLA): esto nos permite aplicar directamente la ley, pues el ángulo conocido está frente a uno de los lados, lo que posibilita encontrar los demás valores.
- Un lado acompañado de dos ángulos (ALA): que es una situación igual que la primera, pero en distinto orden. Conocer dos ángulos inicialmente permite determinar el tercero, y posteriormente, continuar con los lados.

Resolvamos algunos ejemplos de cada uno de los casos para ejercitar con el uso de la ley de senos:

Ejemplo 33.

En un triángulo ABC, los ángulos miden: $\alpha = \mathbf{45°}$, $\beta = \mathbf{70°}$, y el lado $a = \mathbf{12.0}\,\mathrm{cm}$. Determine los valores de los lados b y c.

Figura 52.
Representación del triángulo oblicuángulo con "α"=45°, "β"=70° y lado "a"=12.0 "cm".



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia. [Representación del triángulo oblicuángulo con "α"=45°, "β"=70° y lado "a"=12.0 "cm".]

Solución:

- Este es un ejemplo en que conocemos dos ángulos y un lado.
- Recordemos que en todo triángulo la suma de sus ángulos internos es $\mathbf{180°}$, de modo que:

$$\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{180°}$$

- De tal manera que, al sustituir los valores conocidos:

$$\mathbf{45° + 70° + \gamma = 180°}$$

$$\mathbf{115° + \gamma = 180°}$$

$$\gamma = \mathbf{180° - 115°}$$

$$\gamma = \mathbf{65°}$$

- A partir de la ecuación $(\mathbf{6})$ que establece la relación entre los ángulos α y β podemos determinar el valor de b:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \Longrightarrow b = \frac{a \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$$

- Al sustituir los valores correspondientes:

$$b = \frac{a \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{(\mathbf{12.0}\ \text{cm})(\operatorname{sen} 70°)}{\operatorname{sen} 45°} = \mathbf{15.9}\ \text{cm}$$

- Una vez que conocemos el ángulo $\gamma = \mathbf{65°}$, podemos a partir de cualquiera de las expresiones $(\mathbf{8})$ o $(\mathbf{9})$ determinar el valor del tercer lado, c; aplicando la ecuación $(\mathbf{8})$:

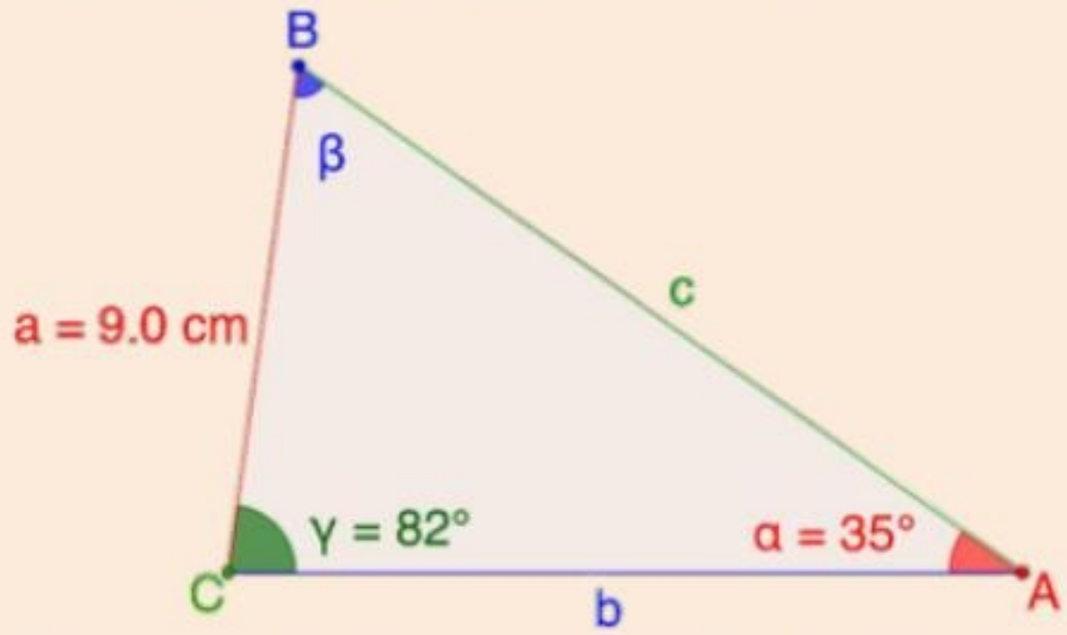
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \Longrightarrow c = \frac{a \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{(\mathbf{12.0}\ \text{cm})(\operatorname{sen} 65°)}{\operatorname{sen} 45°} = \mathbf{15.4}\ \text{cm}$$

Ejemplo 34.

En un triángulo ABC, se tienen las siguientes medidas de ángulos $\alpha = 35°$, $\gamma = 82°$, y el lado opuesto a α mide $9.0\,\text{cm}$. Determine los valores de los lados b, c y el ángulo faltante (β).

Figura 53.
Representación del triángulo del ejemplo "α"=35°, "γ"=82°, y lado de 9.0 "cm".



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia. [Representación del triángulo del ejemplo "α"=35°, "γ"=82°, y lado de 9.0 "cm".]

Solución:

- Nuevamente tenemos el caso en que conocemos dos ángulos y un lado. Nos proporcionan los valores de $\alpha = 35°$, $\gamma = 82°$, y al decir que el lado de $9.00\,\text{cm}$ es opuesto a α, caemos en cuenta que es el lado a.

- Recordemos que en todo triángulo la suma de sus ángulos internos es $180°$:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

- De modo que, para determinar el ángulo faltante, sustituimos los valores conocidos y despejamos el valor de β:

$$35° + \beta + 82° = 180°$$

$$117° + \beta = 180°$$

$$\beta = 180° - 117° = 63°$$

- Ahora podemos realizar el cálculo del lado b, a través de la relación (**6**), de tal manera que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}\Longrightarrow b=\frac{a\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$$

- Al sustituir los valores correspondientes:

$$b=\frac{a\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{(\mathbf{9.00}\ \text{cm})(\operatorname{sen}63°)}{\operatorname{sen}35°}$$

$$b=\mathbf{13.98}\ \text{cm}\approx\mathbf{14.0}\ \text{cm}$$

- Para saber el valor del lado faltante c, podemos usar cualquiera de las fórmulas (**8**) o (**9**); a través del uso de la ecuación (**8**):

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}\Longrightarrow c=\frac{a\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

- Al sustituir los valores correspondientes, se obtiene que:

$$c=\frac{(\mathbf{9.00}\ \text{cm})(\operatorname{sen}82°)}{\operatorname{sen}35°}$$

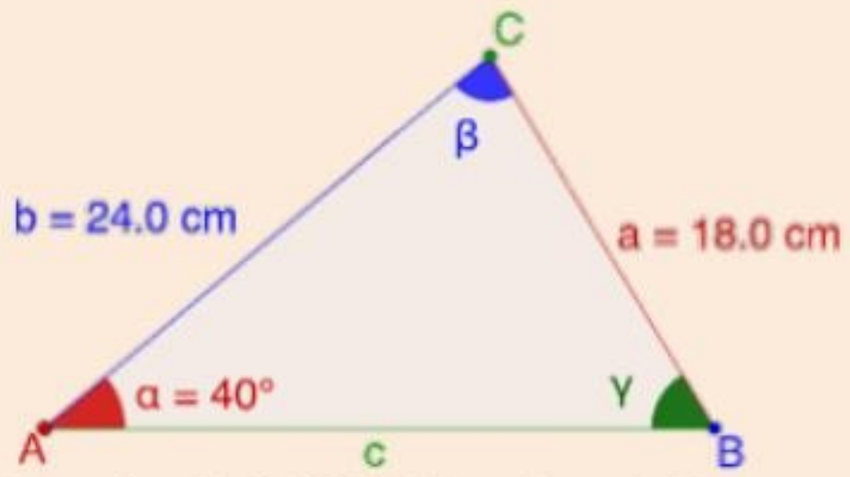
$$c=\mathbf{15.45}\ \text{cm}\approx\mathbf{15.5}\ \text{cm}$$

De esta forma se tiene el triángulo resuelto.40

Ejemplo 35.

En un triángulo ABC, el lado $a=\mathbf{18.0}\ \text{cm}$, el lado $b=\mathbf{24.0}\ \text{cm}$ y el ángulo $\alpha=\mathbf{40°}$. Determina los valores para los ángulos y el lado restantes.

Figura 54.
Representación del triángulo con "a"=18.0 "cm" , "b"=24.0 "cm" y "α"=40°



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia. [Representación del triángulo con "a"=18.0 "cm", "b"=24.0 "cm" y "α"=40°.]

Solución:

- Este ejemplo represente la situación en la que contamos con el valor de dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.
- Conociendo el valor del ángulo $\alpha = \mathbf{40}°$ y de los lados $a = \mathbf{18.0}\,\text{cm}$ y $b = \mathbf{24.0}\,\text{cm}$, podemos aprovechar la expresión $(\mathbf{6})$ para determinar primero el valor de $\mathbf{sen}\,\beta$, y posteriormente el valor de este ángulo:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} \Longrightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{b\,\text{sen}\,\alpha}{a}$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{(\mathbf{24.0}\,\text{cm})(\text{sen}\,40°)}{\mathbf{18.0}\,\text{cm}} = \mathbf{0.857}$$

- El valor del ángulo se determina a través de:

$$\beta = \text{arc sen}(\mathbf{0.857}) = \mathbf{58.98}° \approx \mathbf{59.0}°$$

- Además, el valor de γ se puede determinar considerando que la suma de los ángulos internos del triángulo debe ser $\mathbf{180}°$:

$$\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{180}°$$

$$\mathbf{40.0}° + \mathbf{59.0}° + \gamma = \mathbf{180}°$$

$$\mathbf{99.0}° + \gamma = \mathbf{180}°$$

$$\gamma = \mathbf{180}° - \mathbf{99.0}° = \mathbf{81.0}°$$

- Una vez que se ha determinado el valor de γ, se puede determinar el valor del tercer lado del triángulo, c, a través de:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c} \Longrightarrow c = \frac{a\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha}$$

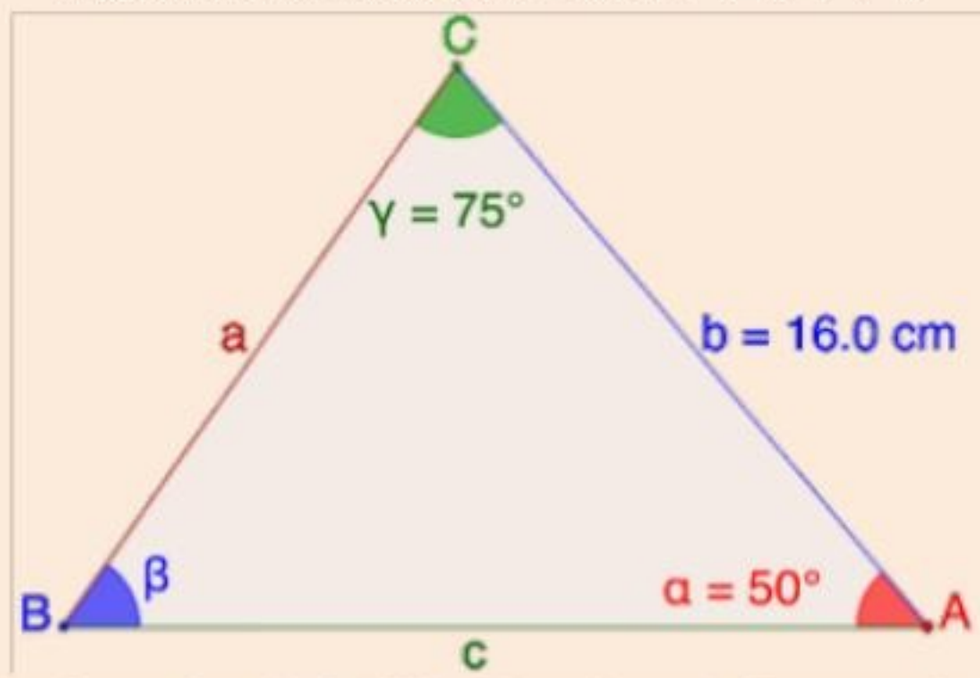
$$c = \frac{(\mathbf{18.0}\,\text{cm})(\text{sen}\,81.0°)}{\text{sen}\,40.0°} = \mathbf{27.65}\,\text{cm} \approx \mathbf{27.7}\,\text{cm}$$

- De esta forma hemos determinado todos los lados y ángulos del triángulo, cuya representación se puede apreciar a continuación.

Ejemplo 36.

En un triángulo ABC, se tienen los ángulos $\alpha = 50°$ y $\gamma = 75°$, y además un lado que no es opuesto a ninguno de los ángulos dados, $b = 16.0\ \text{cm}$, determine el valor de los lados y el ángulo faltantes.

Figura 55.
Representación del triángulo con "b"=16.0 "cm" , "α"=50° y "γ"=75°



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia. [Representación del triángulo con "b"=16.0 "cm" , "α"=50° y "γ"=75°.]

Solución:

- Este ejemplo representa la situación en que se proporcionan dos ángulos además de un lado que no es opuesto a ninguno de ellos.

- Para resolver este ejemplo, comencemos por determinar el valor del ángulo faltante a través de la suma de los ángulos internos del triángulo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$50° + \beta + 75° = 180°$$

$$125° + \beta = 180°$$

$$\beta = 180° - 125°$$

$$\beta = 55°$$

- Una vez que conocemos el valor de este ángulo, podemos determinar el valor de los lados a y b, a través de las siguientes relaciones:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a};\ \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

- De tal manera que al despejar a a y c, y sustituir los valores correspondientes en estas expresiones se tiene:

$$a = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{(\mathbf{16.0}\ \text{cm})(\operatorname{sen} 50°)}{\operatorname{sen} 55°} = \mathbf{14.9}\ \text{cm}$$

$$c = \frac{b \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{(\mathbf{16.0}\ \text{cm})(\operatorname{sen} 75°)}{\operatorname{sen} 55°} = \mathbf{18.9}\ \text{cm}$$



Actividad 7.
Ley de senos

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 7.
Ley de senos

2.3.2 Ley de Cosenos

La ley de senos no puede ser usada para resolver triángulos cuando se conoce lo siguiente:

a) Dos lados y el ángulo entre ellos (**LAL**).
b) Tres lados (**LLL**)

Para estas situaciones se puede usar la **ley de cosenos**:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (11)$$

En esta ecuación b y c son los lados conocidos y α el ángulo se refiere al ángulo entre estos dos lados, o sea es la primera situación (**LAL**); o bien se pude brindar el dato de los tres lados (**LLL**) y el ángulo α será el ángulo opuesto al lado a.

Para probar la validez de la expresión (11), consideremos el triángulo ABC oblicuángulo de la **Figura 56** con lados a, b, c y ángulos α, β, γ; cuando se traza la altura (h) del triángulo partiendo del vértice C y cortando al segmento de recta $\overline{AB}$ en el punto D, en este punto se forman dos triángulos rectángulos al interior del triángulo oblicuángulo original, uno que implica los vértices ADC y el otro con vértices en CDB. En este último, el ángulo β posee un lado adyacente con longitud $(c - x)$, y en el triángulo ADC, el ángulo α tiene un lado adyacente con longitud x. Al sumar la longitud de estos dos catetos: $(c - x) + x = c$, se recupera el lado c, del triángulo oblicuángulo original.

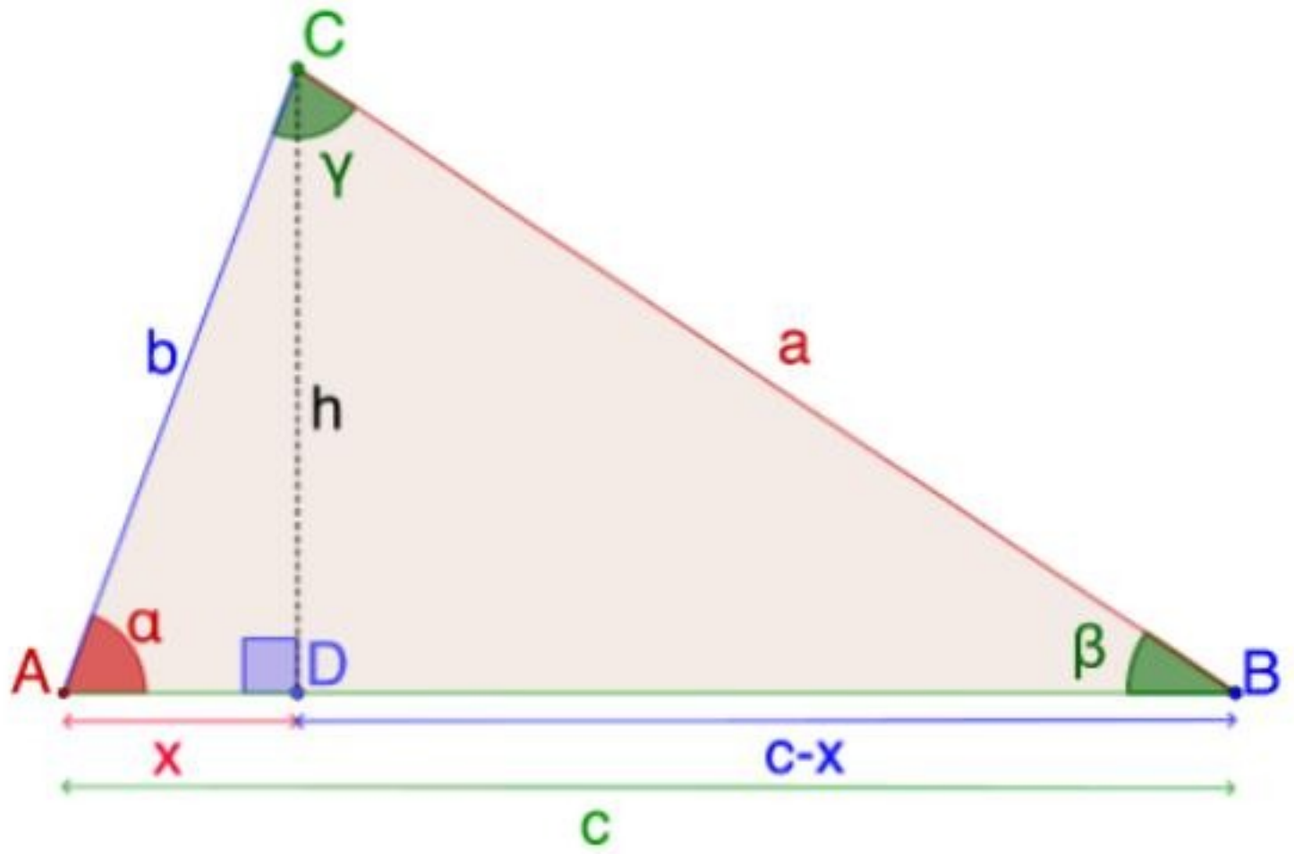
Cuando se aplica el teorema de Pitágoras para la determinación del valor de la altura en cada triángulo rectángulo se obtienen las siguientes expresiones:

$$h^2 = b^2 - x^2 \qquad (12)$$

y,

$$h^2 = a^2 - (c - x)^2 \qquad (13)$$

Figura 56.
Triángulo oblicuángulo para la demostración de la Ley de Cosenos



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia. [Triángulo oblicuángulo para la demostración de la Ley de Cosenos.]

Y al igualar estas ecuaciones **(12)** y **(13)**:

$$a^2 - (c - x)^2 = b^2 - x^2 \qquad (14)$$

Al desarrollar el binomio al cuadrado $(c - x)^2$ y despejar al término a^2:

$$a^2 - (c^2 - 2cx + x^2) = b^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + (c^2 - 2cx + x^2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \qquad (15)$$

La ecuación **(15)** podría aplicarse en cualquier triángulo oblicuángulo si supiéramos para todos ellos el valor de x, cuestión que no siempre es posible; podríamos pasar de esta expresión a otra que esté más en términos de lo que si podríamos saber de forma más sencilla para un triángulo dado, por ejemplos el valor de sus tres lados o el valor de dos lados y el ángulo que forman entre ellos. Retomando la **Figura 43**, al determinar el coseno del ángulo α y despejar de esta relación el valor de x:

$$\cos \alpha = \frac{x}{b} \qquad (16)$$

$$x = b \cos \alpha \tag{17}$$

Al sustituir (17) en (15):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Así demostramos cómo se obtuvo la ecuación (11) y también cómo al saber la magnitud de dos lados y el ángulo entre ellos de un triángulo oblicuángulo podemos determinar la magnitud del tercer lado. Esta misma deducción puede extenderse hacia la determinación de los otros lados, es decir, en conjunto podríamos escribir:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \tag{18}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \tag{19}$$

No olvidemos que b es el lado opuesto al ángulo β y que c es el opuesto a γ. De tal forma, que de manera general la definición de la Ley de cosenos es:

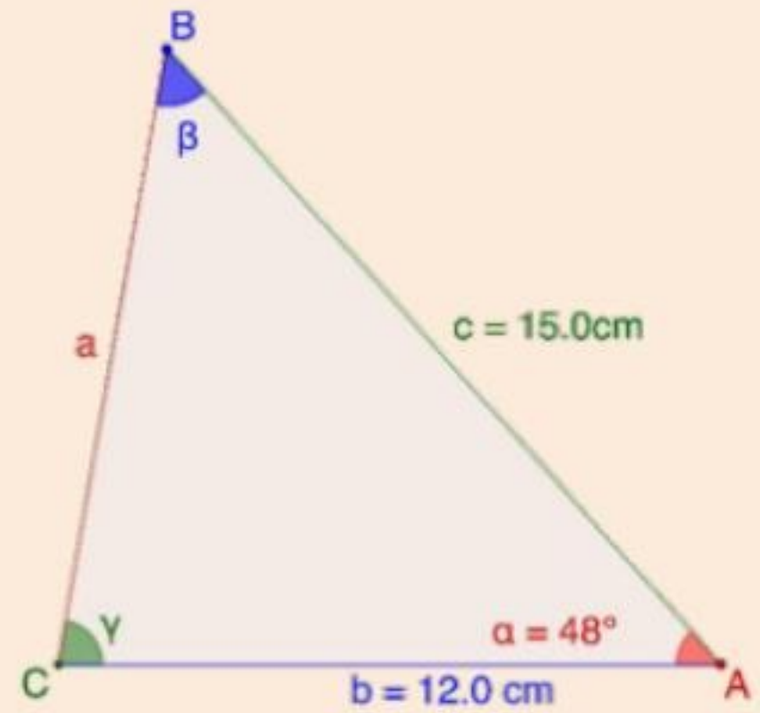
Ley de Cosenos

Establece que, en un triángulo cualquiera, el cuadrado de la magnitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el producto de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Ejemplo 37.

En un triángulo ABC, se conocen los lados $b = 12.0\,\text{cm}$ y $c = 15.0\,\text{cm}$, y el ángulo comprendido entre ellos $\alpha = 48°$. Determine el valor del lado a y con este resultado determine el valor del ángulo β.

Figura 57.
Triángulo oblicuángulo con "b"=12.0 "cm" , "c"=15.0 "cm" y "α"=48°



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con Geogebra. [Triángulo oblicuángulo con "b"=12.0 "cm" , "c"=15.0 "cm" y "α"=48°.]

Solución:

- En este ejemplo se conocen dos lados b, c y el ángulo comprendido entre ellos, es decir, estamos en el caso LAL, para el cual no basta con usar la ley de senos, y se debe emplear la ley de cosenos. De acuerdo con la ecuación (11):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

- Si sustituimos los valores correspondientes, $b = 12.0\,\text{cm}$, $c = 15.0\,\text{cm}$ y $\alpha = 48°$, se obtiene:

$$a^2 = (12.0\,\text{cm})^2 + (15.0\,\text{cm})^2 - 2(12.0\,\text{cm})(15.0\,\text{cm})\cos 48°$$

$$a^2 = 128.11\,\text{cm}^2$$

$$a = \sqrt{128.11\,\text{cm}^2}$$

$$a \approx 11.3\,\text{cm}$$

- Así los valores de este triángulo oblicuángulo son:

$$a \approx 11.3\,\text{cm} \quad b = 12.0\,\text{cm} \quad c = 15.0\,\text{cm}$$

- Para la determinación del ángulo β a partir del valor encontrado para a una alternativa que se tiene es el uso de la Ley de Senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}$$

- Sustituyendo y resolviendo para el ángulo solicitado:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{(\mathbf{12.0}\ \text{cm})(\operatorname{sen}48°)}{\mathbf{11.3}\ \text{cm}}$$

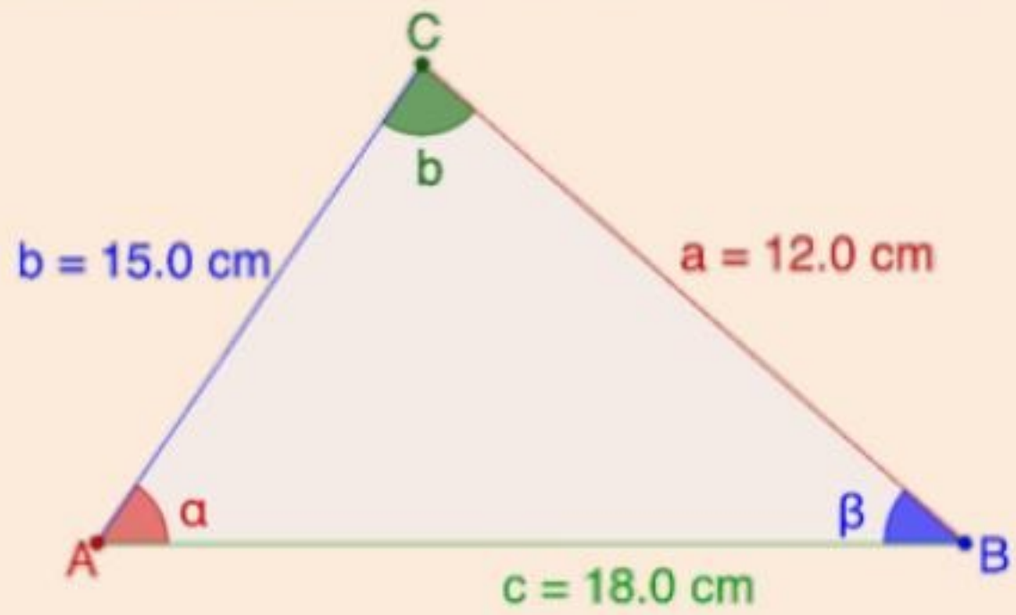
$$\operatorname{sen}\beta = \mathbf{0.788}$$

$$\beta = \operatorname{arc\,sen}\,0.788 = \mathbf{51.98°} \approx \mathbf{52°}$$

Ejemplo 38.

En un triángulo se tienen las siguientes longitudes de lado: $a = \mathbf{12.0}\ \text{cm}$, $b = \mathbf{15.0}\ \text{cm}$ y $c = \mathbf{18.0}\ \text{cm}$ (observe la siguiente figura). Determine los tres ángulos del triángulo descrito.

Figura 58.
Representación del triángulo con lados "a"=12.0 "cm" , "b"=15.0 "cm" y "c"=18.0 "cm".



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con Geogebra. [Representación del triángulo con lados "a"=12.0 "cm" , "b"=15.0 "cm" y "c"=18.0 "cm".]

Solución:

- En este caso conocemos los tres lados y ningún ángulo, de tal forma que la ley de senos no puede conducirnos a la respuesta; de forma alternativa tenemos que trabajar con la ley de cosenos.

- Podemos despejar de la ecuación $(\mathbf{11})$ al término del $\cos\alpha$ y sustituir los valores correspondientes:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(\mathbf{15.0}\ \text{cm})^2 + (\mathbf{18.0}\ \text{cm})^2 - (\mathbf{12.0}\ \text{cm})^2}{\mathbf{2}(\mathbf{15.0}\ \text{cm})(\mathbf{18.0}\ \text{cm})}$$

$$\cos\alpha = \mathbf{0.75}$$

$$\alpha = \text{arc}\cos 0.75 \approx \mathbf{41.4°}$$

- De la misma forma, de las expresiones **(18)** y **(19)**, podemos despejar a los términos $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, y a partir de estos determinar el valor de cada ángulo:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(\mathbf{12.0}\ \text{cm})^2 + (\mathbf{18.0}\ \text{cm})^2 - (\mathbf{15.0}\ \text{cm})^2}{2(\mathbf{12.0}\ \text{cm})(\mathbf{18.0}\ \text{cm})}$$

$$\cos\beta = \mathbf{0.563}$$

$$\beta = \text{arc}\cos 0.563 = \mathbf{55.77°} \approx \mathbf{55.8°}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(\mathbf{12.0}\ \text{cm})^2 + (\mathbf{15.0}\ \text{cm})^2 - (\mathbf{18.0}\ \text{cm})^2}{2(\mathbf{12.0}\ \text{cm})(\mathbf{15.0}\ \text{cm})}$$

$$\cos\gamma = \mathbf{0.125}$$

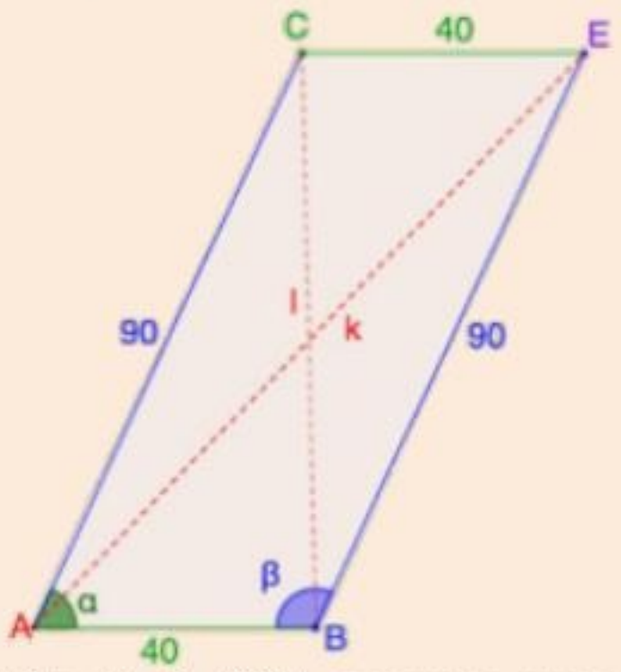
$$\gamma = \text{arc}\cos 0.125 \approx \mathbf{82.8°}$$

- De esta forma tenemos los valores para todos los ángulos $\alpha \approx \mathbf{41.4°}$, $\beta \approx \mathbf{55.8°}$ y $\gamma \approx \mathbf{82.8°}$, que al sumarse resultan en $\mathbf{180°}$.

Ejemplo 39.

Un paralelogramo tiene lados con longitudes de $\mathbf{40}$ *cm* y $\mathbf{90}$ *cm*, además un ángulo de $\alpha = \mathbf{65°}$ como se muestra en la siguiente figura. Use la ley de cosenos para determinar la longitud de las diagonales, k y l, de este paralelogramo.

Figura 59.
Diagonales dentro de paralelogramo



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con Geogebra. [Diagonales dentro de paralelogramo.]

Solución:

- Si momentáneamente usamos el triángulo ABC, nos percatamos de que el ángulo $\alpha = 65°$ se opone a la diagonal l de este paralelogramo, cuestión que podemos aprovechar si consideramos que los lados adyacentes miden $40\,\text{cm}$ y $90\,\text{cm}$, de esta forma y considerando la deducción de la ley de cosenos, la magnitud de esta diagonal se obtiene con la siguiente relación:

$$l^2 = (90.0\,\text{cm})^2 + (40.0\,\text{cm})^2 - 2(90.0\,\text{cm})(40.0\,\text{cm})\cos 65°$$

$$l^2 = 6657.1\,\text{cm}^2$$

$$l = \sqrt{6657.1\,\text{cm}^2} = 81.6\,\text{cm}$$

- Para la determinación de la diagonal k, consideramos el triángulo ABE en que el ángulo β es suplementario al ángulo α, de modo que:

$$\alpha + \beta = 180°$$

$$\beta = 180° - 65° = 115°$$

Este ángulo de $115°$ es el que se opone a la diagonal k, mientras que los lados adyacentes siguen siendo $40\,\text{cm}$ y $90\,\text{cm}$, por lo que a través de la ley de cosenos obtenemos:

$$k^2 = (90.0\,\text{cm})^2 + (40.0\,\text{cm})^2 - 2(90.0\,\text{cm})(40.0\,\text{cm})\cos 115°$$

$$k^2 = 12742.9\,\text{cm}^2$$

$$k = \sqrt{12742.9\,\text{cm}^2} \approx 112.9\,\text{cm}$$

De esta forma las dos diagonales del paralelogramo son $l = 81.6\,\text{cm}$ y $k = 112.9\,\text{cm}$.



Actividad 8.
Ley de cosenos

Instrucciones: realiza el siguiente ejercicio, para comenzar da **clic** en el enlace y sigue las indicaciones.

Actividad 8.
Ley de cosenos

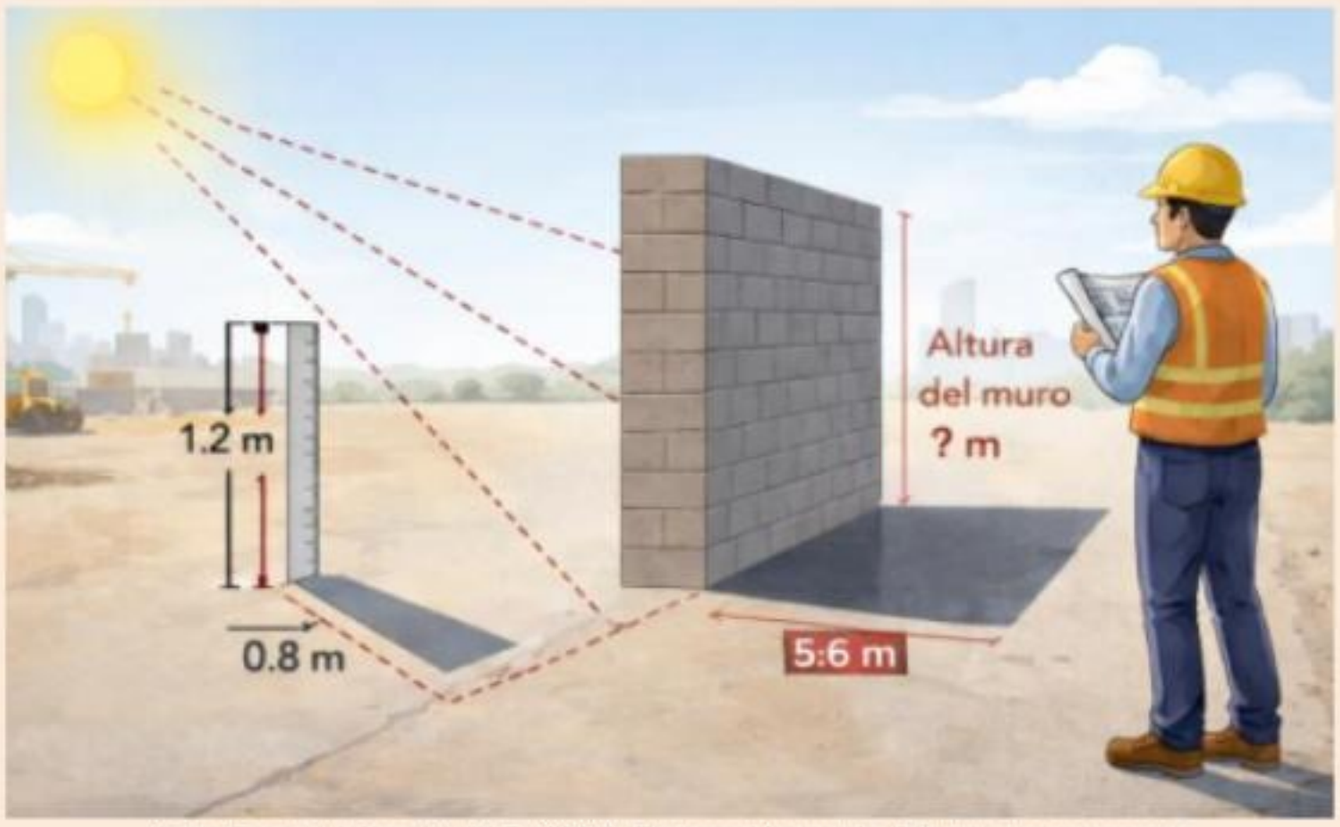
2.4 Problemas de aplicación

Ejemplo 40.

En una obra, un ingeniero necesita conocer la altura de un muro recién colado, pero no puede acercarse porque aún está húmedo.

Coloca una regla vertical de 1.2 m que proyecta una sombra de 0.8 m. Al mismo tiempo, el muro proyecta una sombra de 5.6 m. Determina la altura del muro.

Figura 60.
Figura que representa el problema planteado en el 40



Nota. Fuente: López A., M.F. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 40.]

Solución:

Los triángulos formados por las sombras son semejantes

$$\frac{\boldsymbol{altura\ de\ la\ regla}}{\boldsymbol{longitud\ de\ su\ sombra}} = \frac{\boldsymbol{altura\ del\ muro}}{\boldsymbol{longitud\ de\ la\ sombra\ del\ muro}}$$

Sustitución:

$$\frac{\mathbf{1.2\ m}}{\mathbf{0.8\ m}} = \frac{\boldsymbol{H}}{\mathbf{5.6\ m}}$$

$$\boldsymbol{H} = (\mathbf{1.2\ m})\left(\frac{\mathbf{5.6\ m}}{\mathbf{0.8\ m}}\right)$$

$$\boldsymbol{H} = (\mathbf{1.2\ m})(\mathbf{7})$$

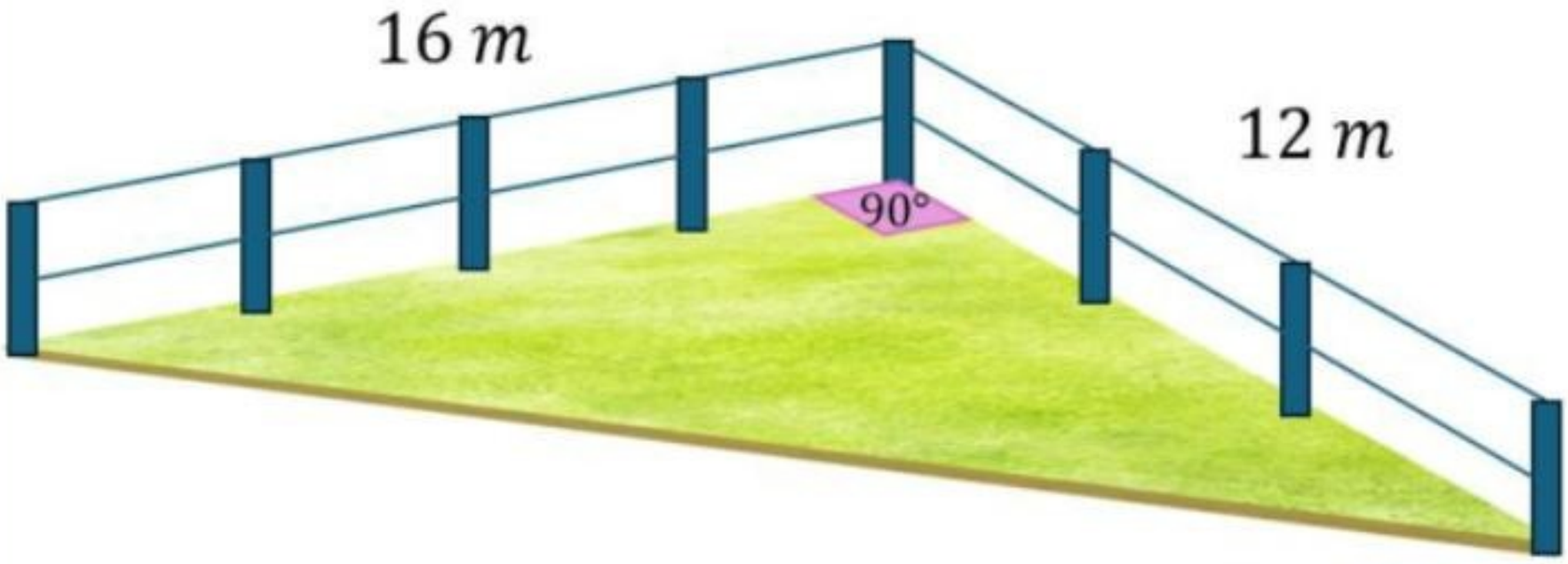
$$\boldsymbol{H} = \mathbf{8.4\ m}$$

La altura del muro es $\mathbf{8.4}\ \boldsymbol{m}$

Ejemplo 41.

Un terreno triangular como el mostrado en la **Figura 61** tiene un ángulo de 90°, dos lados del terreno ya tienen cerca, uno de 16 metros y otro de 12 metros. ¿Cuál es el precio de colocar cerca en el lado faltante sabiendo que el metro de cerca, incluyendo instalación, tiene costo de $ 180?

Figura 61.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 41



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 41.]

Solución:

Como el triángulo cuenta con un ángulo de 90°, entonces se trata de triángulo rectángulo, por lo que podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para poder calcular la longitud del lado faltante. Como las medidas de la figura corresponden a los catetos, porque el ángulo que forman es el de 90°, entonces, la medida faltante es la hipotenusa c:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{(16\ \text{m})^2 + (12\ \text{m})^2}$$

$$c = \sqrt{256\ \text{m}^2 + 144\ \text{m}^2}$$

$$c = \sqrt{400\ \text{m}^2}$$

$$c = 20\ \text{m}$$

Ahora, para obtener el precio P total, debemos multiplicar la cantidad de metros obtenidos por el precio por metro de cerca con instalación incluida:

$$P = (20\ m)\left(\$\ 180\frac{}{m}\right)$$

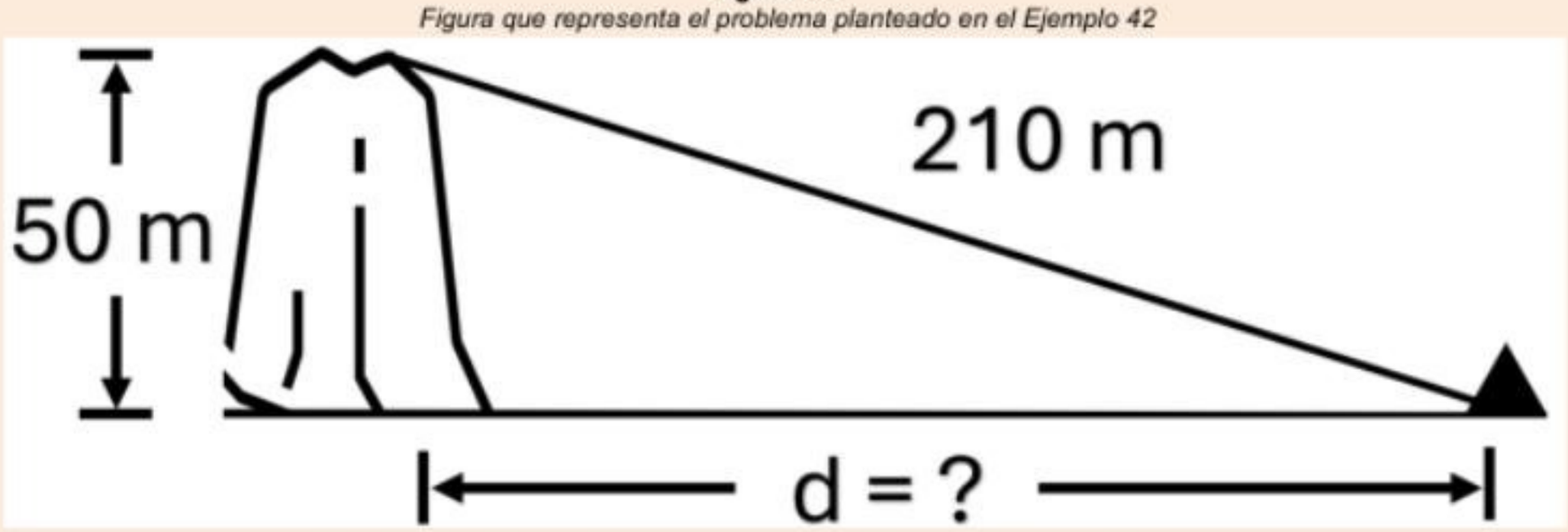
$$P = \$\ 3600$$

En conclusión: el precio por colocar cerca en el lado faltante del terreno es de $ 3600.

Ejemplo 42.

Desde lo alto de una montaña de 50 metros cuelga una tirolesa de 210 metros hacia su base en el piso ¿A qué distancia d está la montaña de la base de la tirolesa?

Figura 62.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 42



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 42.]

Solución:

La altura del triángulo (a), la tirolesa (c) y la distancia en el piso (d) hacia la base de la tirolesa forman un triángulo rectángulo, por lo que podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para obtener la distancia solicitada:

$$c^2 = a^2 + d^2$$

$$c^2 - a^2 = d^2$$

$$d^2 = c^2 - a^2$$

$$d = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$d = \sqrt{(210\ \text{m})^2 - (50\ \text{m})^2}$$

$$d = \sqrt{44100\ \text{m}^2 - 2500\ \text{m}^2}$$

$$d = \sqrt{41600\ \text{m}^2}$$

$$d \approx 203.96\ \text{m}$$

En conclusión: la montaña y la base de tirolesa estás separados por aproximadamente **203.96 m**.

Ejemplo 43.

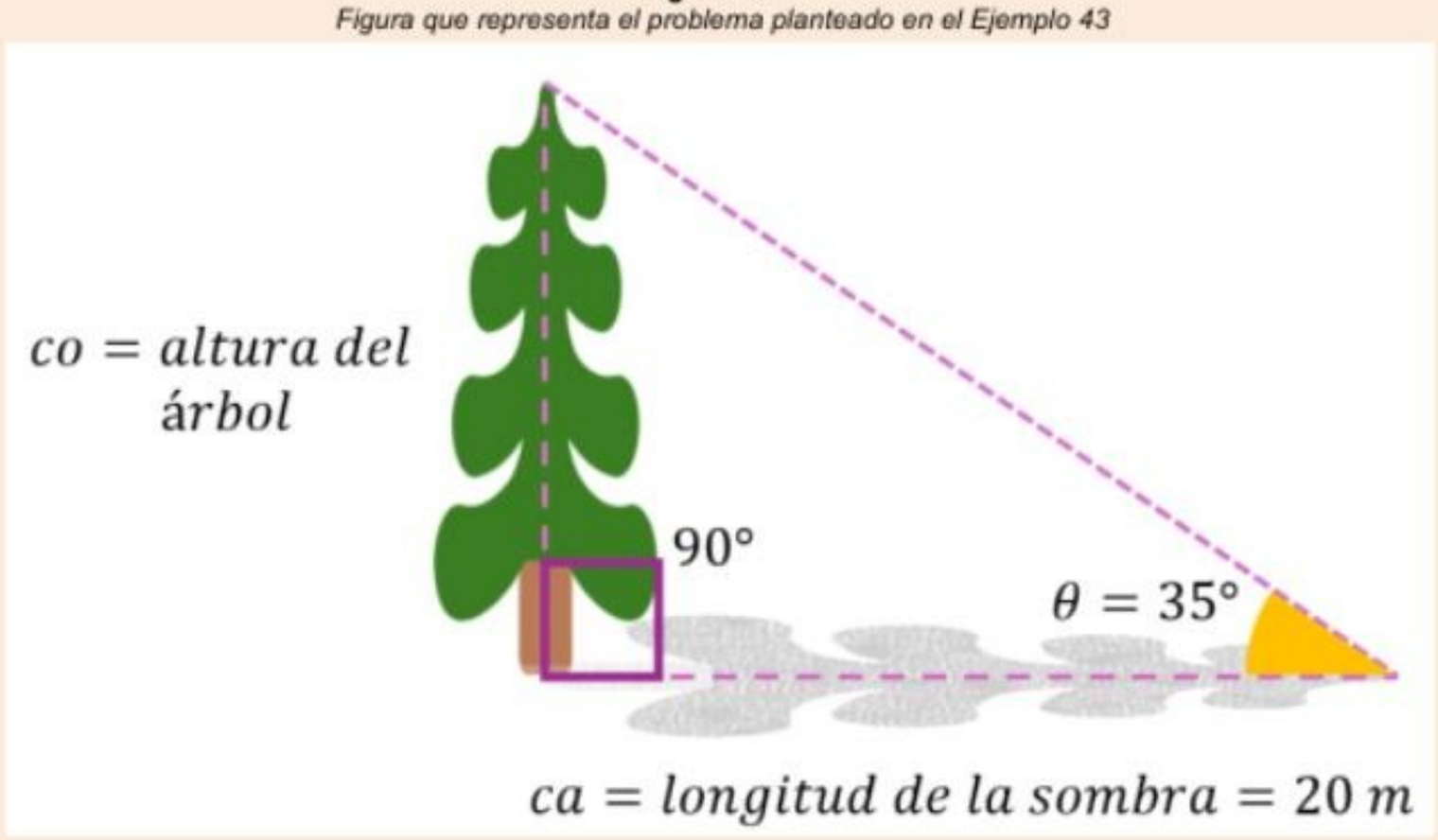
A cierta hora del día un árbol proyecta una sombra sobre el piso de 20 metros. Un estudiante midió el ángulo formado desde el piso por la punta de la sombra y la punta del árbol, obteniendo una magnitud de 35°. Asumiendo que el árbol y el piso son perpendiculares ¿Cuál es la altura del árbol?

Solución:

Nota: Verifica que para este ejercicio tu calculadora esté en grados (sistema sexagesimal).

Como el piso y el árbol son perpendiculares, uniendo con una línea imaginaria la punta del árbol y la punta de su sombra en el piso obtenemos un triángulo rectángulo como se muestra en la **Figura 63**:

Figura 63.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 43



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 43.]

Emplearemos el ángulo medido desde el piso $\boldsymbol{\theta = 35°}$, por lo que la sombra es el cateto adyacente $\boldsymbol{ca}$ y la altura buscada es el cateto opuesto $\boldsymbol{co}$, la razón trigonométrica que relaciona estas tres variables es la tangente, de donde:

$$\tan\theta = \frac{co}{ca}$$

$$\tan 35° = \frac{co}{20\ \text{m}}$$

$$(20\ \text{m})(\tan 35°) = co$$

$$co = (20\ \text{m})(\tan 35°)$$

$$co \approx 14\ \text{m}$$

En conclusión: la altura del árbol es de aproximadamente 14 metros.

Ejemplo 44.

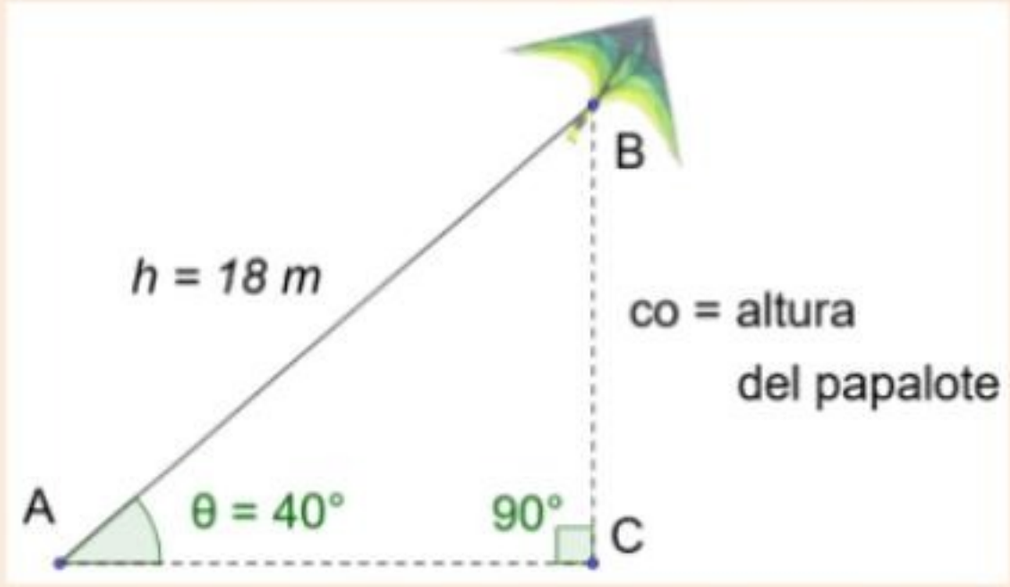
Un niño vuela un papalote con un cordel de 18 m de longitud y analiza que el ángulo entre el cordel y el piso es de 40°. ¿A qué altura desde el piso vuela el papalote?

Solución:

Nota: Verifica que para este ejercicio tu calculadora esté en grados (sistema sexagesimal).

Como ya se ha explicado, una altura es perpendicular a su base, por lo tanto, el cordel, el piso y el papalote forman un triángulo rectángulo. En esta ocasión los datos que nos ofrece el problema son un ángulo de $\boldsymbol{\theta = 40°}$ y el valor de la hipotenusa que es la longitud del cordel $\boldsymbol{h = 18\ \text{m}}$, siendo la incógnita la altura a la que se encuentra el papalote que es el cateto opuesto $\boldsymbol{co}$ para el ángulo dado. En la **Figura 64** se muestra la situación planteada:

Figura 64.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 44



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 44.]

La razón trigonométrica que relaciona las 3 variables involucradas, ángulo $\boldsymbol{\theta}$, hipotenusa $\boldsymbol{h}$, y cateto opuesto $\boldsymbol{co}$ es el seno, de donde:

$$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{co}}{\boldsymbol{h}}$$

$$\mathbf{sen}\,\mathbf{40°} = \frac{\boldsymbol{co}}{\mathbf{18\ m}}$$

$$\boldsymbol{co} = (\mathbf{18\ m})(\mathbf{sen}\,\mathbf{40°})$$

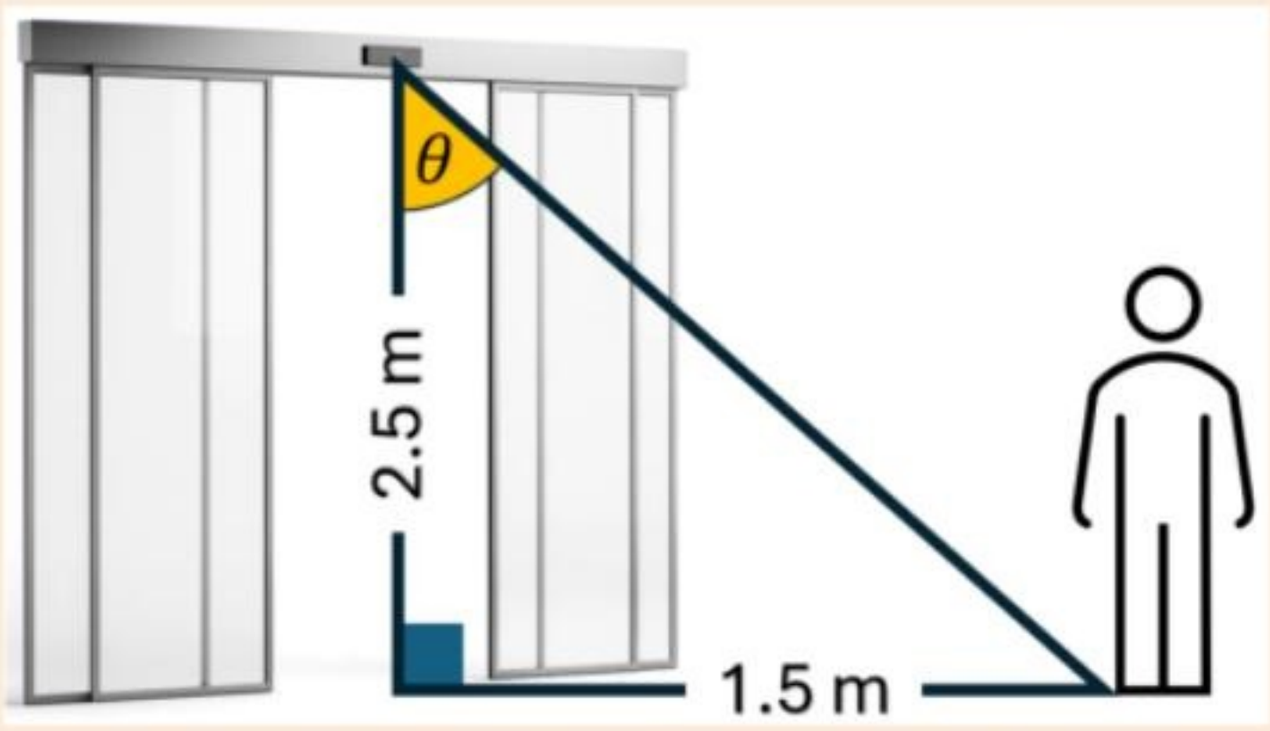
$$\boldsymbol{co} \approx \mathbf{11.57\ m}$$

En conclusión: el papalote vuela a aproximadamente 11.57 metros desde el piso.

Ejemplo 45.

En una puerta automática se colocó un sensor a 2.5 metros del piso ¿Cuál es el ángulo de inclinación $\boldsymbol{\theta}$, respecto a la puerta, que permite que el mecanismo de apertura se active cuando una persona se acerca a 1.5 metros de esta?

Figura 65.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 45



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 45.]

Solución:

Nota: Verifica que para este ejercicio tu calculadora esté en grados (sistema sexagesimal).

Como se puede observar en la **Figura 65** la altura de la puerta es el cateto adyacente del ángulo solicitado y, la distancia a la que se acerca la persona es el cateto opuesto, la razón trigonométrica que relaciona a estas variables es la tangente, por lo que será que aplicaremos:

$$\tan\theta = \frac{co}{ca}$$

$$\tan\theta = \frac{1.5\ \text{m}}{2.5\ \text{m}}$$

$$\tan\theta = 0.6$$

$$\theta = tan^{-1}(0.6)$$

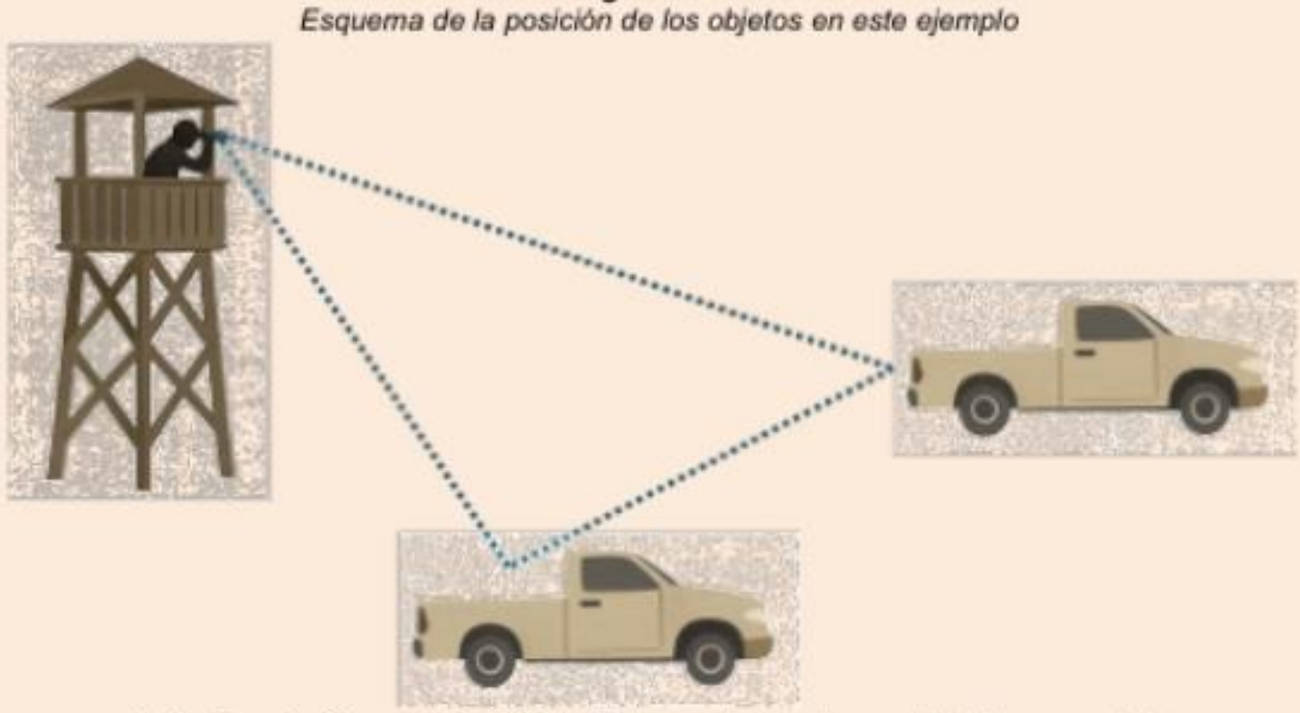
$$\theta \approx 30.96°$$

En conclusión: el sensor de debe colocar con un ángulo de inclinación respecto a la puerta de aproximadamente $30.96°$.

Ejemplo 46. Desde la torre de vigilancia

Desde una torre de vigilancia, un guardia observa dos camionetas estacionadas en ángulos horizontales de $38°$ y $92°$ respecto a su posición. La distancia entre las camionetas es de 42 metros. ¿Cuál es la distancia del guardia a cada una de ellas?, represente el triángulo y resuélvalo en su totalidad para cada uno de sus lados y ángulos.

Figura 66.
Esquema de la posición de los objetos en este ejemplo

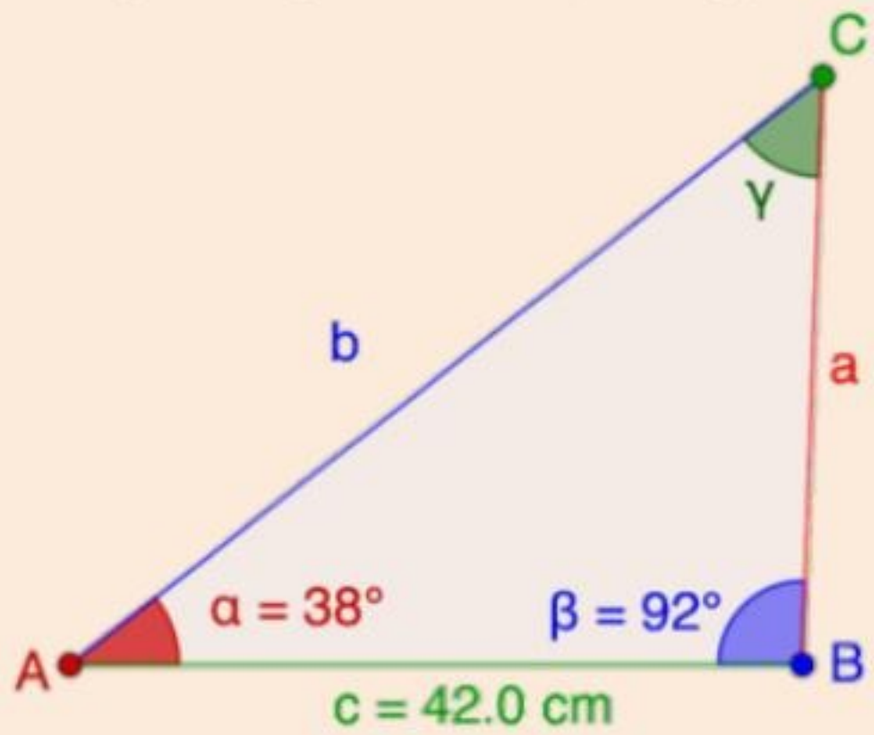


Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con IA. [Esquema de la posición de los objetos en este ejemplo.]

Solución:

- Representemos el triángulo formado por el guardia en la posición C, y las dos camionetas, la camioneta 1 en la posición A y la camioneta 2 en la posición B. El dato c representa la distancia entre las camionetas, en tanto que el valor de a nos da la distancia del guardia a la camioneta 2 y b nos proporciona el dato de la distancia a la camioneta 1.

Figura 67.
Triángulo oblicuángulo con "c"=42.0" m" , "α"=38° y "β"=92°



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con Geogebra. [Triángulo oblicuángulo con "c"=42.0" m" , "α"=38°y "β"=92°.]

- Recordemos que la suma de los ángulos internos del triángulo tiene que ser $\mathbf{180°}$, de forma que el ángulo restante se puede determinar por diferencia:

$$\mathbf{180°} = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\mathbf{180°} = \mathbf{38°} + \mathbf{92°} + \gamma$$

$$\mathbf{180°} = \mathbf{130°} + \gamma$$

$$\gamma = \mathbf{180°} - \ \mathbf{130°} \ = \mathbf{50°}$$

- Podemos determinar la distancia del guardia en la torre a través de la Ley de Senos y las relaciones debido a que de forma inicial se conocen dos ángulos y la magnitud de uno de los lados del triángulo:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}; \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

De tal forma que al despejar a a y b, y sustituir los valores correspondientes en estas expresiones se tiene:

$$a = \frac{c \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{(\mathbf{42.0}\ \mathrm{m})(\operatorname{sen} 38°)}{\operatorname{sen} 50°} = \mathbf{33.75}\ \mathrm{m} \approx \mathbf{33.8}\ \mathrm{m}$$

$$b = \frac{c \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{(\mathbf{42.0}\ \mathrm{m})(\operatorname{sen} 92°)}{(\operatorname{sen} 50°)} = \mathbf{54.79}\ \mathrm{m} \approx \mathbf{54.8}\ \mathrm{m}$$

- De esta forma se tienen todos los datos requeridos para el triángulo formado por las dos camionetas y el guardia en la torre:

$$\alpha = 38°;\ \beta = 92°;\ \gamma = 50°$$

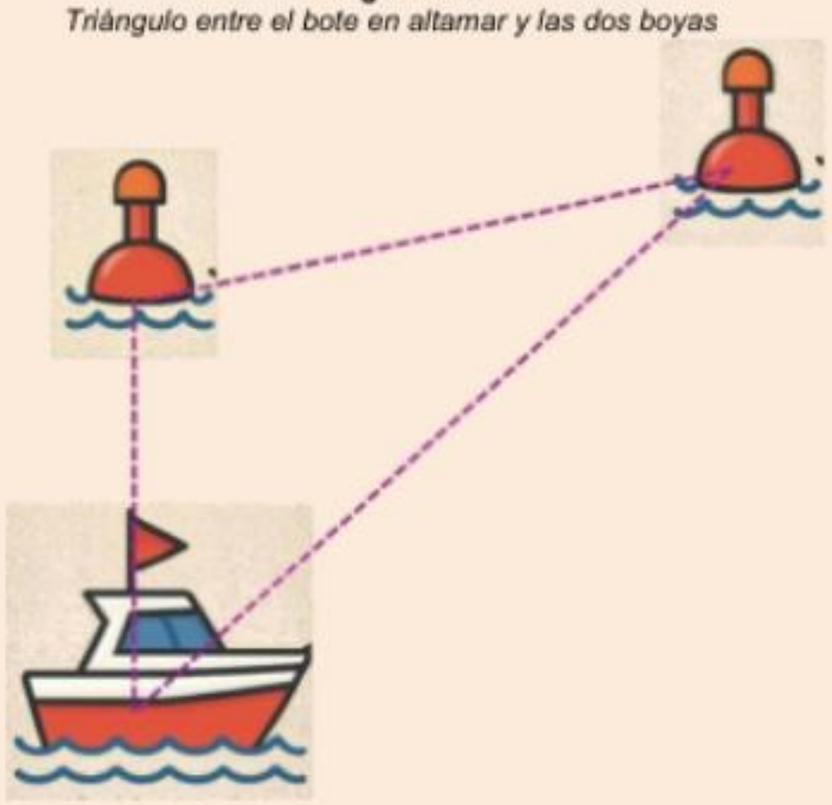
$$a = 33.8\ \text{m};\ b = 54.8\ \text{m};\ c = 42.0\ \text{m}$$

Ejemplo 47. Navegando

Un bote en altamar detecta dos boyas: una está situada 1.2 km al norte de la posición del barco y la otra 1.8 km al noreste de la primera. Desde el barco, se observa que la línea hacia la vista de la primera boya y la línea de vista hacia la segunda boya forman un ángulo de $37°$.

a) Represente el triángulo formado por el barco y las dos boyas.
b) Determine la distancia desde el barco hasta la segunda boya.
c) Determine los ángulos internos faltantes de este triángulo.

Figura 68.
Triángulo entre el bote en altamar y las dos boyas

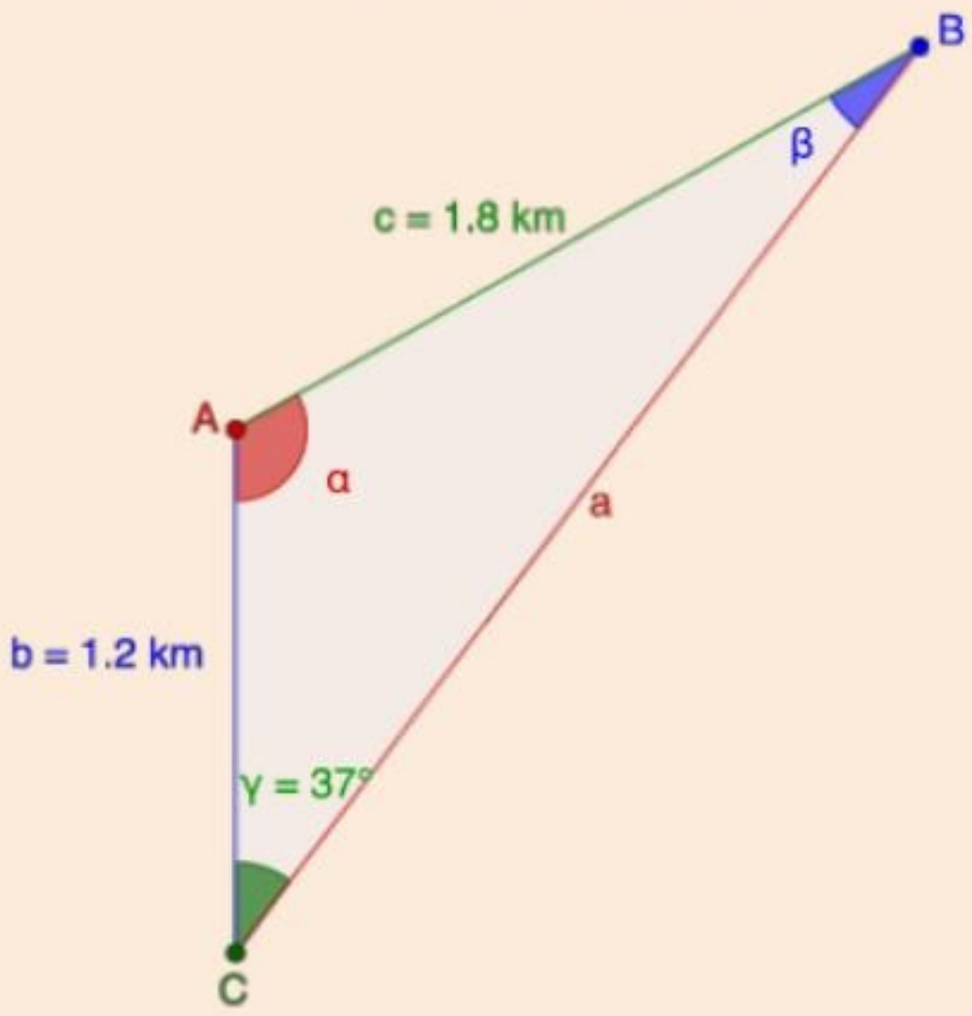


Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con IA. [Triángulo entre el bote en altamar y las dos boyas.]

Solución:

- Comenzamos realizando una representación del triángulo oblicuángulo de acuerdo con la descripción dada y la imagen que nos proporcionan en este problema. Si designamos al vértice C como la posición del barco, al vértice A como el punto en que se ubica la boya 1 (que está al norte del barco), el vértice B como la posición de la boya 2 y el ángulo $\gamma = 37°$ como el correspondiente al vértice C, entonces, podemos representar todos estos elementos a través del siguiente triángulo oblicuángulo:

Figura 69.
Representación del triángulo formado por el bote y las boyas del ejemplo



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con Geogebra. [Representación del triángulo formado por el bote y las boyas del ejemplo.]

- Sabemos que además la distancia $c = \mathbf{1.8}\,\text{km}$ y que la distancia $b = \mathbf{1.2}\,\text{km}$, de modo que podemos aplicar la ley de senos y consideramos el caso LLA en que en que se proporciona dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos lados, $\gamma = \mathbf{37°}$

- De modo que podemos usar la siguiente relación para despejar el valor del ángulo β:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{(\mathbf{1.2}\,\text{km})(\operatorname{sen}37°)}{\mathbf{1.8}\,\text{km}} \approx \mathbf{0.401}$$

$$\beta = \operatorname{arc\,sen}(\mathbf{0.401}) \approx \mathbf{23.7°}$$

- Podemos ahora determinar el valor del ángulo interno que resta, α, considerando que la suma de los ángulos internos de este triángulo debe ser $\mathbf{180°}$:

$$\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{180°}$$

$$\alpha + \mathbf{23.7°} + \mathbf{37°} = \mathbf{180°}$$

$$\alpha + \mathbf{60.7°} = \mathbf{180°}$$

$$\alpha = \mathbf{180°} - \mathbf{60.7°} = \mathbf{119.3°}$$

- Una vez que conocemos el ángulo α y con ayuda de la ley de senos, podemos determinar la magnitud del lado faltante:

$$a = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{(\mathbf{1.2}\ \mathrm{km})(\operatorname{sen} 119.3°)}{\operatorname{sen} 23.7°} = \mathbf{2.6}\ \mathrm{km}$$

- Hemos determinado ya el valor de todos los lados y ángulos del triángulo oblicuángulo:

$$\alpha = \mathbf{119.3°};\ \beta = \mathbf{23.7°};\ \gamma = \mathbf{37°}$$

$$a = \mathbf{2.6}\ \mathrm{km};\ b = \mathbf{1.2}\ \mathrm{km};\ c = \mathbf{1.8}\ \mathrm{km}$$

Ejemplo 48. Aplicación en astronomía

Para determinar la separación angular entre dos estrellas **A** y **B**, un astrónomo fija un punto de observación **C** desde el que la estrella **A** se encuentra a $320 \times 10^6\ \mathrm{km}$ y la estrella **B** a $510 \times 10^6\ \mathrm{km}$. Si el ángulo $\angle ACB$ es de $41°25'$, calcule la distancia entre las estrellas **A** y **B**. Observe la siguiente figura.

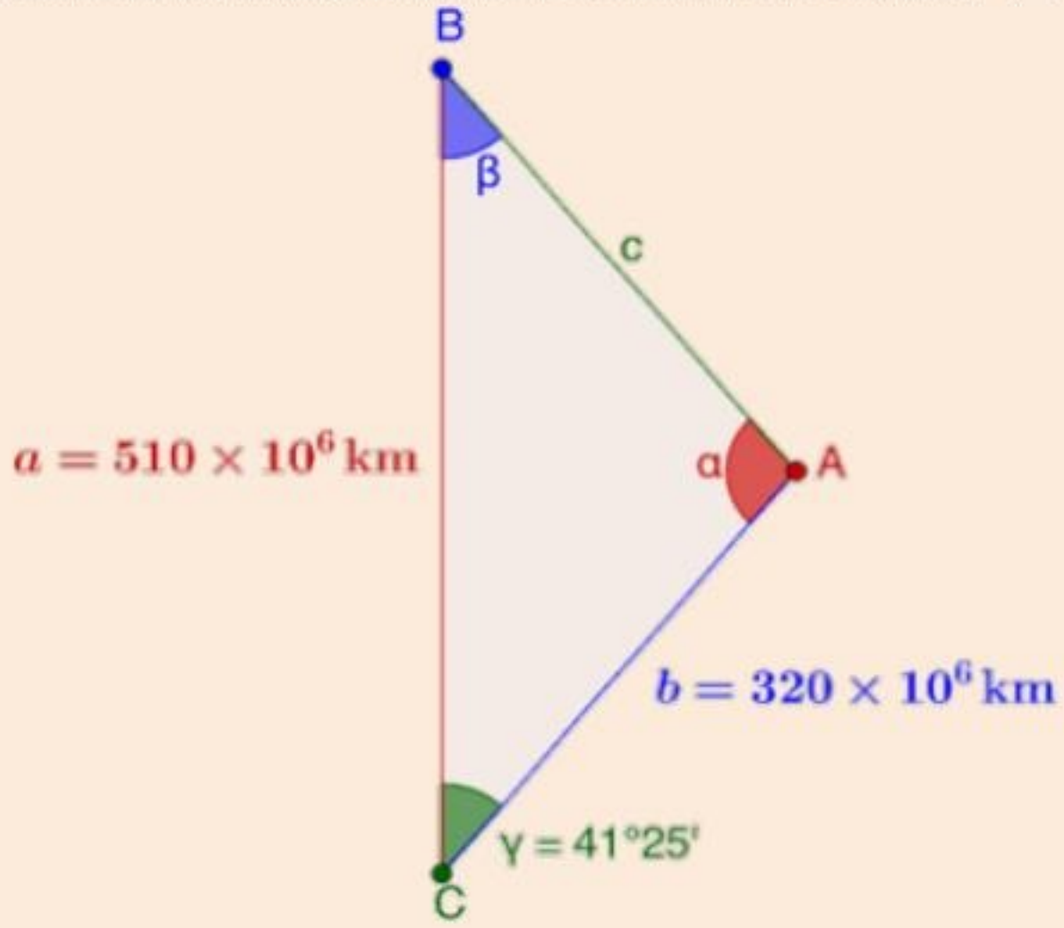
Solución:

- En principio podemos convertir el ángulo a grados decimales:

$$41°25' = 41° + 25'\left(\frac{1°}{60'}\right) \approx 41.4°$$

- Podemos representar este problema a través del triángulo oblicuángulo de la siguiente figura en el que $b = 320 \times 10^6\ \mathrm{km}$ y $a = 510 \times 10^6\ \mathrm{km}$, además el ángulo $\gamma = 41.4°$.

Figura 70.
Representación del triángulo oblicuángulo de la posición de las estrellas "A" y "B"



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con Geogebra. [Representación del triángulo oblicuángulo de la posición de las estrellas "A" y "B" .]

- Para determinar la separación entre las estrellas, es decir, la cantidad c, hacemos uso de la siguiente expresión y por claridad omitiremos las unidades (millones de km):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = (510 \times 10^6)^2 + (320 \times 10^6)^2 - 2(510 \times 10^6)(320 \times 10^6)\cos(41.4°)$$

$$c^2 = 1.177 \times 10^{17}\ \text{km}^2$$

$$c = \sqrt{1.177 \times 10^{17}\ \text{km}^2} = 343 \times 10^6\ \text{km}$$

- De modo que la distancia entre las estrellas **A** y **B** es $c = 343 \times 10^6\ \text{km}$.

Ejemplo 49. Aplicación en topografía

Para estimar la pendiente entre tres puntos de referencia en una zona boscosa, un topógrafo mide las distancias que forman un triángulo entre tres estacas:

- La distancia entre la estaca **A** y la estaca **B** es de $85\ \mathrm{m}$
- La distancia entre la estaca **B** y la estaca **C** es de $120\ \mathrm{m}$
- La distancia entre la estaca **A** y la estaca **C** es de $95\ \mathrm{m}$

Con estos datos, determine la medida del ángulo $\angle ABC$ (el ángulo formado en la estaca B), represente el triángulo.

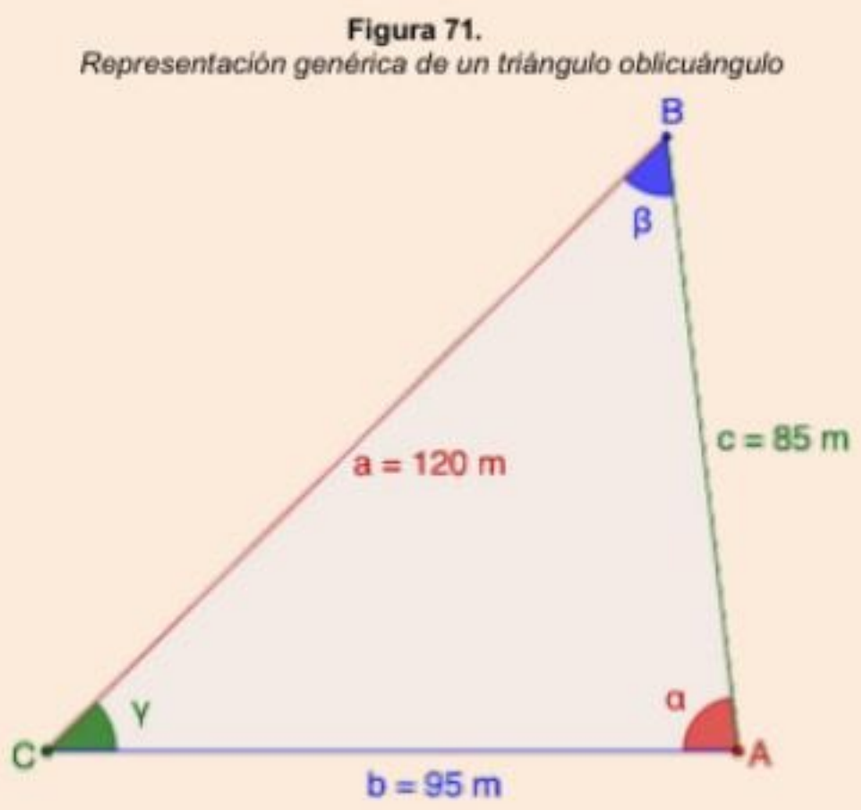
Solución:

- Para organizar adecuadamente la información del problema, asignaremos la notación clásica de un triángulo oblicuángulo. Ubicaremos el ángulo α se ubicará en el vértice o estaca **A**, el ángulo β se ubicará en el vértice o estaca **B** y a su vez el ángulo γ se ubica en el punto de la estaca **C**.

- Con esta convención, el lado opuesto a cada ángulo recibe el nombre correspondiente: el lado **a** se opone al ángulo α, el lado **b** se opone al ángulo β y el lado **c** se opone al ángulo γ.

- A continuación, representaremos un triángulo oblicuángulo genérico, no necesariamente congruente con el del ejemplo, para ubicar de manera clara los vértices **A**, **B**, **C** y las distancias proporcionadas, asegurándonos de etiquetar correctamente cada longitud antes de aplicar la ley de cosenos.

Figura 71.
Representación genérica de un triángulo oblicuángulo



Nota. Fuente: Cruz V., O. (2025). Elaboración propia con Geogebra. [Representación genérica de un triángulo oblicuángulo]

- Con esta figura en mente resulta ahora más sencillo reconocer que el ángulo β puede ser determinado por la expresión:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

- Y reconocemos también el valor de cada uno de los lados:

a es la distancia entre las estacas B y C, es decir, $a = 120\ \text{m}$.
b es la distancia entre las estacas A y C, es decir, $b = 95\ \text{m}$
c es la distancia entre las estacas A y B, es decir, $c = 85\ \text{m}$

- Así podemos determinar el ángulo solicitado:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(120\ \text{m})^2 + (85\ \text{m})^2 - (95\ \text{m})^2}{2(120\ \text{m})(85\ \text{m})}$$

$$\cos\beta = 0.618$$

$$\beta = \arccos(0.618) \approx 51.9°$$

Para representar apropiadamente el triángulo, es necesario calcular los ángulos restantes:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(\mathbf{120}\ \text{m})^2 + (\mathbf{95}\ \text{m})^2 - (\mathbf{85}\ \text{m})^2}{2(\mathbf{120}\ \text{m})(\mathbf{95}\ \text{m})}$$

$$\cos\gamma = \mathbf{0.711}$$

$$\gamma = \arccos(\mathbf{0.711}) \approx \mathbf{44.7°}$$

- Y el tercer ángulo se puede determinar con la suma de los ángulos internos del triángulo:

$$\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{180°}$$

$$\alpha + \mathbf{51.9°} + \mathbf{44.7°} = \mathbf{180°}$$

$$\alpha + \mathbf{96.6°} = \mathbf{180°}$$

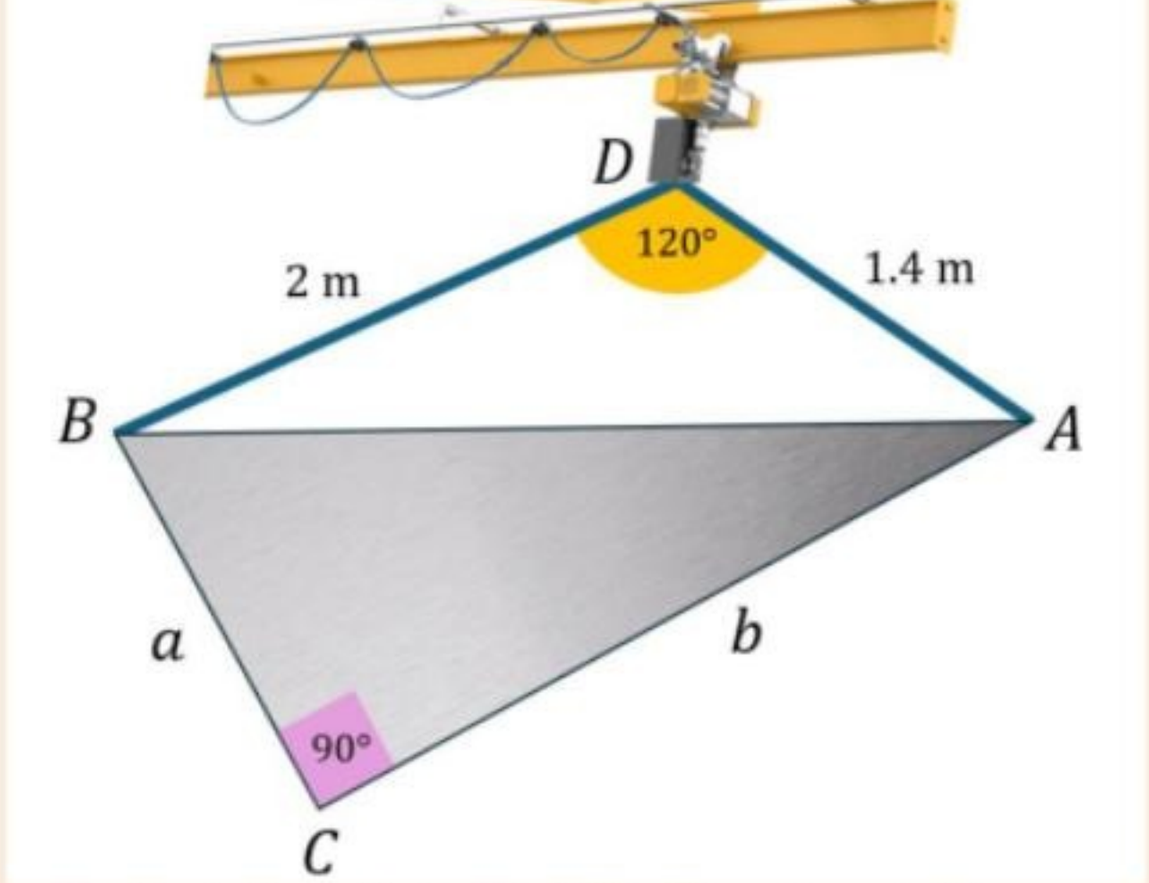
$$\alpha = \mathbf{180°} - \mathbf{96.6°}$$

$$\alpha = \mathbf{83.4°}$$

Ejemplo 50.

Una grúa se emplea para transportar placas de aluminio en forma de triángulo rectángulo mediante dos cables que forman un ángulo de 120° entre sí, uno de 2 metros y otro de 1.4 metros. ¿Cuál es el área de las placas de aluminio sabiendo que un cateto mide el doble del otro?

Figura 72.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 50



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 50].

Solución:

Nota: Verifica que para este ejercicio tu calculadora esté en grados (sistema sexagesimal).

Como se puede observar en la figura, el triángulo ABD es un triángulo oblicuángulo, por lo que se puede calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$ mediante la Ley de Cosenos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2(\overline{AD})(\overline{BD})\cos D$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2(\overline{AD})(\overline{BD})\cos D}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(1.4\ \text{m})^2 + (2\ \text{m})^2 - 2(1.4\ \text{m})(2\ \text{m})\cos 120°}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{8.76\ \text{m}^2}$$

$$\overline{AB} = 2.959 \text{ m}$$

$$\overline{AB} \approx 2.96 \text{ m}$$

Como la placa ABC tiene forma de triángulo rectángulo se puede aplicar el Teorema de Pitágoras para obtener la medida de sus catetos, de los cuales se sabe que uno mide el doble del otro:

$$h^2 = co^2 + ca^2$$

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2$$

Como:

$$b = 2a$$

Entonces:

$$\overline{AB}^2 = a^2 + (2a)^2$$

$$\overline{AB}^2 = a^2 + 4a^2$$

$$\overline{AB}^2 = 5a^2$$

$$5a^2 = \overline{AB}^2$$

$$a^2 = \frac{\overline{AB}^2}{5}$$

$$a = \sqrt{\frac{\overline{AB}^2}{5}}$$

$$a = \sqrt{\frac{(2.96 \text{ m})^2}{5}}$$

$$a = 1.323 \text{ m}$$

$$a \approx 1.32 \text{ m}$$

Entonces el cateto b mide:

$$b = 2a$$

$$b = 2(1.32 \text{ m})$$

$$b = 2.64 \text{ m}$$

Recuerda que, para calcular el área de un triángulo rectángulo, un cateto se puede considerar base y el otro cateto la altura, por lo que el área se puede calcular con la expresión:

$$A = \frac{ab}{2}$$

$$A = \frac{(0.8\ \mathrm{m})(1.6\ \mathrm{m})}{2}$$

$$A = 1.742\ m^2$$

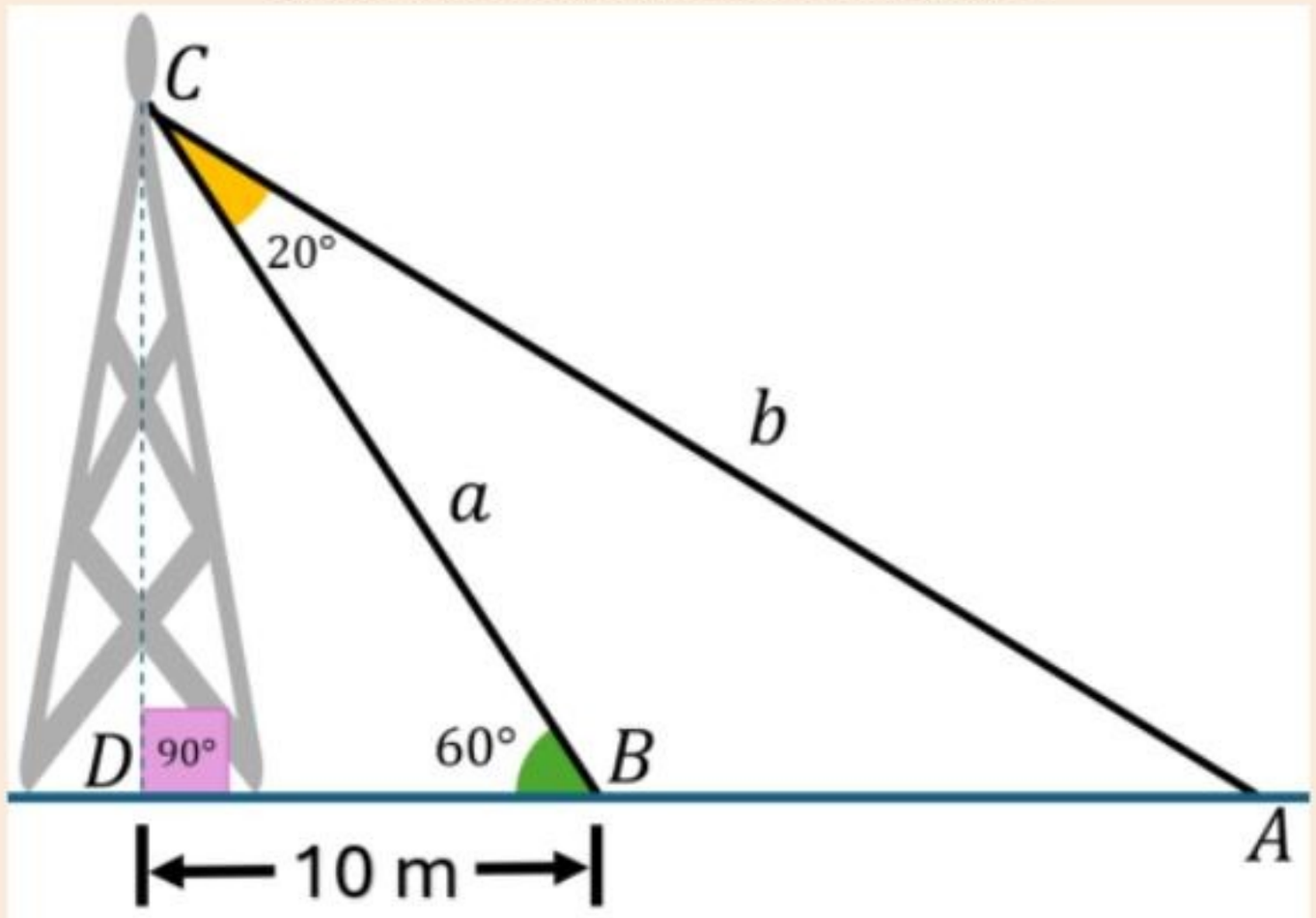
$$A \approx 1.74\ m^2$$

En conclusión: el área de las placas de aluminio es de aproximadamente $1.74\ \mathrm{m}^2$.

Ejemplo 51.

Una torre de telecomunicaciones será sostenida por dos cables a y b que forman un ángulo de 20° entre ellos. El primero se encuentra a 10 metros de la torre y forma un ángulo de 60° con el piso. ¿Cuáles son la altura de la torre y las longitudes que deben tener los cables?

Figura 73.
Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 51



Nota. Fuente: Evangelista E., M.A. (2025). Elaboración propia. [Figura que representa el problema planteado en el Ejemplo 51].

Solución:

Nota: Verifica que para este ejercicio tu calculadora esté en grados (sistema sexagesimal).

En la figura se observa que el triángulo $\boldsymbol{BCD}$ es triángulo rectángulo pues cuenta con un ángulo de 90°, por lo que a partir de razones trigonométricas con el ángulo $\boldsymbol{B = 60°}$ y el segmento $\boldsymbol{\overline{BD} = 10\ \mathrm{m}}$ se puede calcular la altura de la torre representada por el segmento $\boldsymbol{\overline{CD}}$:

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{co}{ca}}$$

$$\boldsymbol{\tan 60° = \frac{\overline{CD}}{10\ \mathrm{m}}}$$

$$\boldsymbol{\overline{CD} = (10\ \mathrm{m})(\tan 60°)}$$

$$\boldsymbol{\overline{CD} = 17.32\ \mathrm{m}}$$

Ahora se pude emplear el Teorema de Pitágoras para calcular la longitud del cable $\boldsymbol{a}$, pues corresponde a la hipotenusa del triángulo $\boldsymbol{BCD}$:

$$\boldsymbol{h^2 = co^2 + ca^2}$$

$$\boldsymbol{a = \sqrt{(\overline{CD})^2 + (\overline{BD})^2}}$$

$$\boldsymbol{a = \sqrt{(17.32\ \mathrm{m})^2 + (10\ \mathrm{m})^2}}$$

$$\boldsymbol{a = \sqrt{399.98\ \mathrm{m}^2}}$$

$$\boldsymbol{a = 19.99\ \mathrm{m}}$$

$$\boldsymbol{a \approx 20\ \mathrm{m}}$$

Los ángulos $\boldsymbol{\angle CBD}$ y $\boldsymbol{\angle ABC}$ son suplementarios por lo que:

$$\boldsymbol{\angle CBD + \angle ABC = 180°}$$

$$\boldsymbol{60° + \angle ABC = 180°}$$

$$\boldsymbol{\angle ABC = 180° - 60°}$$

$$\boldsymbol{\angle ABC = 120°}$$

Y para el triángulo $\boldsymbol{ABC}$ por suma de ángulos internos de un triángulo se tiene que:

$$\boldsymbol{A + B + C = 180°}$$

$$\boldsymbol{A + 120° + 20° = 180°}$$

$$\boldsymbol{A + 140° = 180°}$$

$$\boldsymbol{A = 180° - 140°}$$

$$\boldsymbol{A = 40°}$$

Por lo que el triángulo $\boldsymbol{ABC}$ es un triángulo oblicuángulo pues no cuenta con ángulos de 90°, entonces, se puede aplicar la Ley de Senos para obtener la longitud del cable $\boldsymbol{b}$:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\operatorname{sen} A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{\operatorname{sen} B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{\operatorname{sen} C}}$$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\operatorname{sen} A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{\operatorname{sen} B}}$$

$$\frac{\boldsymbol{20\ \mathrm{m}}}{\boldsymbol{\operatorname{sen} 40°}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{\operatorname{sen} 120°}}$$

$$\boldsymbol{b = \frac{(20\ \mathrm{m})(\operatorname{sen} 120°)}{\operatorname{sen} 40°}}$$

$$\boldsymbol{b = 26.9459\ \mathrm{m}}$$

$$\boldsymbol{b \approx 26.95\ \mathrm{m}}$$

En conclusión: la torre de telecomunicaciones mide $\boldsymbol{17.32\ \mathrm{m}}$, los cables que la sostienen miden $\boldsymbol{a = 20\ \mathrm{m}}$ y $\boldsymbol{b = 26.95\ \mathrm{m}}$ aproximadamente.



Actividad 9.
Ejercicio Autoevaluable

Instrucciones: Para reforzar los contenidos revisados en el Módulo II, realiza el siguiente ejercicio autoevaluable.

Ingresa a la plataforma SEDUCA, accede a la sección Actividades (Estudiante) y responde la actividad titulada MII Ejercicio Autoevaluable.

Resumen

En este módulo aprendiste la importancia que tienen los triángulos en el mundo de las Matemáticas y cómo los empleamos para resolver situaciones de nuestro entorno. Ahora sabes que, en todo triángulo la suma de sus ángulos internos siempre debe ser de 180°.

Con el Teorema de Tales pudiste analizar la relación que existe entre las medidas de los lados de los triángulos, además, ahora también es fácil para ti identificar triángulos congruentes y semejantes, así como encontrar medidas de ángulos y lados en diversos tipos de triángulos.

Aprendiste que cuando un triángulo tiene un ángulo de 90° se denomina triángulo rectángulo y que, en él puedes aplicar las razones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras, mientras que, en caso de no tener ángulos de 90°, entonces se denomina triángulo oblicuángulo y que entonces puedes aplicar la Ley de Senos y la Ley de Cosenos. Observa que estas expresiones se complementan para poder abarcar todo tipo de triángulos y que los puedas aplicar para resolver distintos tipos de problemas que involucren triángulos, pues demás, los puedes combinar, tal como se te mostró en los problemas de aplicación.

Conoces la diferencia entre los sistemas de medición de ángulos sexagesimal y cíclico, puedes realizar conversiones, operar entre ellos y seguramente hasta entender el famoso meme ¡La calculadora estaba en radianes!

Justamente retomando este último punto, te pudiste percatar que en muchos de los ejercicios del módulo se te solicitó que verificaras que la calculadora estuviese en el sistema sexagesimal o, como coloquialmente decimos, en grados.

Otro aspecto importante para resaltar de este módulo es que sabes diferenciar entre un ángulo en posición normal y uno reducido, obtener uno a partir de otro, esto es muy útil, por ejemplo, para analizar diagramas y estructuras en Física o Ingeniería.

Ahora, es momento de dar entrada a una figura más, al círculo, analizar su estrecha relación con los triángulos y cómo, de forma natural, nos lleva al uso del sistema cíclico, a veces llamado radianes.



Glosario

- **Ángulo adyacente:** cada uno de los dos ángulos que comparten vértice y un lado común.
- **Ángulo agudo:** ángulo cuya medida es menor a 90°.
- **Ángulo complementario:** par de ángulos cuyas medidas suman 90°.
- **Ángulo en posición normal:** ángulo con vértice en el origen y lado inicial sobre el eje x positivo.
- **Ángulo externo:** ángulo formado por un lado del triángulo y la prolongación de otro.
- **Ángulo obtuso:** ángulo mayor a 90° y menor que 180°.
- **Ángulo opuesto:** ángulo ubicado frente a un lado específico del triángulo.
- **Ángulo recto:** ángulo de 90°.
- **Ángulo reducido:** ángulo agudo asociado a un ángulo en posición normal según su cuadrante.
- **Cateto:** cada uno de los dos lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.
- **Cateto adyacente:** cateto que se encuentra junto al ángulo de referencia.
- **Cateto opuesto:** cateto que está frente al ángulo de referencia.
- **Congruencia de triángulos:** relación entre triángulos con misma forma y tamaño.
- **Correspondencia:** relación entre los elementos de dos triángulos que se comparan.
- **Cosecante (csc):** razón trigonométrica recíproca del seno.
- **Coseno (cos):** razón trigonométrica entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
- **Cotangente (cot):** razón trigonométrica recíproca de la tangente.
- **Cuadrante:** cada región del plano cartesiano determinada por los ejes.
- **Hipotenusa:** lado opuesto al ángulo recto, el de mayor longitud.
- **Ley de cosenos:** relación entre lados y cosenos de un triángulo oblicuángulo.
- **Ley de senos:** relación entre lados y senos de los ángulos opuestos.
-
- **Mediatriz:** recta perpendicular a un segmento en su punto medio.
- **Mediana:** segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.
- **Perímetro:** suma de las longitudes de los lados de una figura.
- **Razón trigonométrica:** relación entre dos lados de un triángulo rectángulo.
- **Secante (sec):** razón trigonométrica recíproca del coseno.
- **Semejanza de triángulos:** triángulos con la misma forma, pero diferente tamaño.
- **Seno ("sen"):** razón trigonométrica entre cateto opuesto e hipotenusa.
- **Tangente ("tan"):** razón trigonométrica entre cateto opuesto y cateto adyacente.
- **Teorema de Pitágoras:** en triángulos rectángulos $c^2 = a^2 + b^2$
- **Teorema de Tales:** establece proporcionalidad entre segmentos determinados por paralelas.
- **Triángulo acutángulo:** triángulo con todos sus ángulos menores de 90°.
- **Triángulos congruentes:** triángulos que tienen la misma forma y tamaño, todos sus lados y ángulos son iguales.

- **Triángulo equilátero:** triángulo con tres lados iguales y tres ángulos de 60°.
- **Triángulo escaleno:** triángulo con los tres lados distintos.
- **Triángulo isósceles:** tiene dos lados de la misma magnitud y uno diferente, lo cual trae como consecuencia que sus ángulos opuestos a los lados sean iguales y tienen la misma magnitud.
- **Triángulo oblicuángulo:** triángulo sin ángulo recto.
- **Triángulo obtusángulo:** triángulo con un ángulo mayor a 90°.
- **Triángulo rectángulo:** triángulo con un ángulo recto.
- **Triángulos semejantes:** triángulos con la misma forma, pero distinto tamaño, los lados correspondientes son proporcionales.

Referencias

- Chavarría-Molina, J. (2023). Fundamentos de matemática universitaria. Ed. Tecnológica de Costa Rica. pp 509. ISBN 978-9977-66-540-5.
- Silva, J.M. (2003). Fundamentos de matemáticas: Álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. pp 500. 6a ed. Ed. Limusa. México. ISBN 968-18-5095-5.
- Swokowski, E. W. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. 12a ed. Cengage Learning. pp 1232. ISBN 978-607-481-586-5.
- Larson, R., & Hostetler, R. (2013). Geometría analítica. McGraw-Hill Education.
- Lay, D. C. (2016). Geometría y trigonometría. Pearson Educación.
- Stewart, J. (2016). Cálculo: Trascendentes tempranas (7.ª ed.). Cengage Learning.